無限次元空間上のシュレーディンガー作用素の準古典極限

会田茂樹
大阪大学大学院基礎工学研究科

1 Introduction

$L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ 上のシュレーディンガー作用素 $-H_{\lambda,U} = -\Delta + \lambda^2 U$ については $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N, dx)$ で下に有界かつ $\liminf_{x\to\infty} U(x) = c$ ならば $-H_{\lambda,U}$ の本質的スペクトルは $[\lambda^2 c, \infty)$ に含まれることが知られている．さらに，ポテンシャルに「非負値，ゼロ点が有限個, ゼロ点でのヘッシアンは非退化」などの条件をおけば, 正定数 C を固定するとき $[0, C\lambda)$ の間に含まれる離散固有値の漸近挙動がゼロ点の近傍でポテンシャル関数を 2 次関数で近似して得られる調和振動子のハミルトニアンの固有値を用いて $O(\lambda^{1/2})$ の誤差を除いて近似できることも示されている ([13])．ここでは，無限次元空間上のシュレーディンガー作用素についてこれらの結果 (主にスペクトルの下限の漸近挙動) に相当することを論じたい．無限次元空間上のシュレーディンガー作用素は，場の量子論などで自然に現れるが，無限次元空間にはルベーグ測度が存在しないのにどのように定義されるのであろうか．次の節で有限次元のシュレーディンガー作用素を無限次元でも定義できるように見直すことから始めて，[4, 5] と現在進行中の仕事に基づいて，結果を述べることにする．

2 定式化と線型空間での結果

まず $U(x) = \frac{1}{4}|x|^2 + V(x)$ のように書けているとしよう．$\varphi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/4} \exp\left(-\frac{1}{4}|x|^2\right) dx$ とおき, ガウス測度 $d\mu(x) = \varphi(x)^2 dx$ を考える．$L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ 上のユニタリ変換 $S_\lambda f(x) = \lambda^{N/4} f(\lambda^{1/2} x)$ と $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ から $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ へのユニタリ変換 $M_\varphi f(x) = \varphi(x) f(x)$ を用いて, $-H_{\lambda,U}$ を $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ 上の作用素に変換すると

$$\lambda^{-1}\left(M_\varphi^{-1} S_\lambda^{-1} \left(-H_{\lambda,U}\right) S_\lambda M_\varphi\right) = -L + \lambda V(\lambda^{-1/2} x) + \frac{N}{2}$$

を得る．ここに $-Lf(x) = -\Delta f(x) + (Df(x), x)$ であり，$L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ 上の対称な作用素で Ornstein-Uhlenbeck 作用素とよばれるものである．$-L$ は $-L = D_\mu^* D$ の表示を持つ．ここで，D_μ^* は $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ 上の微分 D の随伴作用素である．測度 μ や作用素 $-L$ は $N \to \infty$ でも意味をもつものであり, 無限次元のときは number operator とよばれ，確率論，場の量子論で重要な作用素である．したがって，$N \to \infty$ で測度の定義されてい

る空間 B の $L^2(B,\mu)$ 上でシュレーディンガー型作用素 $-L+\lambda V(\lambda^{-1/2}x)$ を考え,$\lambda\to\infty$ でのスペクトルの挙動の研究を行うことは、有限次元空間のシュレーディンガー作用素の研究の自然な一般化であり, 物理的にも意味をもつことになる. 実際、新井氏はこの形で $P(\phi)$ 型の Hamiltonian の partition function の準古典極限の研究を行った. ただし, 後でリーマン多様体上の L^2 空間で定義されたシュレーディンガー型作用素を考えるときは, 空間上の変換 $x\to\lambda^{-1/2}x$ が定義されないためここでは，次のような $-H_{\lambda,U}$ とユニタリ同値な作用素を考える．$\varphi_\lambda(x)=(\frac{\lambda}{2\pi})^{N/4}\exp\left(-\frac{\lambda}{4}|x|^2\right)$ とおき，共分散行列 $\lambda^{-1}I$ のガウス測度 $d\mu_\lambda(x)=\varphi_\lambda(x)^2dx$ を定義する．$L^2(\mathbb{R}^N,d\mu)$ から $L^2(\mathbb{R}^N,d\mu_\lambda)$ へのユニタリ変換 $f(x)\to f(\lambda^{1/2}x)$ のもと $-L+\lambda V(\lambda^{-1/2}x)$ は $\lambda^{-1}(-L_\lambda+\lambda^2V(x))$ に変換される．ここで, $-L_\lambda=D^*_{\mu_\lambda}D=-\Delta+\lambda x\cdot D$ である．$-L_\lambda$ は定義されるヒルベルト空間がパラメータ λ とともに動き気持ちが悪いが，ここでは，この $L^2(\mathbb{R}^N,d\mu_\lambda)$ 上のシュレーディンガー型作用素 $-L_\lambda+\lambda^2V$ の無限次元版を考える．

