

Rough path analysis とはなんだろうか

会田 茂樹

大阪大学大学院基礎工学研究科

1 前置き

x_t ($0 \leq t \leq 1$) を \mathbb{R}^d 上の path とする。 $f(x) = (f^1(x), \dots, f^d(x))$ を \mathbb{R}^d 上の \mathbb{R}^d -値 C^∞ 関数とする。 x_t が連続かつ有界変動ならば積分 $\int_0^1 (f(x_u), dx_u)$ は Stieltjes 積分として定義される。連続な path x_t が有界変動ではなく p -variation norm ($1 < p < 2$)

$$\|x\|_p := \left\{ \sup_D \sum_{i=1}^N |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p}$$

($D = \{0 = t_0 < \dots < t_N = 1\}$ はすべての分割を動く) が有限のときも近似和の極限

$$\lim_{m(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N (f(x_{s_{i-1}}), x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \quad (t_{i-1} \leq s_{i-1} \leq t_i) \quad (1.1)$$

は収束することはわかる。それを Young integral という。Path が γ -次の Hölder 連続性をもつとき、 $\gamma > \frac{1}{p}$ ならば p -variation norm は有限である。したがって、Brown 運動の path は $2 < p < 3$ の p -variation norm が有限だが Young integral の考えを用いて (1.1) が収束するとは言えない。実は iterated integral $\int_s^t (x(u) - x(s)) \otimes dx(u) \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ も込みにして近似和を定義すれば収束することがわかる。 \otimes はテンソル積を表す。それが Terry Lyons による rough path analysis とよばれるものである。この話の分かりにくい点は

1. Young integral のときは path x_t だけの言葉で積分が定義されるが rough path は iterated integral $\int_s^t (x(u) - x(s)) \otimes dx(u)$ もペアにして考えなければならないこと
2. x_t が滑らかな path でなければ Young integral としてすら iterated integral $\int_s^t (x(u) - x(s)) \otimes dx(u)$ は定義できないから、rough path とは x_t と $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 値の写像 $\bar{x}_2(s, t)$ のペアとして定義されること、さらにすべての t で $x_t = y_t$ でも $\bar{x}_2(s, t) \neq \bar{y}_2(s, t)$ となることがあること
3. 勝手な x_t と $\bar{x}_2(s, t)$ のペアではなくある代数的な関係式 (Chen の恒等式) をみたく必要があること (Young integral の定義でも implicit に $x_t - x_s$ のみたく代数的な関係を用いているがそれはほとんど意識されない)
4. Brown 運動の path に対して rough path analysis を適用するときは Brown 運動の path を rough path の空間に埋め込んで考えるがその埋め込みの仕方が一意的ではないこと

などがあると思う。数学としては、まったく抽象的に上で述べた Chen の恒等式をみたく写像として rough path が与えられたとして、その積分論を展開すればよいのだがそれだとやはり

わかりにくいと思われるので、そのようには話を進めず C^1 -path x_t に対して定義される汎関数 $x \rightarrow \int_0^1 (f(x_u), dx_u)$ がどのような位相で連続かを考えるという立場で rough path analysis を紹介する。その位相が p -variation ($1 < p < 2$) の位相より弱ければその空間で積分が連続的に拡張され定義されるであろうし、自然と rough path の空間も出てくるであろう。

2 Introduction

$f(x) = (f_j^i(x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}$ ($x \in \mathbb{R}^d$) を (n, d) 行列値 C_b^∞ 関数とする。 \mathbb{R}^d 上の滑らかな path x_t ($0 \leq t \leq 1$) に対して、Riemann-Stieltjes 積分

$$I_{s,t}(x) := \int_s^t f(x_u) dx_u = \int_s^t f_j^i(x_u) dx_u^j, \quad (s, t \in [0, 1]) \quad (2.1)$$

は \mathbb{R}^n -値の滑らかな path を与える。しかし、 x_t が Brown 運動のように滑らかさが無いとき、どのように定義したらよいだろうか。もちろんマルチンゲール理論による定義があるわけだが、ここでは T.Lyons ([8, 9]) による rough path analysis で定義する方法を紹介する。

ただし、以下、 x_t は滑らかな path (C^1 級の path) とする。 $I_{s,t}(x)$ を近似する量として次のものがあるであろう。

$$\tilde{I}_{s,t}(x) := f(x_s)(x_t - x_s), \quad (2.2)$$

$$J_{s,t}(x) := f(x_s)(x_t - x_s) + (\nabla f)(x_s) \left(\int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right). \quad (2.3)$$

