無限次元空間上の準古典的問題とラプラスの方法

会田 茂樹
大阪大学大学院基礎工学研究科

平成 15 年 1 月 18 日

1 Introduction

この話は論文 [2] をもとにしています。
http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/˜aida/paper/paper.html
に最新版の dvi file がおいてあります。
$L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ 上のシュレーディンガー作用素

$$-H_{\lambda,U} := -\Delta + \lambda^2 U(x) \tag{1.1}$$

のスペクトルのボトムの $\lambda \to \infty$ での振舞を考える。次の仮定をおく。

(H1) $\min U(x) = 0$ かつ零点集合は有限集合、すなわち、$\{x \in \mathbb{R}^d \mid U(x) = 0\} = \{h_1, \ldots, h_n\}$.

(H2) 全ての零点におけるヘッセ行列

$$U_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_l}(h_i)\right)$$

は正定値。

(H3) $\lim_{|x|\to\infty} U(x) > 0$.

<u>Fact 1</u> $E_0(\lambda) = \inf \sigma(-H_{\lambda,U})$ とおく。このとき、

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{E_0(\lambda)}{\lambda} = \min_{1\le i\le n} \mathrm{tr}\sqrt{U_i}$$

実は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\sqrt{U_i} &= \inf \sigma\left(-\Delta + (U_i(x-h_i), (x-h_i))\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\sigma\left(-\Delta + \lambda^2\left(U_i(x-h_i), (x-h_i)\right)\right) \qquad \text{for all } \lambda > 0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

ここでは、$d=\infty$ のときを考えたい。

• $U(x)=\dfrac{1}{4}\|x\|^2+V(x)$ と書き直す。

このときは、$U_i=\dfrac{1}{4}I+K_i$. ここに、

$$K_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_l}(h_i)\right).$$

Fact 2 $L^2(\mathbb{R}^d,\varphi(x)^2dx)$ から $L^2(\mathbb{R}^d,dx)$ への unitary 変換 $M_\varphi f=f\cdot\varphi$ を考える。ここで、$\varphi(x)=(2\pi)^{-d/4}e^{-|x|^2/4}$. また、$L^2(\mathbb{R}^d,dx)$ 上の unitary 変換 $S_\lambda f(x)=\lambda^{d/4}f(\sqrt{\lambda}x)$ を考える。すると、

$$M_\varphi^{-1}S_\lambda^{-1}\left(-H_{\lambda,U}-\frac{d}{2}\lambda\right)S_\lambda M_\varphi=\lambda\left(-L+V_\lambda\right). \tag{1.3}$$

ここで、$L=\Delta-x\cdot\nabla$, すなわち Ornstein-Uhlenbeck operator. また $V_\lambda(x)=\lambda V(\lambda^{-1/2}x)$. $-L_{\lambda,V}=-L+\lambda V(\lambda^{-1/2}x)$ と略記する。

Fact 1 より、

Fact 3 $\inf\sigma(-L_{\lambda,V})$ を改めて $E_0(\lambda)$ と書くことにする。すると、

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}E_0(\lambda) &= \min_{1\le i\le n}\mathrm{tr}\left(\sqrt{\frac{1}{4}I+K_i}\right)-\frac{d}{2}\\ &= \min_{1\le i\le n}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sqrt{I+4K_i}-I\right).\end{aligned}\tag{1.4}$$

ここで、

• $L^2(\mathbb{R}^d,\varphi(x)^2dx)$ および L は $d=\infty$ の場合も Wiener 空間上の L^2 空間、Ornstein-Uhlenbeck 作用素として意味がある。

• K が Hilbert 空間上の trace class 作用素で、$I+4K$ が正定値ならば $\sqrt{I+4K}-I$ も trace class 作用素である。