定義 2.1 (B,H,μ) を抽象 Wiener 空間とする．すなわち，

(i) H, B はそれぞれ可分ヒルベルト空間，可分バナッハ空間で H は B に連続かつ稠密に埋め込まれている．

(ii) μ は B 上の確率測度であり，任意の $\varphi\in B^*$ に対して

$$\int_B e^{\sqrt{-1}\varphi(w)}d\mu(w)=e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|_H^2}$$

をみたす．ここで, $B^*\subset H^*$ であるが, リースの定理による同一視 $H^*\simeq H$ のもと $B^*\subset H$ と見ている．

$\lambda>0$ に対して, B 上の新たな測度を $\mu_\lambda(E)=\mu\left(\sqrt{\lambda}E\right)$ $(E\subset B)$ と定める．A を H 上の strictly positive な自己共役作用素とする．すなわち $\inf\sigma(A)>0$ を仮定する ($\sigma(A)=A$ のスペクトル集合). $c_A=(\inf\sigma(A))^2$ と書く．滑らかな cylindrical function$f(w)=F(\varphi_1(w),\dots,\varphi_n(w))$ $(F\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),\varphi_i\in B^*\cap_{n\in\mathbb{N}}D(A^n))$ 全体を $\mathfrak{F}C_A^\infty(B)$ と書く．上記のように表されている $f\in\mathfrak{F}C_A^\infty(B)$ に対して微分を $Df(w)=\sum_{i=1}^n\partial_iF(w)\varphi_i\in H$ と定義する．ただし，$\varphi_i\in H$ と見直している．なお $\partial_iF(w)$ は i 座標に関する偏微分である．さらに $ADf(w)=\sum_{i=1}^n\partial_iF(w)A\varphi_i$ と定義する．$L^2(B,d\mu_\lambda)$ 上の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}_{\lambda,A}(f,f)=\int_B\|ADf(w)\|_H^2d\mu_\lambda(w)$ の生成作用素を $-L_{\lambda,A}$ と書く．V を B 上の実数値可測関数で $V\in\cap_{\lambda>0}L^1(B,\mu_\lambda)$ と仮定する．すべての $\lambda>0$ に対して対称形式 $\mathcal{E}_{\lambda,A,V}(f,f)=\mathcal{E}_{\lambda,A}(f,f)+\int_B\lambda^2V(w)f(w)^2d\mu_\lambda(w)$ $(f\in\mathfrak{F}C_A^\infty(B))$ が下に有界になるとする. この対称形式の最小閉拡大の生成作用素を $-L_{\lambda,A,V}$ と書く．これが我々のシュレーディンガー作用素である．$E_0(\lambda,A,V)=\inf\sigma(-L_{\lambda,A,V})$ と書こう.

注意 2.2 (1) $\lambda\neq\lambda'$ のとき μ_λ と $\mu_{\lambda'}$ は互いに特異である．したがって，λ を固定すると, $-L_{\lambda,A,V}$ は μ_λ-a.e. に定義された V に対して定義可能だが, すべての λ について定義するときは, すべての測度 μ_λ の台上で V が定義されている必要がある.

