デリバティブと確率論

大学院の講義のためにつくったものです．参考のために配ります．このプリントのレポート問題は提出の義務はありませんが解いて見ると面白いと思います．

1. Introduction

デリバティブとはなにか？

- 派生したもの
- 金融派生商品

株券、国債、社債などの証券から派生してできた証券の一種で株などと同じように売り買いできるもの．オプションと呼ばれるものもある．

オプションとは？

• オプション (option) 「証券 (株など) をある数、ある値段である期日に売るあるいは買うことのできる権利」という証券．正確には扱っているその株式の上に書かれたオプションという．これはあくまでも権利であって損をするようなときは行使する必要はない．

例えば、

問 0　1 期間後に

$$\text{100 円} \begin{array}{l} \nearrow \text{150 円} \\ \searrow \text{90 円} \end{array}$$

と上昇、下落する可能性がある株と利率が 1 割の国債のみの市場を考える．この株の上に書かれた次のコールオプション C の第 0 期現在の値段 (プレミアム、premium と呼ばれる) はいくらになるだろうか？

「1 期間後にこの株を 1 株 120 円で 22 株買う権利」

2. 用語

基本的な用語について説明する。

$$\text{証券 (security)} \begin{cases} \bullet\text{株式} & \text{(stock)} \\ \bullet\text{債券} & \text{(bond)} \\ \bullet\text{オプション} & \text{(option)} \end{cases}$$

• 債券とは： 利率が 0 以上の絶対安全な (リスクの無い) 証券の事である。国債、社債などがある。

• 株式とは： 上昇、下降などランダムに変動する。有名な Black-Scholes モデルなどにも採用されているように時刻 t での株価 $S(t)$ がブラウン運動と呼ばれる確率過程 $B(t)$ を用いて

$$S(t) = \exp(\lambda t + \sigma B(t))$$

と書かれると仮定する事が多い。

(実は逆に株価のランダムな動きを数学的にモデル化しようとして Bachelier という人によりブラウン運動とよばれる確率過程の概念が生まれてきたといえる。数学的なブラウン運動の定義の起源がアインシュタインらの統計物理学とともに経済学があるのは面白いことだ。)

もちろん $S(t)$ の動きが予測できたら億万長者になるのは間違いないが、それは不可能である。数理ファイナンスと呼ばれる分野は $S(t)$ の予測をして儲けようという学問ではない。

• 空売り　株、債券、オプション等を空売りするなどという。これは証券のマイナスの保有と同じである。また一定の正の利率の債券を空売りするというのはその利率で借金するということと同じになる。このように負の保有を許すと問 0 の状況で 500 円資金があるとき, 株価が変動する前はどのように資産を持てるかと言うと

(1) 国債 -1000 円の保有, 株 15 株の保有

(2) 国債 200 円の保有, 株 3 株の保有

などが可能となる。(1) のケースは国債を空売りして得た 1000 円と手持ちの 500 円で株を 1500 円分買ったことになる.

• 以下では取り引き費用は無し、とする。また、常に空売りでき、株、債券は売れる、あるいは買えるとする。すなわち売り買いしたくても相手がいないあるいはその株がないことはないとする。

• 以下では持っている資金はすべて証券につぎこんでいるとする。その資産を証券の変動を見ながら, 売り買いしていき、親の仕送りのような無償の収入はないとする (自己充足的戦略, self-financing strategy).

3. オプションの価格付けの簡単な例

問 0 の解答を考えよう。

<u>解答</u>　無裁定 (no arbitrage) のアイデアを用いて解く。価格を決めるにあたっては、株価が上昇しやすいか、下落しやすいかは関係がないことを注意してほしい。さてまず、ケース (1) が起こるときこのオプションの価値は権利を行使するから、

$$(150 - 120) \times 22 = 660 \text{円}$$

の価値がある。

ケース (2) が起こると、権利は行使しないから、0 円となる。

ここで、仮に最初に国債を x 円、株を y 円保有して (1), (2) のいずれのケースでもこのオプションと同じ価値を生むようにするには

$$\begin{aligned} 1.1x + 1.5y &= 660 \\ 1.1x + 0.9y &= 0 \end{aligned}$$

を解いて $x = -900, y = 1100$ となる。つまり債券を 900 円分空売りし、株を 1100 円分購入することになる。これを実行するためには、$1100 - 900 = 200$ 円必要である。従って、このオプションの価値は 200 円となる。200 円でなければ、

「所持金 0 円から出発しても適当に債券、株を売り買いすると必ず損はせず正の利益を得る機会」(=裁定機会, arbitrage opportunity という)

がある.