に注意して、(1.4) を Wiener 空間上の作用素 $-L_{\lambda,V}$ について証明することを目標とする。

(注) 上の問題は物理的には one particle Hamiltonian A が恒等作用素のときの Boson Fock 空間上の相互作用の無いハミルトニアンに摂動がついたハミルトニアンの準古典的問題である (下の [5] および新井氏の 1 月の研究会の予稿を参照せよ)。これはスピーカーが 1 月の研究会で話した一つの問題の解である。しかし、$P(\phi)_2$-theory などの場の量子論などを考えるときは、$A=\sqrt{m-\Delta}$ などのときを考える必要があるが、いまのところ A が有界作用素のときですら、まだ open problem である。他の open problem については、講演の終りで触れる。

2 How to prove Fact 1?

Fact 1 の証明のスケッチとどの部分が無限次元の問題では困難になるか指摘する。

(1) Upper bound estimate

$$\varphi_i(x) = \left(\det\left(\frac{\lambda\sqrt{U_i}}{2\pi}\right)\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\left(\sqrt{U_i}(x-h_i),(x-h_i)\right)\right). \tag{2.1}$$

とおく。$-H_{\lambda,i}\varphi_i(x) = \lambda \mathrm{tr}\sqrt{U_i}\varphi_i(x)$, $\|\varphi_i\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$ に注意する。ただし、$-H_{\lambda,i} = -\Delta + \lambda^2\left(U_i(x-h_i),(x-h_i)\right)$. $R_i(x) = U(x) - U(h_i) - (U_i(x-h_i),(x-h_i))$ とおく. 例えば、U の 3 階微分が一様有界ならば (φ_i に cut-off を掛けておけば、このような仮定は不要だが)、

$$\begin{aligned}(-H_{\lambda,U}\varphi_i,\varphi_i) &= \lambda\mathrm{tr}\sqrt{U_i} + \lambda^2\int_{\mathbb{R}^d} R_i(x)\varphi_i(x)^2dx \\ &\le \lambda\mathrm{tr}\sqrt{U_i} + C\lambda^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

無限次元のときも unitary 変換された世界でこれと同じことをやればよい。ほとんどトリビアルといえる。しかし、curved space のときは、このステップも自明ではない。

(2) Lower bound estimate

IMS localization formula を用いて証明される (IMS=Ismagilov, Morgan, Sigal, Simon などの名前から来ている)。我々の問題でもその formula を用いる。以下に、$-H_{\lambda,U}$ のときの証明のスケッチ ([16] を参照せよ) とその証明の無限次元での困難な点を述べる。$\chi(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数で $|x| \le 1/2$ のとき $\chi(x) = 1$、$|x| \ge 1$ のとき $\chi(x) = 0$ なるものをとる。$J_i(x) = \chi\left(\lambda^{1-\delta}|x-h_i|^2\right)$ $(1 \le i \le n)$ $J_0(x) = \left(1 - \sum_{i=1}^n J_i(x)^2\right)^{1/2}$ と定める。ただし、δ は $0 < \delta < 1/3$ を満たす数。十分大きな λ について J_0 は well-defined. 簡単な計算で次の式 (IMS localization formula) を得る。$u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ について、

$$(-H_{\lambda,U}u,u) = \sum_{i=0}^n \left(-H_{\lambda,U}\left(J_iu\right),J_iu\right) - \sum_{i=0}^n \int_{\mathbb{R}^d} |DJ_i(x)|^2u(x)^2dx. \tag{2.3}$$

Step 1 正数 δ が存在して、すべての x について $|DJ_i(x)|^2 \le C\lambda^{1-\delta}$. ゆえに最後の項の寄与は無視できる。

Step 2 $i \ne 0$ とする。

$$\begin{aligned}\left(-H_{\lambda,U}\left(J_iu\right),(J_iu)\right) &= \left(-H_{\lambda,i}(J_iu),(J_iu)\right) + \lambda^2\left(R_i\cdot(J_iu),(J_iu)\right) \\ &\ge \lambda\mathrm{tr}\sqrt{U_i}\|J_iu\|_{L^2}^2 - o(\lambda)\|J_iu\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ここで $J_i(x) \ne 0$ ならば $|\lambda^2R_i(x)| \le o(\lambda)$ を用いた。