(2) 測度 μ_λ は形式的にヒルベルト空間 H 上の" ルベーグ測度" dh を用いて

$$d\mu_\lambda(h) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\dim H/2} e^{-\frac{\lambda}{2}\|h\|_H^2} dh$$

と書かれる測度で H の中で定義されないため B にはみだして定義されるガウス測度である．抽象 Wiener 空間の定義で本質的なのはヒルベルト空間 H で B は色々な取りかたがあり得る．実際 H 上の 0 を固有値に持たない非負の trace class self-adjoint operator S に対して H をノルム $\|\sqrt{S}h\|_H^2$ で完備化したヒルベルト空間 B は典型的な一例である．逆に B がヒルベルト空間のときは必ずこのように構成される．このことは後で用いる．さらに, 上記の表示から，形式的に $-L_{\lambda,A,V}$ は $L^2(H,dh)$ 上のシュレーディンガー作用素 $(AD)^*AD + \lambda^2 U(h) - \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{tr}A^2$ とユニタリ同値であると言える．ただし，$(AD)^*$ は $L^2(H,dh)$ での AD の随伴作用素，$U(h) = \frac{1}{4}\|Ah\|_H^2 + V(h)$ である．
(3) $A = (m^2 - \Delta)^{1/4}$ とし，H を内積 $(h_1,h_2)_H = (Ah_1, Ah_2)_{L^2(\mathbb{R}^d,dx)}$ を持つヒルベルト空間とすると，$-L_{\lambda,A}$ は time zero free field の Hamiltonian である．すなわち, H の dual space H^*(内積 $(h_1,h_2)_{H^*} = \left((m^2-\Delta)^{-1/2}h_1, h_2\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ でのヒルベルト空間) 上の作用素 $C = (m^2 - \Delta)^{1/2}$ の第二量子化のハミルトニアンと一致する．B は緩増加 Schwartz 超関数の空間のヒルベルト空間の位相をもつある部分空間に実現できる．$d = 1$ のとき (時空 2 次元のとき) は，多項式 $P(u)$ に対して，繰り込みを用いて定義される関数 $V(w) = \int_{\mathbb{R}} :P(w(x)):_\lambda g(x)dx$ $(g \in C_0^\infty(\mathbb{R}))$ をポテンシャルとしてもつシュレーディンガー型作用素で定義されるハミルトニアン $-L_{\lambda,A,V}$ が定義可能である．この作用素の準古典解析は興味あるものと思われる．

有限次元の場合と同様, 次のような条件を考える．

仮定 2.3 (A1) $U(h) = \frac{1}{4}\|Ah\|_H^2 + V(h)$ $(h \in D(A))$ は非負値関数で, ゼロ点集合

$$N = \{h \in D(A) \mid U(h) = 0\} = \{h_1, \ldots, h_n\}$$

は有限集合.
(A2) $V(h)$ は H 上 C^2 関数で，$U(h)$ のゼロ点 h_i でのヘッシアン $\frac{1}{2}D^2U(h_i) = \frac{1}{4}A^2 + K_i$ $(K_i = \frac{1}{2}D^2V(h_i))$ はすべて strictly positive な作用素.

A が有界な時，次の定理が成立する．これは，[4] の結果 $(A = I_H)$ の拡張である．

定理 2.4 B をヒルベルト空間, A を有界作用素とする．(A1), (A2) を仮定する．さらに V は B 上の C^3 関数とし，次を仮定する．
(A3) $p > 1$ が存在して $\displaystyle\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \log \int_B e^{-\frac{2p\lambda}{c_A}V(w)} d\mu_\lambda(w) < \infty$,
(A4) 任意の $R > 0$ に対して，$\sup\left\{\sum_{i=0}^3 \|D^iV(w)\| \mid \|w\|_B \le R\right\} < \infty$.