それを説明しよう. オプションの値段を P とする.

(I) $P > 200$ のとき,

資金 0 円を上の連立方程式を解いて得られたように資金を分配する.

債券を 900 円分空売り ……… -900 円

株を 1100 円分購入 ……… 1100 円

オプション C を空売り ……… $-P$ 円

手元に …………… $P - 200$ 円残す.

すると (1) が起こると、手元の資産以外は

$$-900 \times 1.1 + 1100 \times 1.5 - 660 = 0 \text{円}$$

となるが, 手元にある分だけ特をしていることになる.

(2) がおこっても同様に手元にある分の $P - 200$ 円だけ得をすることになる.

(II) $P < 200$ のとき,

債券を 900 円分購入 ……… 900 円

株を 1100 円分空売り ……… -1100 円

オプションを購入 ……… P 円

手元に …………… $200 - P$ 円残す.

というように資産 0 円を分割するとする. すると (1) が起こると, 手元の資産以外は

$$900 \times 1.1 - 1100 \times 1.5 + 660 = 0\text{ 円}$$

となる. 従って手元に残してある分だけ得をすることになる. (2) がおこっても同様である.
結局, 資金 0 から出発しても $P \neq 200$ ならばリスク無く金儲けができることになる. このようなうまい話があっては困るので, 0 期の値段は 200 円と決まる.

注意　債券をもっていて正の利率だから必ず正の利益を得るというのと裁定機会があるということは異なる。

最後に用語を２つ説明し注意を１つする。

● 現在持っている資産をいくつかの証券に分割投資することをポートフォリオ (portfolio) を組むという. 辞書には portfolio= 有価証券明細表、有価証券一覧表と書いてある。また, 上の問の例では $P = 200$ 円が裁定機会なしの必要条件であり、$P = 200$ なら裁定機会がない, すなわち十分条件であるとは言っていない. どんなポートフォリオを組んでも裁定機会がないということは証明できるが次のセクションで一般なケースで問題として述べる事にする.

● 問 0 では $x = -900, y = 1100$ とポートフォリオを組むとオプション C と同じ価値のあるもの (一種の証券, 市場での売り買いを通じてできるものも一種の証券と考える) が実現できた。このことをオプション C がポートフォリオ $x = -900, y = 1100$ で複製 (replicate) されるという。

注意　市場に２つの証券 X, Y があるとする。株価は色々変動するが満期日にはそのときの株価がどうなっていてもその場合場合に応じて同じ値段になるとする。そのときこれらの証券の初期価格は同じでなければならない。でなければ裁定機会が存在してしまう。

レポート問題 1

100 円 → (1) 120 円
100 円 → (2) 100 円

と推移する可能性のある株と利率 10 パーセントの債券があるとする。次のオプション C「1 期間後にこの 1 株 115 円で 22 株買う権利」の価格はいくらになるか？また (1) の起こる確率が $\frac{1}{4}$, (2) が起こる確率が $\frac{3}{4}$ のとき、このオプションを購入したときの平均利得はいくらになるか？

4. 少し一般化

問 0 を少し一般化して次の問題を考えよう。

問 1　S 円の状態から出発して上昇 (up), 下降 (down) する可能性のある株を考える。

$$S \text{ 円の株券} \begin{array}{l} \nearrow (1)\ uS \text{ 円 } (u > 1) \\ \searrow (2)\ dS \text{ 円 } (d < 1) \end{array}$$

と利率 $r - 1$ $(r > 1)$ の債券があるとする。(1) のケースでは a 円、(2) のケースでは b 円の価値がある証券 C の第 0 期の値段 P を求めよ。$a, b \geq 0$ とする.

注　$d < r < u$ でないと裁定機会が生じてしまう。この理由を考えて見よ。

解　この証券を複製するポートフォリオを問 0 と同様にして求めると

$$\begin{aligned} X &= \frac{bu - ad}{r(u - d)} \\ Y &= \frac{a - b}{u - d} \end{aligned}$$

となる。したがって $P = X + Y = r^{-1}(a\pi + b(1 - \pi))$ が価格となる。ここで $\pi = \dfrac{r - d}{u - d}$. である。

注 1　$P \leq \max(a, b)$ となる。そうでなければこのオプションを購入すると必ず損をすることになるから誰もこれを買わないであろう。

注 2　仮に (1) の起こる確率が p, (2) の起こる確率が $1 - p$ とするとこのポートフォリオを購入する事により得られる平均利得は

$$M = a(p - \frac{\pi}{r}) + b(1 - p - \frac{1 - \pi}{r}) \text{ 円}$$

となる。買い手としてはこれが正でないとこのようなオプションは購入したがらないであろう. 例えば $b = 0$ で p が小さいとき, すなわち株が下落しやすいときはこのオプションをもっていても正の利益は得られにくいであろう. 実際このようなときは M は負になるのが式の上からもわかる.