Step 3 $i = 0$ の場合。$J_0(x) \ne 0$ ならば、$\min_{1\le i\le n}|x-h_i| \ge \frac{1}{2}\lambda^{-(1-\delta)/2}$. したがって、$U$ に対する仮定から、$\min\left\{U(x) \mid J_0(x) \ne 0\right\} \ge C\lambda^{-(1-\delta)}$. $-\Delta \ge 0$ を用いて、

$$(-H_{\lambda,U}(J_0u),(J_0u)) \ge \lambda^2\left(U(J_0u),(J_0u)\right) \ge C\lambda^{1+\delta}\|J_0u\|_{L^2}^2. \tag{2.5}$$

$\sum_{i=0}^{n} J_i(x)^2 = 1$ だから上の Step1–Step 3 をあわせて

$$(-H_{\lambda,U}u, u) \geq \lambda \min_i \mathrm{tr}\sqrt{U_i}\|u\|_{L^2}^2 - o(\lambda).$$

(注) (1) $-L_{\lambda,V}$ が $L^2(\mathbb{R}^d, (2\pi)^{-d/2}e^{-\frac{|x|^2}{2}}dx)$ 上の作用素ならば、ユニタリ変換して上の話に帰着できるが、無限次元のときは、ルベーグ測度は存在せず、ポテンシャルの一部 $\frac{1}{4}|x|^2$ の部分は Wiener 測度の中に組み込まれてしまっているので、Step 3 にあたる議論ができない。特殊な V のときは、$-L_{\lambda,V}$ の有限次元の部分に unitary 変換を用いて上の Step 3 が実行できることがある。1 月はこのことを話した。

(2) Fact 1 は準古典的極限でエネルギーの小さな領域ではそのエネルギーは U の零点の近傍の情報だけで決まると言うことを示している。しかし、そのためには上の Step 3 のような零点の近傍以外の部分は低いエネルギー状態のときは無視して良いという大域的な評価が必要になる。この Step 3 の大域的な評価の部分を

(a) Wiener 空間 B 上で次の対数ソボレフ不等式が成立しているということ (これは Ornstein-Uhlenbeck semigroup が hypercontractive であるということと同値)

$$\int_B u(\phi)^2 \log\left(u(\phi)^2/\|u\|_{L^2(B,\mu)}^2\right) d\mu(\phi) \leq 2\int_B |Du(\phi)|_H^2 d\mu(\phi) \quad \text{for any } u \in \mathbb{D}_2^1(B) \tag{2.6}$$

から従う $E_0(\lambda) = \inf\sigma(-L + V_\lambda)$ $(V_\lambda(\phi) := \lambda V(\lambda^{-1/2}\phi))$ の下からの評価式

$$E_0(\lambda) \geq -\frac{1}{2}\log\left(\int_B e^{-2V_\lambda(\phi)}d\mu(\phi)\right) \tag{2.7}$$

があるということ。(実は、(2.6) と全ての有界連続関数 V_λ について (2.7) が成立することは同値である。例えば、[9] の 6.1.17 Corollary を参照せよ。)

(b) Wiener 空間上での Laplace method を用いると (2.7) の右辺が $\lambda \to \infty$ のとき収束することから $-L+V_\lambda$ が λ によらず下に有界な作用素とわかること ($U(x) = \frac{1}{4}|x|^2+V(x)$ に対する仮定 (H1)–(H3) に可積分性 $\int e^{-2U}dx < \infty$ があればちょうどラプラスの方法が使える形であることを注意せよ).