このとき,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{E_0(\lambda,A,V)}{\lambda}=\min_{1\le i\le n}e(A,K_i).$$

ここで $e(A,K_i):=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sqrt{A^4+4AK_iA}-A^2\right)$

注意 2.5 (1) $V\in C^2(B)$ だから K_i は trace class operator である．A を strictly positive な self-adjoint operator (有界である必要はない)，K を trace class self-adjoint operator とし，$A+K$ も strictly positive とする．このとき $\sqrt{A+K}-\sqrt{A}$ も trace class operator となる．
(2) $e(A,K_i)$ は 2 次のポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素の固有値である．すなわち，$\lambda e(A,K_i)=E_0\left(\lambda,A,(K_iw,w)\right)=\lambda E_0(1,A,(K_iw,w))$.
(3) (A3) の仮定の中の定数 c_A は A のスペクトル集合の下限の 2 乗である．(A3) と V の連続性 (もうすこし緩くてもよいが) から $\lim_{\|h\|_H\to\infty}\left\{\frac{c_A}{4}\|h\|_H^2+V(h)\right\}=+\infty$ が出る．

この定理の証明について述べよう．左辺の極限の上からの評価はよくなされるようにポテンシャル (K_iw,w) を持つシュレーディンガー作用素の (近似) グランドステイトに $-L_{\lambda,A,V}$ を作用させて，$E_0(\lambda,A,V)\le\lambda\min_{1\le i\le n}e(A,K_i)+O(\lambda^{1/2})$ を示すことにより得られる．下からの評価は A がある Hilbert-Schmidt operator T を用いて $A=I_H+T$ と書ける場合は，より簡単に示せる (実はこのときは，B はヒルベルト空間と仮定する必要は無い)．一般の場合はこの形の作用素で A を下から近似して証明することになる．下からの評価の証明をこの簡単な場合に説明しよう．$\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を原点の近傍で 1, $0\le\chi(x)\le 1$ $(x\in\mathbb{R})$ となるコンパクトサポートを持つ関数とする．R を十分大きい正数とし $\chi_i(w)=\chi\left(R\|w-h_i\|_B^2\right)$ $(1\le i\le n)$, $\chi_0(w)=\sqrt{1-\sum_{i=1}^n\chi_i(w)^2}$ とおく．次の補題から定理 2.4 が直ちに従う．すでに述べたように B がヒルベルト空間のとき，0 を固有値に持たない non-negative trace class self-adjoint operator S が存在して $\|x\|_B=\|\sqrt{S}x\|_H$ $(x\in H)$ となることを注意しておく．以下の (2) で現れている S はこの作用素である．

補題 2.6 定理 2.4 の仮定をおく．以下の定数 C は λ に依存しない正定数である．
(1)

$$\mathcal{E}_{\lambda,A,V}(f,f)=\sum_{i=0}^n\mathcal{E}_{\lambda,A,V}(f\chi_i,f\chi_i)-\sum_{i=0}^n\int_B\|AD\chi_i(w)\|_H^2f(w)^2d\mu_{\lambda(w)}. \qquad (2.1)$$

さらにすべての i について $\|AD\chi_i(w)\|_H^2\le CR$ μ_λ-*a.e.* w.
(2) $1\le i\le n$ のとき

$$\mathcal{E}_{\lambda,A,V}(f\chi_i,f\chi_i)\ \ge\ \lambda e(A,K_i-CR^{-1/2}S)\|f\chi_i\|_{L^2(\mu_\lambda)}^2. \qquad (2.2)$$

また $\lim_{R\to\infty}e(A,K_i-CR^{-1/2}S)=e(A,K_i)$.
(3)

$$\mathcal{E}_{\lambda,A,V}(f\chi_0,f\chi_0)\ \ge\ C\lambda^2\|f\chi_0\|_{L^2(\mu_\lambda)}^2. \qquad (2.3)$$

(2.1) はしばしばIMS localization formulaと呼ばれ，この種の評価でよく使われるものである．(2) はVを$w=h_i$でテイラー展開して3次の項を$\|D^3V(h_0+\theta(w-h_i))((w-h_i)^{\otimes 3})\| \le C\|w-h_i\|_B^3$と評価して得られる．