レポート問題 2　オプションの価格を上で求めた値 P とすると, どのようなポートフォリオを組んでも裁定機会がないことを示せ.

ヒント　裁定機会が無い事を示すために資金 0 円 を債券に x 円, 株に y 円, オプションを z 個 買い, 手元に w 円 残すというポートフォリオを組んでみることにする. ただし, 債券, 株, オプションの空売り (すなわち負の保有) は可能とするが, 手元に負の金額を残すことはないとする. すなわち, $w \geq 0$ は仮定する. ($w \leq 0$ を許すと裁定機会が生じてしまう.) 最初の資金は 0 円だから,

$$x + y + Pz + w = 0, \quad w \geq 0 \qquad (4.1)$$

1 期間後の資産は

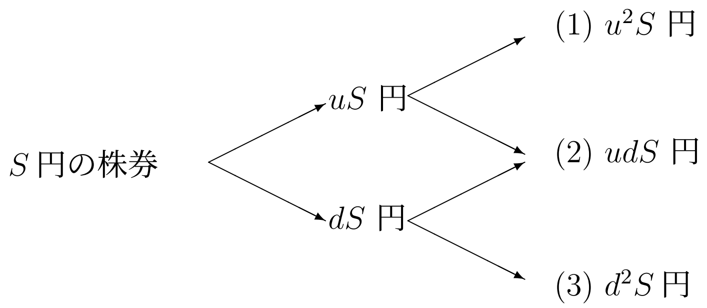
(1) が起こったケースでは：$I = rx + uy + az + w$ 円

(2) が起こったケースでは：$J = rx + dy + bz + w$ 円

となる. 裁定機会がないことをいうには (4.1) の下で, $I \geq 0,\ J > 0$ または $I > 0,\ J \geq 0$ となることがないことを示せばよい.

今まで 1 期間のモデルだけを考えてきたが 2 期間のモデルを考えよう.

問 2



(1) のとき a 円、(2) のとき b 円, (3) のとき c 円の価値がある証券の第 0 期の価格はいくらになるか？

答

$$r^{-2}\{ap^2 + 2bp(1-p) + c(1-p)^2\} \text{ 円}$$

問 3　では一般に問 1 の状況で T 期間推移するモデルを考えよう。第 t 期間推移したあとの株価は

$$Su^k d^{n-k} \text{円} \qquad (k = 0, 1, \ldots, t)$$

の $t+1$ 通りある (t は 0 から T までの整数を表す). 第 t 期間推移したあとの債券の価格は 0 期が B 円ならば Br^t 円になる。ここで満期日 $t = T$ のときに株価 S_T に応じて

$$f(S_T) \text{ 円}$$

の価値があるオプション (今扱っている株の上に書かれたオプション) を考える。f は適当な関数である。例えば

$$f(x) = \max(x-K, 0)$$

のときが、いわゆる行使価格 K のヨーロッパコールオプション (European call option) と呼ばれるものである。実は 2 期間モデルと同じように無裁定のアイデアでプレミアム P は

$$P = r^{-T} E[f(SX_1 \cdots X_T)]$$

と計算できる．ここで S は株の 0 期価格, E は平均 (期待値) を表し、$\{X_t\}_{t=1,2,\ldots,T}$ は独立な確率変数列で

$$P(X_t = u) = \frac{r-d}{u-d}, \qquad P(X_t = d) = \frac{u-r}{u-d}$$

となるものである。確率

$$\pi = \frac{r-d}{u-d}, \qquad 1-\pi = \frac{u-r}{u-d}$$

はリスク中立確率とよばれる．株価がどう変動するかの確率とは関係ない事に注意せよ．

以上で用いた確率論の用語は以下説明していく．

5. 確率論の用語

定義 1 (Ω, P) が確率空間とは Ω の任意の部分集合 (事象と呼ばれる) A について確率 $0 \leq P(A) \leq 1$ が定まっていて次の規則をみたすもの．

(1) $A \cap B = \phi$ ならば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ をみたす．

(2) $P(\Omega) = 1$.