の (a), (b) を合わせて示す。ただし、(2.7) の右辺の $\lambda \to \infty$ の極限は一般には $E_0(\lambda)$ の極限と異なることを注意しておく。

次に V に対する仮定、主結果を述べることにする。

3 Statement of main results

Notation:

(B, H, μ): abstract Wiener space

$-L = D^*D$: Ornstein-Uhlenbeck operator

V : continuous function on B. $V_\lambda(\phi) := \lambda V(\lambda^{-1/2}\phi)$ と定め、シュレーディンガー作用素 $-L_{\lambda,V} = -L + V_\lambda$ を考える。(B の元を ϕ と書く。) $E_0(\lambda) = \inf \sigma(-L_{\lambda,V})$ と定める。V に対する適当な仮定のもとで $E_0(\lambda)$ は単純な固有値であるが (対応する固有関数は ground state とよばれる) このことを以下の証明では用いない。Section 2 で述べた有限次元の証明もこのようなことは用いていなかった。V を二次関数で近似したものの ground state を上からの評価のとき用いるが、その ground state はもちろん explicit に形がわかるもので、今述べた一般論は不要である。

$$U(\phi) := \frac{1}{4}\|\phi\|_H^2 + V(\phi) \qquad \text{for } \phi \in H.$$

と定める。

Assumptions on U

(A1) $\min_{\phi\in H} U(\phi) = 0$ かつ U の零点は有限個、すなわち

$$N := \{\phi \in H \mid U(\phi) = 0\} = \{h_1, \ldots, h_n\}$$

(A2) V は $\{h_1, \ldots, h_n\}$ の B での近傍で C^2. (このとき、B 上の continuous bilinear form $\frac{1}{2}D^2V(h_i)(\phi, \phi)$ を H 上に制限したものは trace class の self-adjoint operator に対応する。それを K_i とかく。$K_i \in L(B, B^*)$ である。) さらに $\frac{1}{4}I_H + K_i (= \frac{1}{2}D^2U(h_i))$ は H 上の正定値作用素と仮定する。

次の関数を導入する。

$$R_i(\phi) := U(\phi) - \frac{1}{2}D^2U(h_i)(\phi - h_i, \phi - h_i) \tag{3.1}$$

h_i が critical point ということから $R_i(\phi)$ は B 上の連続関数になる。

3 番目の仮定は正数 ε, R に依存する。

(A3(ε, R)) 正数 $\xi(R)$ が存在して、$\forall \phi \in B$ with $\|\phi\|_B \le R$,

$$|R_i(\phi)| \le \xi(R)\|\phi - h_i\|_B^{2+\varepsilon}.$$

(A3(ε)) (A3(ε, R)) がすべての $R > 0$ について成立する。

(A4) $d_B(\phi) := \min\{\|\phi - h_i\|_B \mid 1 \le i \le n\}$. とおく。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\theta(\varepsilon) > 0$ が存在して $\inf\{U(\phi) \mid d_B(\phi) \ge \varepsilon, \phi \in H\} \ge \theta(\varepsilon)$.

(A5) 任意の $p>1$ に対して, $q>0, C>0$ で十分大きな $\lambda>0$ に対して次が成立する。

$$E\left[|V\left(\frac{\phi}{\sqrt{\lambda}}\right)|^p\right]\le C(1+\lambda)^q$$

(A6) $\alpha>2$ で次を満たすものがある。

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\log E\left[e^{-\alpha V_\lambda(\phi)}\right]<\infty. \tag{3.2}$$

主定理は次である。

Theorem 3.1 *Assume* (A1),(A2), (A3(ε)),(A4),(A5),(A6).*Then*

$$\lim_{\lambda\to\infty}E_0(\lambda)=\frac{1}{2}\min_{1\le i\le n}\mathrm{tr}\left(\sqrt{I_H+4K_i}-I_H\right). \tag{3.3}$$

Section 2 で述べた下からのラフな評価は次である。

Lemma 3.2 (Rough lower bound) *Suppose* (A1), (A2), (A4), (A5), (A6).
Let $R>\max_{1\le i\le n}\|h_i\|_B$ *and sssume* (A3(ε,R)). *Let* $\rho_\kappa(\phi)=\kappa\min(d_B(\phi),1)^2$*, where* κ *is a nonnegative number.*
(1) *There exists a positive number* κ *satisfying the following.*

(a) $\min\{U(\phi)-\rho_\kappa(\phi)\mid\phi\in H\}=0$,

(b) *Zero point sets of* $U-\rho_\kappa$*, is* $\{h_1,\ldots,h_n\}$.