ただし、 $a = \sum_{i=1}^d a^i e_i, b = \sum_{i=1}^d b^i e_i, c = \sum_{i=1}^d c^i e_i, e_i = {}^t(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$ に対して

$$[(\nabla f)(x)(a \otimes b)]^i = \sum_{1 \leq j, k \leq d} \frac{\partial f_j^i}{\partial x_k}(x) a^k b^j \quad (2.4)$$

$$\left[(\nabla f)(x_s) \left(\int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right) \right]^i = \sum_{1 \leq j, k \leq d} \frac{\partial f_j^i}{\partial x_k}(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j \quad (2.5)$$

$$[(\nabla^2 f)(x)(a \otimes b \otimes c)]^i = \sum_{1 \leq k, l \leq d} \frac{\partial^2 f_j^i}{\partial x_l \partial x_k}(x) a^l b^k c^j \quad (2.6)$$

と約束する ($[\cdot]^i$ は i 成分を表す)。

$\tilde{I}_{s,t}(x)$ は $I_{s,t}(x)$ の第一近似、 $J_{s,t}(x)$ は次の意味で、第二近似といえる。

$$\begin{aligned} I_{s,t}(x) &= \int_s^t \left[f(x_s) + \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) d\theta \right\} (x_u - x_s) \right] dx_u \\ &= \int_s^t [f(x_s) + (\nabla f)(x_s)(x_u - x_s)] dx_u \\ &\quad + \int_s^t \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) d\theta - (\nabla f)(x_s) \right\} (x_u - x_s) dx_u \\ &= J_{s,t}(x) + \int_s^t \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) dr \right) d\theta \right\} (x_u - x_s) \otimes (x_u - x_s) dx_u \\ &=: J_{s,t}(x) + R_{s,t}(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

さらに容易に、

$$|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x)| \leq C \int_s^t |x_u - x_s|^2 |\dot{x}_u| du. \quad (2.8)$$

$[0, 1]$ の分割 $D := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$ に対して、 \bar{D} をさらに s, t を分点として付け加えた分割とする (入っていたら付け加える必要無し)。それを順番に並べたものを t_i と書くことにする。

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_{s \leq t_{i-1}, t_i \leq t, t_{i-1}, t_i \in \bar{D}} \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x) \quad (2.9)$$

$$J_{s,t}(x, D) := \sum_{s \leq t_{i-1}, t_i \leq t, t_{i-1}, t_i \in \bar{D}} J_{t_{i-1}, t_i}(x) \quad (2.10)$$

と定義する。明らかに、

$$I_{s,t}(x) = \sum_{s \leq t_{i-1}, t_i \leq t, t_{i-1}, t_i \in \bar{D}} I_{t_{i-1}, t_i}(x) \quad (2.11)$$

$$I_{s,t}(x) = \lim_{m(D) \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) \quad (2.12)$$

$$I_{s,t}(x) = \lim_{m(D) \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D), \quad (2.13)$$

$m(D)$ は分割 D の最大幅。(2.12) は Stieltjes 積分の近似、(2.13) は T.Lyons の仕事に出て来る近似。このままでは、単に Taylor 展開で $f(x_u)$ を 2 次まで近似して近似和を構成したに過ぎないが、大事なものは、(2.13) を用いることにより次に述べる連続性定理が証明できることである。

そのため、 p -variation norm の定義を述べる。

Definition 2.1 滑らかな path $\{x_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ について $\Delta = \{(s, t) \mid 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ 上の \mathbb{R}^d 値関数、 $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 値関数

$$\bar{x}_1(s, t) = x(t) - x(s) \quad (2.14)$$

$$\bar{x}_2(s, t) = \int_s^t (x(u) - x(s)) \otimes dx(u) \quad (2.15)$$

を定義し関数 $\psi(\cdot, \cdot) : \Delta \rightarrow V$ (V はベクトル空間) の q -variation norm を

$$\|\psi\|_q = \sup_D \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(t_i, t_{i+1})|^q \right\}^{1/q} \quad (2.16)$$

と定義する。 $D := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$ はすべての分割を動く。 $\psi = \bar{x}_1, \bar{x}_2$ などである。また、区間 $[s, t]$ での q -variation norm を $\|\psi\|_{q, [s, t]}$ と書く。

Theorem 2.2 $2 < p < 3$ とする。 x_t, y_t を \mathbb{R}^d 上の滑らかな path とする。

$$\max \{ \|\bar{x}_1\|_p, \|\bar{y}_1\|_p, \|\bar{x}_2\|_{p/2}, \|\bar{y}_2\|_{p/2} \} \leq R < \infty \quad (2.17)$$

$$\max \{ \|\bar{x}_1 - \bar{y}_1\|_p, \|\bar{x}_2 - \bar{y}_2\|_{p/2} \} \leq \varepsilon \quad (2.18)$$