また各 $\omega \in \Omega$ を根元事象という．

定義 2 $X(\omega)$ が確率変数とは適当な確率空間 (Ω, P) の上で定義された関数 $X\ :\Omega \to \mathbf{R}$ のことをいう．このとき X が a という値を取る確率, X が区間 $[c,d]$ の値をとる確率がそれぞれ,

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a) &= P(X = a) \text{ と簡単に書く} \\ P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [c,d]) &= P(X \in [c,d]) \text{ と簡単に書く} \end{aligned}$$

と与えられる．

種々の偶然現象を考えるとき, 直感的には確率的に変動する量として確率変数が考えられるが、数学的には確率空間というそのランダム性を生み出す母体があってその上の関数としてモデル化していることになる。

簡単のため定義 3,4 では確率変数 X は有限個の値しかとらないものについて平均値, 独立性を定義する。

定義 3　平均値 (期待値)
X が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の値のみをとるとする。

$$P(X = x_i) = p_i$$

とする。当然, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ となる。このとき

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

を確率変数 X の平均値という。

定義 4　独立性
Ω 上の確率変数の集まり $\{X_1, X_2, \ldots, X_T\}$ が独立であるとは

$$P(X_1 = a_1, \ldots, X_T = a_T) = P(X_1 = a_1) \cdots P(X_T = a_T)$$

が成立するときにいう。

定義 5　確率過程
$\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ が確率過程とは
(i)

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{0, 1, 2, \ldots, T\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

で時間を表し

(ii)　おのおのの X_t は確率変数を表す。

ものである.

例　コイン投げ

$$X_t = \begin{cases} 1 & (\text{t 回目のコイン投げで表がでたら}) \\ 0 & (\text{t 回目のコイン投げで裏がでたら}) \end{cases}$$

という確率過程がコイン投げの数学的モデルといえる。まったくランダムにコイン投げをすると考えるとこの確率変数列は独立で

$$P(X_t = 1) = \frac{1}{2}$$

と考えられる。

6. 離散時間モデル

1株の株価の変動が確率過程 $\{S_t(\omega)\}_{t=0,1,2,\dots,T}$ で表現されているとする。S_0 は初期の株価でこれはランダムでないはっきりと決まった値とする。T が満期日である。S_t は第 t 期間の株価の変動が終った後の株価をあらわしている。

$\{\rho_t\}_{t=0,1,\dots,T}$ を債券の変動とする。$\rho_t = \rho_0 r^t$ ($r > 1$, ρ_0 は初期の1単位の債権の値段) とかける。いま考えている市場 (market) にはこの株と債券しかないとする。

さて第 t 期間の株価 S_t の変動が終ったあと株を θ_t 株, 債券を b_t だけ保有するポートフォリオを組むとしよう. するとすべての資産は株か債券につぎこむことにしているから (self-financing strategy), $(\theta_t(\omega), b_t(\omega))$ は

$$\theta_t(\omega)S_t(\omega) + b_t(\omega)\rho_t = \theta_{t-1}(\omega)S_t(\omega) + b_{t-1}(\omega)\rho_t$$

を満たさなければならない。これは

$$\theta_t(\omega)S_t(\omega) + b_t(\omega)\rho_t = \theta_0(\omega)S_0 + b_0(\omega)\rho_0 + \sum_{t=1}^{T}(\theta_{t-1}(\omega)\Delta S_{t-1}(\omega) + b_t(\omega)\Delta\rho_{t-1})$$

ともかける。ここで増分を

$$\begin{aligned}\Delta S_{t-1}(\omega) &= S_t(\omega) - S_{t-1}(\omega)\\ \Delta\rho_{t-1} &= \rho_t - \rho_{t-1}\end{aligned}$$

と書いた。

定義

上の市場の確率過程の株価, 債券を表現する確率空間上の任意の確率変数 $C(\omega)$ を考える。直感的には $C(\omega)$ は根元事象 ω が起こったとき, 満期日 $t = T$ に価値 $C(\omega)$ がある証券と思って良い。このとき適当に self-financing な portfolio $(\theta_t, b_t)_{t=0,1,\dots T-1}$ を組むと

$$C(\omega) = \theta_T(\omega)S_T(\omega) + b_T(\omega)\rho_T$$

とこの証券を複製できるときこの市場は完備という。このとき $C(\omega)$ の初期価格は無裁定の考え方から

$$\theta_0 S_0 + b_0\rho_0$$

と決まる。これはランダムな値ではないことに注意して欲しい.

最後に時間が連続のときの有名なモデル Black-Scholes モデルを紹介しよう.