(c) *For any* $\varepsilon>0$, $\inf\{U(\phi)-\rho_\kappa(\phi)\mid d_B(\phi)\ge\varepsilon,\phi\in H\}>0$,

(d) $$\int_B e^{-2(K_i\phi,\phi)+3\kappa\|\phi\|_B^2}d\mu(\phi)<\infty \qquad \textit{for all } 1\le i\le n.$$

(2) *Let* κ *be a nonnegative number satisfying the assumptions in* (1). *Let* $E_{0,\kappa}(\lambda)$ *be the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator* $-L+V_\lambda(\phi)-\lambda\rho_\kappa(\lambda^{-1/2}\phi)$. *Then it holds that*

$$\liminf_{\lambda\to\infty}E_{0,\kappa}(\lambda)\ge-\frac{1}{2}\log\left(\sum_{i=1}^n\int_B\exp\Big[-2(K_i\phi,\phi)+2\kappa\|\phi\|_B^2\Big]d\mu(\phi)\right)>-\infty. \tag{3.4}$$

(注) $\int_B\exp\Big[-2(K_i\phi,\phi)\Big]d\mu(\phi)=\det(I_H+4K_i)^{-1/2}<\infty$ である。(3.4) で $\kappa=0$ のときを考えると、次の不等式を得る。

$$\min_{1\le i\le n}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sqrt{I_H+4K_i}-I_H\right)\ge-\frac{1}{2}\log\left[\sum_{i=1}^n\{\det(I_H+4K_i)\}^{-1/2}\right] \tag{3.5}$$

この不等式自身は自明な不等式 $x\ge\log(1+x)$ $(\forall x>-1)$ と同値である。

Theorem 3.1 の下からの評価の方はこのラフな評価を用いて Step 3 を実行することによりなされる。どう用いるかは講演で述べる。

4 Some open problems

(1) Tunneling phenomena?
(2) How about the case where $A \neq I_H$?
(3) Supersymmetric version of $-L_{\lambda,V}$?
(4) V の regularity を落して考える。これは下の (5) の問題にも関連する。
(5) Semiclassical problem on $P_x(M) = C([0,1] \to M \mid \gamma(0) = x)$:

The rough lower bound estimate holds on path space over Riemannian manifold. Let (M, g) be a complete Riemannian manifold whose Ricci curvature is bounded. Let μ_λ be the Brownian motion measure on $P_x(M)$ such that

$$\mu_\lambda(\gamma(t_1) \in dx_1, \ldots, \gamma(t_m) \in dx_m) = \left(\prod_{i=1}^{m} p\left(\lambda^{-1}(t_i - t_{i-1}), x_{i-1}, x_i\right)\right) dx_1 \cdots dx_m, \tag{4.1}$$

where $t_0 = 0$, $x_0 = x$, $p(t, x, y) = e^{t\Delta/2}(x, y)$ and Δ is the Laplace-Beltrami operator. Let us define the tangent space along γ by the Levi-Civita connection and denote the H-derivative by D. Let V be a continuous function on $P_x(M)$. Let $-L_\lambda := D^*_{\mu_\lambda} D$ and $-L_{\lambda,V} := \lambda^{-1}(-L_\lambda + \lambda^2 V)$. This operator is unitarily equivalent to $-L + \lambda V(\lambda^{-1/2}\phi)$ on $L^2(B, \mu)$ when M is a Euclidean space. Let $E_0(\lambda) = \inf \sigma(-L_{\lambda,V})$. By the integration by parts formula and the same argument as in [7], we have

$$E_{\mu_\lambda}\left[F^2 \log\left(F^2/\|F\|^2_{L^2(\mu_\lambda)}\right)\right] \leq \frac{2}{\lambda}\left(1 + \frac{C_\lambda}{\lambda}\right) E_{\mu_\lambda}\left[|DF(\gamma)|_H^2\right]. \tag{4.2}$$