とすると任意の $0 \leq s \leq t \leq 1$ に対して

$$\left| \int_s^t f(x_u) dx_u - \int_s^t f(y_u) dy_u \right| \leq \varepsilon \cdot C(R, p, f), \quad (2.19)$$

$C(R, p, f)$ は R, p, f の 3 階微分までの *supnorm* できまる定数。

さらに d 次元 Brown 運動の path $w(t)$ について次の結果が示せる。

Theorem 2.3 $(P_n w)(t)$ を分点 $\{\frac{k}{2^n}\}_{k=0}^{2^n}$ における値を結んで得られる $w(t)$ の折れ線近似の path とする。この path に対して $(P_n w)_1, (P_n w)_2$ を考えるとほとんどすべての w について

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \max\{\|(\overline{P_n w})_1 - (\overline{P_m w})_1\|_p, \|(\overline{P_n w})_2 - (\overline{P_m w})_2\|_{p/2}\} = 0 \quad (2.20)$$

Brown 運動の path w で Theorem 2.3 のように近似 path $(\overline{P_n w})_1, (\overline{P_n w})_2$ が Cauchy 列となっているものを考える。Theorem 2.2 よりすべての $(s, t) \in \Delta$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{s,t}(P_n w)$ が収束する。それを積分 $I_{s,t}(w) = \int_s^t f(w_u) dw_u$ と考えるのが自然であろう。さらに $(P_n w)_1, (P_n w)_2$ の p -variation norm, $p/2$ -variation norm の極限を \bar{w}_1, \bar{w}_2 と書くと連続性定理 Theorem 2.2 の $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ をこれら極限で出てくる $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ ($\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ も Brown 運動の path η の極限で出てくるもの) などに置き換えてそのまま成り立つ事も分かる。さらに、次の確率積分の近似定理に注意する。

Theorem 2.4 ほとんどすべての w について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{s,t}(P_n w) = \int_s^t f(w_u) \circ dw_u \quad (2.21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{P_n w})_2(s, t) = \int_s^t (w(u) - w(s)) \otimes dw(u) \quad (2.22)$$

ただし、右辺の積分は Stratonovich 積分である。

これより

1. $I_{s,t}(w)$ は Stratonovich 積分 $\int_s^t f(w_u) \circ dw_u$ とほとんどすべての w について等しいこと
2. $\bar{w}_2(s, t)$ はやはり Stratonovich 積分 $\int_s^t (w(u) - w(s)) \otimes dw(u)$ と等しいこと

がわかり確率積分のあるバージョンをとれば path の汎関数として p -variation, $p/2$ -variation norm で計って連続であるとわかる。

以下、Theorem 2.2 が近似 (2.13) を用いてどのように証明されるか紹介する。

3 連続性定理について

$I_{s,t}(x)$ は path x の時刻 $[s, t]$ の部分だけを用いて定義されるから $[s, t]$ 部分の variation norm を用いて評価されるはずである。実際、それは、次の control function を用いてなされ、それが T.Lyons の結果である。

Definition 3.1 連続関数 $\omega(\cdot, \cdot) : \Delta \rightarrow [0, \infty)$ が control function であるとは次をみたときに言う：任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq 1$ に対して、

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t). \quad (3.1)$$

Example 3.2 滑らかな path x_t と $q > 0$ に対して

$$\omega(s, t) = \|\bar{x}_1\|_{q, [s, t]}^q + \|\bar{x}_2\|_{q/2, [s, t]}^{q/2} \quad (3.2)$$

とおくと (3.1) をみたと。次の定理の ω は $q = p$ の場合のこの例の control function と考えてよい。

3.1 $\int_s^t f(x_u)dx_u$ の上からの評価

まず、連続性定理より考えやすいつぎの定理を示す。

Theorem 3.3 滑らかな path x_t が control function ω に対して、すべての s, t について

$$|\bar{x}_1(s, t)| \leq \omega(s, t)^{1/p} \quad (3.3)$$

$$|\bar{x}_2(s, t)| \leq \omega(s, t)^{2/p} \quad (3.4)$$

を満たすと仮定する。このとき、

$$|I_{s,t}(x)| = \left| \int_s^t f(x_u)dx_u \right| \leq C(f, p) \left(\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p} + \omega(s, t)^{3/p} \right), \quad (3.5)$$

ここで $C(f, p)$ は f の 2 階微分までの *sup-norm* と p に依存する定数。

これは、確率積分が 1 次と 2 次の iterated integral の variation norm が有限の所ではやはり有限になるということを述べている。

Lemma 3.4 $N \geq 2$ となる自然数とする。分割 $\bar{D} = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ に対して、ある t_{i-1} で

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N-1}. \quad (3.6)$$

Proof.