7. 連続時間モデル

6ページの問3で考えたモデルは時間が整数であったがその時間間隔 δt を小さくする極限をとることにより連続的に株価が変動するモデルを導き出すことができる. 中心極限定理とよばれる確率論の定理を用いると株価 S_t は次のようになることがわかる. 連続モ

デルでは債券の値段 ρ_t も次の規則にしたがって変動するのが妥当となる．このときはもちろん株価は連続的変わりいろいろな値を取る可能性がある．

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_0 e^{rt} \\ S_t(\omega) &= S_0 \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t(\omega)\right)\end{aligned}$$

ここで r は瞬間利子率, μ は期待収益率, σ はボラティリティとよばれる．これらの変数も時間 $t > 0$ とともに動くと考えることもできる．B_t はブラウン運動とよばれる確率過程で次の性質をもつものである．

(1) 任意の時間の列 $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \ldots \le t_n$ について $\{B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\}$ は独立な確率変数列となる．

(2)

$$P\left(B_t - B_s \in [a,b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

このようなブラウン運動で株価が変動すると仮定されているモデルは Black-Scholes モデルとよばれる．Black はすでに他界しているが, Scholes はやはり数理ファイナンスの大家 Merton と昨年にノーベル経済学賞を受賞した．

このときポートフォリオ (b_t, θ_t) が self-financing とは

$$b_t(\omega)\rho_t + \theta_t(\omega)S_t(\omega) = b_0\rho_0 + \theta_0 S_0 + \int_0^t \left(b_s(\omega)\ d\rho_s + \theta_s(\omega)\ dB_s(\omega)\right) \qquad (7.1)$$

をみたすこととなる．ここで

$$\int_0^t \theta_s(\omega)\ dB_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{\frac{kt}{n}}(\omega) \left(B_{\frac{(k+1)t}{n}}(\omega) - B_{\frac{kt}{n}}(\omega)\right) \qquad (7.2)$$

などと定義される．実は $B_t(\omega)$ は確率 1 の ω について t の関数として有界変動ではない．またポートフォリオも一般には t について滑らかになるとは一般にはいえない．ある程度数学を学んだ方ならば式 (7.1), (7.2) の積分が Stieltjes 積分と同じ形をしていると気づかれるであろうが Stieltjes 積分では関数に有界変動性などの良い性質が仮定されていたことを思い出して欲しい．じつは (7.2) の積分は伊藤清により初めて定義された確率積分とよばれるものである．普通の積分と異なるのはどちらも積分 $\int_0^t B_s dB_s$ を表現していると思われる

$$\begin{aligned}I &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{kt}{n}}(\omega) \left(B_{\frac{(k+1)t}{n}}(\omega) - B_{\frac{kt}{n}}(\omega)\right) \\ J &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{(k+1)t}{n}}(\omega) \left(B_{\frac{(k+1)t}{n}}(\omega) - B_{\frac{kt}{n}}(\omega)\right)\end{aligned}$$

が異なる値になり $J = I + t$ となることからもわかる. S_t 自身は次の確率微分方程式とよばれる方程式の解になっている.

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right)$$

これらの確率微分方程式, 確率積分などを用いた解析を確率解析という.

市場の完備性について次の定理がなりたつ. 実はこの定理はもっと一般的に成立ち、その結果はやはり伊藤によりはじめて証明された.

定理 1 f を関数として $C(\omega) = f(S_T(\omega))$ とする. すると self-financing なポートフォリオ (b_t, θ_t) が存在して,

$$C(\omega) = b_T(\omega)\rho_T + \theta_T(\omega)S_T(\omega)$$

と書ける.

したがってやはりこの証券 $f(S_T)$ の現在価格は $b_0\rho_0 + \theta_0 S_0$ であたえられるはずである. 実際 $f(x) = \max(x - K, 0)$ のヨーロッパオプションのときはつぎの Black-Scholes の公式でプレミアム P が与えられる.

定理 2

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\int_{\log(K/S)-rT}^{\infty}(Se^x - Ke^{-rT})\exp\left(-\frac{(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T}\right)dx$$

レポート問題 3

なにか本を参照してデリバティブについてレポートを提出せよ.

レポート問題 4 NHK スペシャル (あるいはべつの NHK の番組かも知れないが) のある番組で現代の経済学についての特集が組まれ, Black-Scholes モデルに関することがら, 確率解析に関することについて伊藤清氏がインタビューされる機会があった. その放送が 10 月,11 月にあると思われる. (伊藤氏は今年京都賞を受賞されたがその受賞式が 11 月 10 日にある. おそらくこれにあわせて放送されると思われる) その番組を見てその内容 (伊藤氏のインタビュー以外の部分も) を要約せよ.

参考文献

1. ファイナンス工学入門 第 I 部, 第 II 部木島正明 著, 日科技連

2. ファイナンスのための確率過程 森村英典・木島正明 著, 日科技連