(3) は下にあげるいわゆるNGS(=Nelson, Glimm, Segal) 評価 ([18, 33]) の系 2.8 と大偏差原理を用いて示される．

定理 2.7 (NGS 評価) 確率空間$(X,\mathcal{F},m)$のL^2空間$L^2(X,m)$上の対称閉形式$\mathcal{E}(f,f)$がその定義域で対数ソボレフ不等式

$$\int_X f(x)^2 \log\left(f(x)^2/\|f\|^2_{L^2(X,m)}\right) dm(x) \le \alpha\mathcal{E}(f,f) \tag{2.4}$$

を満たすとする．このとき任意の有界可測関数Vに対して

$$\mathcal{E}(f,f) + \int_X V(w)f(w)^2 dm(w) \ge -\frac{1}{\alpha}\log\left(\int_X e^{-\alpha V(w)}\right)\|f\|^2_{L^2(X,m)}. \tag{2.5}$$

(B,H,μ)で$\mathcal{E}_{\lambda,I}(f,f)$に対して，対数ソボレフ不等式が$\alpha=\frac{2}{\lambda}$で成立する事から，次を得る．

系 2.8 (1) $f\in \mathrm{D}\left(\mathcal{E}_\lambda\right)$に対して，

$$E_0(\lambda,A,V) \ge -\frac{\lambda c_A}{2}\log\left(\int_B \exp\left(-\frac{2\lambda}{c_A}V\right)d\mu_\lambda(w)\right). \tag{2.6}$$

(2) *Hilbert-Schmidt operator* Tが存在して，$A=I+T$と書けるとする．このとき，

$$\begin{aligned} & E_0(\lambda,A,V) \\ & \quad \ge -\frac{\lambda}{2}\log\left\{\int_B \exp\left(-2\lambda V(w) - \lambda : (Tw,w) :_\lambda - \frac{\lambda}{2}\|Tw\|_H^2\right)d\mu_\lambda(w)\right\} \\ & \qquad + \frac{\lambda}{2}\log\det{}_{(2)}(I_H+T) - \frac{\lambda}{2}\mathrm{tr}\left(T^2\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.7) において$:(Tw,w):_\lambda$は有限次元への射影作用素$P_n\uparrow I_H$を用いて$:(Tw,w):_\lambda = \lim_{n\to\infty}\left\{(P_nTP_nw,w)-\frac{1}{\lambda}\mathrm{tr}P_nTP_n\right\}$と定義される．$\det{}_{(2)}$はCarleman-Fredholm determinantである．(3) の証明を述べよう．$\rho(w)$をUのゼロ点集合のBの位相での近傍で0, その外側で1になるB上の連続関数とする．ただし$\{w \mid \chi_0(w)\neq 0\}\subset\{w \mid \rho(w)=1\}$となるように取る．$\varepsilon$を十分小さい正数とし，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\lambda,A,V}(f\chi_0,f\chi_0) &= \mathcal{E}_{\lambda,A,V-\varepsilon\rho}(f\chi_0,f\chi_0) + \int_B \varepsilon\lambda^2\rho(w)f(w)^2\chi_0(w)^2 d\mu_\lambda(w) \\ &= \mathcal{E}_{\lambda,A,V-\varepsilon\rho}(f\chi_0,f\chi_0) + \int_B \varepsilon\lambda^2 f(w)^2\chi_0(w)^2 d\mu_\lambda(w). \end{aligned} \tag{2.8}$$

この右辺の第1項を評価すれば良い．ここで再びIMS localization formulaを用いて十分大きなR'を取り，評価を有限な範囲の方$\|w\|_B\le R'$と無限遠を含む方$\|w\|_B\ge R'$に分けて行う．すなわち，

(i) 有限の範囲にサポートを持つ方に対しては, (2.7) の下からの評価式を適用し，大偏差原理を用いる．ε が十分小さければ，この項は $-C\lambda$ のオーダーで下から押さえられる．

(ii) 遠方の部分にサポートを持つ方に対しては，(2.6) と大偏差原理を用いる．R' を十分大きくしていれば，(A3) の仮定からやはり $-C\lambda$ のオーダーで押さえられる．