$$\begin{aligned} (N-1) \min_i \omega(t_{i-1}, t_{i+1}) &\leq \sum_{i=1}^{N-1} \omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \\ &= \sum_{j \geq 0, 2j+2 \leq N} \omega(t_{2j}, t_{2j+2}) + \sum_{l \geq 0, 2l+3 \leq N} \omega(t_{2l+1}, t_{2l+3}) \\ &\leq 2\omega(s, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

■

Proof of Theorem 3.3 $\bar{D} = D \cup \{s, t\}$ に注意する。 $J_{s,t}(x, D) = J_{s,t}(x, \bar{D})$ である。 $\bar{D} = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ とし $N \geq 2$ とする。(3.6) を満たす i をとる。 $\bar{D}_{-1} := \bar{D} \setminus \{t_i\}$ とおく。 $J_{s,t}(x, \bar{D}) - J_{s,t}(x, \bar{D}_{-1})$ を評価する。

$$\begin{aligned} J_{s,t}(x, \bar{D}) - J_{s,t}(x, \bar{D}_{-1}) &= J_{t_{i-1}, t_i}(x) + J_{t_i, t_{i+1}}(x) - J_{t_{i-1}, t_{i+1}}(x) \\ &= (f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})) (x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\ &\quad + \nabla f(x_{t_{i-1}}) \bar{x}_2(t_{i-1}, t_i) + \nabla f(x_{t_i}) \bar{x}_2(t_i, t_{i+1}) - \nabla f(x_{t_{i-1}}) \bar{x}_2(t_{i-1}, t_{i+1}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここで一般に $s < u < t$ のとき

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(s, t) &= \int_s^t (x(r) - x(s)) \otimes dx(r) \\ &= \int_s^u (x(r) - x(s)) \otimes dx(r) + \int_u^t (x(r) - x(s)) \otimes dx(r) \\ &= \int_s^u (x(r) - x(s)) \otimes dx(r) + \int_u^t (x(r) - x(u)) \otimes dx(r) + (x(u) - x(s)) \otimes (x(t) - x(u)) \\ &= \bar{x}_2(s, u) + \bar{x}_2(u, t) + \bar{x}_1(s, u) \otimes \bar{x}_1(u, t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

に注意して

$$\begin{aligned}
& J_{s,t}(x, \bar{D}) - J_{s,t}(x, \bar{D}_{-1}) \\
&= \nabla f(x_{t_{i-1}})(x(t_i) - x(t_{i-1})) \otimes (x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&+ \left[\int_0^1 \left\{ (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{i-1}}) \right\} d\theta \right] (x(t_i) - x(t_{i-1})) \otimes (x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&+ \nabla f(x_{t_i}) \bar{x}_2(t_i, t_{i+1}) - \nabla f(x_{t_{i-1}}) \bar{x}_2(t_i, t_{i+1}) - \nabla f(x_{t_{i-1}}) \bar{x}_1(t_{i-1}, t_i) \otimes \bar{x}_1(t_i, t_{i+1}) \\
&= R(f, x, t_{i-1}, t_{i+1}) [\bar{x}_1(t_{i-1}, t_i) \otimes \bar{x}_1(t_{i-1}, t_i) \otimes \bar{x}_1(t_i, t_{i+1})] \\
&+ S(f, x, t_{i-1}, t_i) [\bar{x}_1(t_{i-1}, t_i) \otimes \bar{x}_2(t_i, t_{i+1})], \tag{3.10}
\end{aligned}$$

ここで

$$R(f, x, t_{i-1}, t_{i+1}) = \int_0^1 \left(\int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \tau(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\tau \right) d\theta \tag{3.11}$$

$$S(f, x, t_{i-1}, t_i) = \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta. \tag{3.12}$$

従って分点 t_i に対する仮定から、

$$\begin{aligned}
|J_{s,t}(x, \bar{D}) - J_{s,t}(x, \bar{D}_{-1})| &\leq C \cdot \|\nabla^2 f\|_\infty \left\{ \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{3/p} + \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{1/p} \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{2/p} \right\} \\
&\leq C \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{3/p} \|\nabla^2 f\|_\infty. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

$J_{s,t}(x, \bar{D}_{-1})$ に対しても同じルールで分点 t'_i を探して同様にそれを取り去った分割 \bar{D}_{-2} を考えるようにしてこれを繰り返すと

$$|J_{s,t}(x, \bar{D}) - (f(x_s) \bar{x}_1(s, t) + \nabla f(x_s) \bar{x}_2(s, t))| \leq C \cdot \left[\sum_{k=2}^N \left(\frac{2\omega(s, t)}{k-1} \right)^{3/p} \right] \|\nabla^2 f\|_\infty. \tag{3.14}$$

$\lim_{m(D) \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D) = I_{s,t}(x)$ 、 $2 < p < 3$ だから定理が証明された。■