Here C_λ is a positive number depending on the norm of Ric such that $\limsup_{\lambda\to\infty} C_\lambda < \infty$. When M is an euclidean space, $C_\lambda = 0$. Therefore the logarithmic Sobolev constant is approximately equal to the Gaussian's one as $\lambda \to \infty$ (small variance). By the estimate in Theorem 7 in [11] again, we have

$$E_0(\lambda) \geq -\frac{\lambda}{2(\lambda + C_\lambda)} \log\left(\int_{P_x(M)} e^{-2\lambda(1+\frac{C_\lambda}{\lambda})V(\gamma)} d\mu_\lambda(\gamma)\right). \tag{4.3}$$

Consequently, under suitable assumptions on V (e.g., $\min\left\{\frac{1}{4}\int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt + V(\gamma)\right\} = 0$, nondegeneracy of the Hessian at minimizers, etc), Laplace type asymptotics formulae [6],[12], [13] imply the boundedness of the right-hand side in (4.3) as $\lambda \to \infty$. But it is not obvious to see that $\limsup_{\lambda\to\infty} E_0(\lambda) < \infty$ under the assumption on V above which seems to be natural.
(6) 基点付きループ群 $L_e(G) = C([0,1] \to G \mid \gamma(0) = \gamma(1) = e)$ 上では heat kernel measure に関して対数ソボレフ不等式が証明されている [8]。さらに、その対数ソボレフ定数の分散のパラメータ λ に関する漸近挙動は $\lambda \to \infty$ のとき (4) で述べたように Gauss のときと同

様になる。また heat kernel measure は pinned measure ((4) で定義した μ_λ を pinned したもの) と同値でその密度関数は有界である [10, 4]。このことを用いて、$L_e(G)$ 上の Witten complex に関して semiclassical analysis は展開できないか?

参考文献

[1] S. Aida, Certain semiclassical problem on Wiener spaces, preprint, (2001).

[2] S. Aida, Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space, preprint, (2002).

[3] S. Aida, Witten complex on pinned path group and its expected semiclassical behaviour, preprint, (2002).

[4] S. Aida and B. K. Driver, Equivalence of heat kernel measure and pinned Wiener measure on loop group, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, (2000), 709–712.

[5] A. Arai, Trace formula, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, J. Funct. Anal. **136**, (1996), 510–547.

[6] G. Ben Arous, Methods de Laplace et de la Phase stationnaire sur l'espace de Wiener, Stochastics, Vol. 25 (1988), 125–153.

[7] M. Capitaine, E. Hsu and M. Ledoux, Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces, Elect. Comm. in Probab. **2** (1997), 71–81.

[8] B. K. Driver and T. Lohrenz, Logarithmic Sobolev inequalities for pinned loop groups, J. Funct. Anal. **140** No. 2 (1996), 381–448.

[9] J.D. Deuschel and D.W. Stroock, Large Deviations, AMS Chelsea Publishing, (2000).

[10] B. K. Driver and V. Srimurthy, Absolute continuity of heat kernel measure with pinned Wiener measure on loop groups, Ann. Probab. **29** (2001), no.2, 691–723.

[11] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061-1083.

[12] S. Kusuoka and D.W. Stroock, Asymptotics of certain Wiener functionals with degenerate extrema, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), 477–501.

[13] S. Kusuoka and D.W. Stroock, Precise asymptotics of certain Wiener functionals, J. Funct. Anal. **99** (1991), 1–74.

[14] M. Schilder, Some asymptotic formulas for Wiener integrals, Transactions of the AMS **125**, (1966), 63–85.

[15] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton University Press, New Jersey, (1974).

[16] B. Simon, Semiclassical Analysis of Low Lying Eigenvalues I. Nondegenerate Minima: Asymptotic Expansions, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. XXXVIII, no. 4, (1983), 309–347.

[17] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J. Diff. Geom., **17** (1982), 661–692.