Remark 3.5 (1) $\lim_{m(D) \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D)$ が $I_{s,t}(x)$ に収束するのは (2.8), (2.11) からわかるが、上の分割の点を選んで消去していく論法で次の評価も得られる。 $D = \{0 = t_0 < \dots < t_N = 1\}$, D' を $[0, 1]$ の分割とし、 D'' を共通の分割とする。すると

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(x, D'')| \leq C \cdot \|\nabla^2 f\|_\infty \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{3/p}} \max_{1 \leq i \leq N} \omega(t_{i-1}, t_i)^{\frac{3}{p}-1} \omega(0, 1). \tag{3.15}$$

ゆえに $\lim_{m(D) \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D)$ は収束する。この論法は滑らかな $path$ x_t から定まらない $rough$ $path$ の積分の極限や Young 積分の収束を示すときは重要である。

(2) Young 積分について簡単に述べる。近似和 (2.12) は x_t が $\gamma = \frac{1+\varepsilon}{2}$ -Hölder 連続 ($\varepsilon > 0$) または $\|\bar{x}_1\|_p < \infty$ ($1 < p < 2$) ならば $m(D) \rightarrow 0$ のとき収束することが上のような分点を選んでいく論法でわかる。このように定義された積分を Young 積分という。 x の p -variation norm が有限のときは、 $\omega(s, t) := \|\bar{x}_1\|_{p, [s, t]}^p$ を用いて論ずれば良い。Hölder 連続性のある時は $\omega(s, t) = C \cdot |t - s|$, $|\bar{x}_1(s, t)| \leq \omega(s, t)^\gamma$ を用いて同様に分点を選んで同様な論法をすればよい。

3.2 Theorem 2.2 の証明

$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)|$ を評価して Theorem 2.2 を示す。その control function を用いた次の精密なバージョンで示す。

Theorem 3.6 滑らかな path x_t, y_t が control function ω に対して、すべての s, t について以下をみたすと仮定する。

$$\max\{|\bar{x}_1(s, t)|, |\bar{y}_1(s, t)|\} \leq \omega(s, t)^{1/p} \quad (3.16)$$

$$\max\{|\bar{x}_2(s, t)|, |\bar{y}_2(s, t)|\} \leq \omega(s, t)^{2/p} \quad (3.17)$$

$$|\bar{x}_1(s, t) - \bar{y}_1(s, t)| \leq \varepsilon \omega(s, t)^{1/p} \quad (3.18)$$

$$|\bar{x}_2(s, t) - \bar{y}_2(s, t)| \leq \varepsilon \omega(s, t)^{2/p}. \quad (3.19)$$

このとき、

$$\left| \int_s^t f(x_u) dx_u - \int_s^t f(y_u) dy_u \right| \leq \varepsilon C(f, \omega(0, 1), p) \omega(s, t)^{1/p}. \quad (3.20)$$

$C(f, \omega(0, 1), p)$ は $\omega(0, 1), p, f$ の 3 階微分までの *sup-norm* に依存する定数である。

Proof. $N \geq 2$ とし $\bar{D} = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ から前と同じルールで分点をひとつづつ除いて得られる分割の列 \bar{D}_{-k} を考える。これは ω にのみ依存し x_t, y_t 共通に取れることに注意せよ。すると

$$\begin{aligned} & |J_{s,t}(x, \bar{D}) - J_{s,t}(y, \bar{D})| \\ & \leq \sum_{k=0}^{N-2} \left| \{J_{s,t}(x, \bar{D}_{-k}) - J_{s,t}(x, \bar{D}_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, \bar{D}_{-k}) - J_{s,t}(y, \bar{D}_{-k-1})\} \right| \\ & \quad + |J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

(3.10) と仮定から

$$\begin{aligned} & \left| \{J_{s,t}(x, \bar{D}_{-k}) - J_{s,t}(x, \bar{D}_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, \bar{D}_{-k}) - J_{s,t}(y, \bar{D}_{-k-1})\} \right| \\ & \leq C \cdot \varepsilon \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} (\|\nabla^2 f\|_\infty + \|\nabla^3 f\|_\infty). \end{aligned} \quad (3.22)$$

$J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)$ を評価し、 $m(D) \rightarrow 0$ とすれば定理の証明は終る。■

Theorem 3.6 から Theorem 2.2 を導く。

Proof of Theorem 2.2 Control function ω を

$$\begin{aligned} \omega(s, t) & = \|\bar{x}_1\|_{p,[s,t]}^p + \|\bar{y}_1\|_{p,[s,t]}^p + \|\bar{x}_2\|_{p/2,[s,t]}^{p/2} + \|\bar{y}_2\|_{p/2,[s,t]}^{p/2} \\ & \quad + (\varepsilon^{-1} \|\bar{x}_1 - \bar{y}_1\|_{p,[s,t]})^p + (\varepsilon^{-1} \|\bar{x}_2 - \bar{y}_2\|_{p/2,[s,t]})^{p/2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

とおけば Theorem 3.6 の仮定が満たされる。その定理の結論に Theorem 2.2 の仮定を適用すれば良い。■

4 補足

われわれは x が滑らかでない path のときも $\int_s^t f(x_u)dx_u$ を定義する方法を紹介した。しかし、一般に滑らかでない二つの path x_t, y_t がまったく独立に与えられたとき $\int_0^1 x_s dy_s$ に意味をあたえているわけではないことに注意してほしい。したがって、 $\int_0^1 f(t, w)dw(t)$ のような Itô 積分すべてに意味を与えているわけではない。

以下補足を述べる。

1. $d = 1$ のとき、すなわち driving path x_t が 1 次元のとき $f(x) = {}^t(f^1(x), \dots, f^d(x))$ に対して原始関数 $((F^i)'(x) = f^i(x))$ をとると

$$F^i(x_t) - F^i(x_s) = \int_s^t f^i(x_u)dx_u$$

だから x_t のみの連続な汎関数になり、2 次の積分の部分はいらぬ。実際このときは、

$$\int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u = \int_s^t (x_u - x_s)dx_u = \frac{(x_t - x_s)^2}{2} \quad (4.1)$$

でありこれの $p/2$ -variation norm は x の p -variation norm と同じだから 2 次の項は自動的に評価されて必要無いということがわかる。連続性定理が本質的なのは driving path が多次元の場合である。

2. Itô の公式について

滑らかな path x_t については

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_0^t (\nabla f)(x_s)dx_s \quad (4.2)$$

が成立することは自明。 x_t が Brown 運動の path のときも右辺の積分を Stratonovich 積分と解釈して(ほとんどすべての path について) 等号が成立するというのが Itô の公式である。これは、連続性定理と Theorem 2.3 から自然に証明される。

3. 滑らかな path x_t に対して、 $T^2(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus (\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ に値をとる Δ 上の連続写像 $\bar{x}(s, t) = (1, \bar{x}_1(s, t), \bar{x}_2(s, t))$ を x に付随した smooth rough path という (smooth rough path とは自己矛盾的なネーミングだが)。ただし、 \bar{x}_1, \bar{x}_2 は (2.14), (2.15) で定義したもの。 \bar{x}_1 を first level path, \bar{x}_2 を second level path という。 $T^2(\mathbb{R}^d)$ は普通の和、スカラー倍、次の積

$$(a_0, a_1, a_2) \otimes (b_0, b_1, b_2) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_2b_0 + a_0b_2 + a_1b_1) \quad (4.3)$$

で非可換代数 (\mathbb{R}^d 上の truncated tensor algebra) になる。任意の $s < u < t$ に対して

$$\bar{x}(s, t) = \bar{x}(s, u) \otimes \bar{x}(u, t) \quad (4.4)$$

が成立する。これを Chen(K.T.Chen) の恒等式と言う。これは、 $x_1(s, t) = x_1(s, u) + x_1(u, t)$ ($s < u < t$) と式 (3.9) と同値である。もう少し一般形で書くと任意の $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq 1$ に対して

$$\bar{x}_1(t_0, t_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{x}_1(t_i, t_{i+1}) \quad (4.5)$$

$$\bar{x}_2(t_0, t_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{x}_2(t_i, t_{i+1}) + \sum_{i=1}^{N-1} \bar{x}_1(t_0, t_i) \otimes \bar{x}_1(t_i, t_{i+1}) \quad (4.6)$$

となるものである。これまでの議論を振り返って見る。 $J_{s,t}(x, D)$ の定義、(2.13) による $I_{s,t}(x)$ の定義、Theorem 3.3 の証明を見てもわかるように本質的なのは Chen の恒等式と \bar{x}_1, \bar{x}_2 に対する path の条件 (3.3), (3.4) であり \bar{x}_2 が実際になんらかの path を iterated integral したものである必要は無い。まったく抽象的に (4.4), (3.3), (3.4) をみたくもものを roughness p の rough path ($2 < p < 3$) という。(3.3), (3.4) をみたく連続な control function の存在と Chen の恒等式をみたく $C(\Delta \rightarrow T^2(\mathbb{R}^d))$ の元 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ について \bar{x}_1 の p -variation norm が有限、 \bar{x}_2 の $p/2$ -variation norm が有限ということは同値になることも証明できる。Roughness p の rough path 全体を $\Omega_p(\mathbb{R}^d)$ と書く。 $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega_p(\mathbb{R}^d)$ に対して $d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x}_1 - \bar{y}_1\|_p + \|\bar{x}_2 - \bar{y}_2\|_{p/2}$ で $\Omega_p(\mathbb{R}^d)$ は距離空間になる。Smooth rough path は rough path の一例だが、その d_p での極限もやはり rough path になる。これを geometric rough path という。

4. Almost rough path について

$$\bar{y}_1(s, t) := J_{s,t}(x) \quad (4.7)$$

$$\bar{y}_2(s, t) := f(x_s) \otimes f(x_s)(\bar{x}_2(s, t)) \quad (4.8)$$

ただし $f(x) \otimes f(x)(a \otimes b) = (f(x)a) \otimes (f(x)b)$ である。

$\bar{y}_1(s, t), \bar{y}_2(s, t)$ は Chen の恒等式を満たさないが次の関係式をみたく。この関係式を満たす $\bar{y} = (1, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ を almost rough path という。 $s < u < t$ のとき

$$|\bar{y}_1(s, u) + \bar{y}_1(u, t) - \bar{y}_1(s, t)| \leq C\omega(s, t)^\theta \quad (4.9)$$

$$|\bar{y}_2(s, u) + \bar{y}_2(u, t) + \bar{y}_1(s, u) \otimes \bar{y}_1(u, t) - \bar{y}_2(s, t)| \leq C\omega(s, t)^\theta \quad (4.10)$$

($\theta = \frac{3}{p} > 1$) を満たす。 C は s, u, t に依存しない定数。(4.9) は (3.10) の帰結であり、これをもとに $I_{s,t}(x)$ の連続性定理が示された。 \bar{y}_2 の方も

$$\begin{aligned} \bar{z}_2(s, t) &:= \int_s^t I_{s,u}(x) \otimes dI_{s,u}(x) \\ &= \lim_{m(D) \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \bar{y}_2(t_i, t_{i+1}) + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \bar{y}_1(t_k, t_{k+1}) \right) \otimes \bar{y}_1(t_i, t_{i+1}) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

が成立するが、この右辺は一般的な rough path の場合も収束することがわかり、rough path \bar{x} から積分という操作で新たな rough path $\bar{z} = (1, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ を作ることができる。almost rough path という名前はそれから上の操作で一意的に rough path を作ることから来ている。また、この作り方で second level path が ($I_{s,t}(x)$ の連続性定理の証明をと同様にして) \bar{x} の連続な写像、すなわち rough path の間の写像 $\bar{x} \rightarrow \bar{z}$ が連続であることもわかる。

5. x が滑らかな path のとき、ODE

$$\dot{z}_t = g(z_t)\dot{x}_t \quad (4.12)$$

$$z_0 = a \in \mathbb{R}^d \quad (4.13)$$

を考えよう。ただし、 $g(\cdot) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N, M_{N,d})$ ($M_{N,d}$ は N 行 d 列の行列の全体) とする。もちろん、この方程式には解があるがそれが driving path x_t に関してどんな位相で連続かを考える。次の連続性定理が示せる。

Theorem 4.1 微分方程式 (4.12) の解を $I(x)_t$ と書く。Driving path が y_t の時の解を $I(y)_t$ と書く。 x, y が Theorem 3.6 の仮定を満たすとすると次の評価が示される。

$$|(I(x)_t - I(x)_s) - (I(y)_t - I(y)_s)| \leq \varepsilon C(R, p, f) \omega(s, t)^{1/p}. \quad (4.14)$$

$C(R, p, f)$ は R, p, f の 3 階微分までの *sup-norm* にのみ依存する定数。

ω を Theorem 2.2 の証明のようにとれば Theorem 2.2 のように d_p で連続性定理も示せる。Theorem 4.1 の証明は path x, y を rough path の空間 $\Omega_p(\mathbb{R}^d)$ に埋め込んで rough path の空間の上で ODE を Picard の逐次近似の方法で解くことによりなされる。具体的には次のようにする。次が成立する。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{z}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g(z_t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{z}_t \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

したがって $\hat{z}_t = {}^t(x_t, z_t) \in \mathbb{R}^{d+N}$,

$$f(x, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g(z) & 0 \end{pmatrix} \in M_{(d+N), (d+N)}$$

とおくと \hat{z}_t は $\dot{\hat{z}}_t = f(\hat{z}_t)\dot{\hat{z}}_t$ の解である。通常の Picard の逐次近似法では

$$\hat{z}_t(n) = {}^t(a, 0) + \int_0^t f(\hat{z}_u(n-1)) d\hat{z}_u(n-1) \quad (4.16)$$

$$\hat{z}_t(0) = (x_t, 0) \quad (4.17)$$

の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{z}_t(n)$ をとり解 \hat{z}_t を得る。ここでは \hat{z}_t を rough path の空間に埋め込み、rough path としての積分の作用素 $\hat{z} \rightarrow (1, I_{s,t}(\hat{z}), \int_s^t I_{\cdot,u}(\hat{z}) \otimes dI_{\cdot,u}(\hat{z}))$ の連続性を逐次に用いて証明がなされる。

6. H^1 と p -variation の位相との関連。

Smooth rough path を対応させることにより写像

$$H^1([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^p$$

を得るがこれはコンパクト写像。また次の評価も得られる。

Proposition 4.2 任意の path x_t について

$$\|\bar{x}_1\|_p \leq \|x\|_{H_0^1}, \quad \|\bar{x}_2\|_{p/2} \leq \|\bar{x}_1\|_p \|x\|_{H^1}.$$

7. Theorem 2.3 の証明について

Brown 運動の path w_t は任意の $0 < \gamma < 1/2$ に対して γ -次の Hölder 連続性をもつからほとんどすべての w について $\|\bar{w}_1\|_p < \infty$ ($2 < p < 3$) は自明。 $\int_s^t (w(u) - w(s)) \otimes dw(u)$ はほとんどすべての w について $(s, t) \in \Delta$ の連続な関数のバージョンをもつがその $p/2$ -variation norm が有限かどうかはそれほど自明ではない。つぎの補題に注意すればそれが直ちにわかる。 $\bar{w}_2(s, t)$ を連続なバージョンとする。

Lemma 4.3 $\kappa > \frac{p}{2} - 1$ とする。ほとんどすべての w に対して

$$\|\bar{w}_2\|_{p/2}^{p/2} \leq C_{p,\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} n^\kappa \sum_{k=1}^{2^n} \left(|\bar{w}_1(t_{k-1}^n, t_k^n)|^p + |\bar{w}_2(t_{k-1}^n, t_k^n)|^{p/2} \right). \quad (4.18)$$

ただし、 $t_k^n = \frac{k}{2^n}$.

この補題は Chen の恒等式をみたく $T^2(\mathbb{R}^d)$ 値連続関数について成立するもので、これを用いて Theorem 2.3 が示される。

8. より一般的な roughness p ($n < p < n + 1$) の rough path の話題

9. 現在では p -variation norm ではなく、Hölder norm などでの連続性定理も知られている。連続性定理の応用としては Support theorem, Large deviation, Laplace method, Wiener 空間上のシュレーディンガー作用素のポテンシャル関数が rough path の意味で C^3 ぐらいあれば最低固有値の準古典的振舞がわかること ([2] では potential function は連続関数としていたがその拡張), ループ空間上での weak Poincaré inequality の証明 ([3] ではループ群や path 空間 (終点を固定しないリーマン多様体上の道の空間) で weak Poincaré 不等式が示されているが一般のループ空間上でもその証明が可能なのは最近わかった, Weak Poincaré inequality 自身は S. Kusuoka の結果を用いることにより、もっと前から成立することがわかっていた。[1], [10] を参照。) などがある。

A. Lejay 氏のホームページ

<http://www.iecn.u-nancy.fr/lejay/rough.html>

には rough path 関係の論文, 研究者のページへのリンクがあり有用です。

References

- [1] S. Aida, Uniform Positivity Improving Property, Sobolev Inequality and Spectral Gaps, J. Funct. Anal., **158** (1998) no.1, 152–185.
- [2] S. Aida, Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space, J. Funct. Anal. **203** (2003), no.2, 401–424.
- [3] S. Aida, Weak Poincaré inequalities on domains defined by Brownian rough paths, to appear in the Annals of Probability.
- [4] P. Friz, Continuity of the Ito-Map for Hölder rough paths with applications to the support theorem in Hölder norm, in <http://www.arxiv.org/abs/math.PR/0304501>
- [5] M. Ledoux, T. Lyons and Z. Qian, Lévy area of Wiener processes in Banach spaces, The Annals of Probability, **30**. (2002), No.2, 546–578.
- [6] M. Ledoux, Z. Qian and T. Zhang, Large deviations and support theorem for diffusions via rough paths, Stochastic process and their applications, **102** (2002), No.2, 265–283.
- [7] A. Lejay, An Introduction to Rough Paths, Séminaire de probabilités XXXVII, Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag), (2003).
- [8] T. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev. Mat. Iberoamer., **14** (1998), 215–310.

- [9] T. Lyons and Z. Qian, System control and rough paths, (2002), Oxford Mathematical Monographs.
- [10] M. Röckner and F-Y. Wang, Weak Poincaré inequalities and L^2 -Convergence Rates of Markov Semigroups, *J.Funct.Anal.* **185** (2001), no.2, 564–603.