さて，一般の有界作用素のときは，(i) の部分の評価で直接 (2.7) は適用できない．少し説明しよう．T が Hilbert-Schmidt operator ならば $A^{-1}w$, $e^{\mathrm{tr}(A^2-I)}(\det A)^{-2}$ は有限な量として意味が付き，(2.7) の右辺は

$$-\frac{\lambda}{2}\log\left(\int_B \exp\left(-2\lambda V(A^{-1}w)\right)d\mu_\lambda(w)\right)-\frac{\lambda}{2}\log\left(e^{\mathrm{tr}(A^2-I)}(\det A)^{-2}\right)$$

と書き直せる．A^{-1} が H 上の有界線形作用素であれば，$A^{-1}w$ の項は意味が付き，例えば V が下に有界な連続関数ならば $V(A^{-1}w)$ の積分の部分は有限である．しかし，一般には $e^{\mathrm{tr}(A^2-I)}(\det A)^{-2}=+\infty$ となり意味の無い評価になってしまうのである．(i) を示すには, A を $I+$ Hilbert-Schmidt operator の形の作用素 A_n で $\|Ah\|_H \geq \|A_nh\|_H$ $(\forall h\in H)$ を満たす形で下から近似して任意の $\varepsilon>0$, $R>0$ に対して

$$\inf\left\{\frac{1}{4}\|A_nh\|_H^2+V(h)\mid h\in U_\varepsilon(N)^c, \|h\|_B\leq R\right\}>0 \tag{2.9}$$

を示し，(2.7) を適用すればよい．$U_\varepsilon(N)$ はゼロ点の B の位相での ε-近傍を表している．実は，この部分は A が非有界であっても成立するが，補題 2.6 (1) のように $D\chi_i$ が A の定義域に入るかどうかは自明では無いのである．

このことも考慮して A がレゾルベントがコンパクト作用素になるような非有界作用素の時の結果を述べる．この定理の仮定は強すぎて $P(\phi)$ 型のモデルを残念ながらカバーできてはいない.

定理 2.9 $\gamma_0>1$ が存在し，$A^{-\gamma_0}$ が H 上の *Hilbert-Schmidt operator* になるとする．$\gamma\geq 1+\gamma_0$ とし B を内積 $(h_1,h_2)_B=(A^{-\gamma}h_1,A^{-\gamma}h_2)_H$ で H を完備化したヒルベルト空間とし，(A1),(A2), (A4) を仮定する．さらに，次の (A3)' を仮定する．
(A3)' 十分大きな p について $\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\log\int_B e^{-p\lambda V(w)}d\mu_\lambda(w)<\infty.$

このとき，AK_iA は *trace class operator* であり，定理 2.4 と同じ漸近挙動が成立する．

以下，幾つか注意を述べて, 線型空間での結果の説明を終えることにしよう．
(1) 最小固有値より大きい固有値について

Simon and Hoegh-Krohn [33] により $e^{-V}\in\cap_{p>1}L^p(B,d\mu_\lambda)$ のとき $[E_0(\lambda,A,V),E_0(\lambda,A,V)+\lambda c_A)$ には離散固有値のみしかないことが知られている．逆に $A=I$ の場合を考えればわかるように，$E_0(\lambda,A,V)+\lambda c_A$ は本質的スペクトルになりえる．従って，今回考えている

モデルについても $0 < C < c_A$ なる C について $[0, C\lambda)$ の範囲の固有値があればその漸近挙動が有限次元の場合と同様に得られることが期待される．$A = I$ の時は，これは正しそうである．

(2) トンネル効果

有限次元の場合，固有値の漸近挙動が $O(\lambda^{1/2})$ の誤差で得られると述べたが，ある場合，例えば $U(x) = U(-x)$ のような対称性があるときは最小固有値 $E_0(\lambda)$ と第二固有値 $E_1(\lambda)$ の差は指数オーダーで小さくなることが知られている．例えば，ゼロ点が二つ a, b で (A1), (A2), $\liminf_{x\to\infty} U(x) > 0$ を仮定すると

$$\lim_{\lambda\to\infty} -\lambda^{-1}\log\left(E_1(\lambda) - E_0(\lambda)\right) = d(a,b).$$

$d(a,b)$ は a, b 間の Agmon distance と呼ばれる距離 (内積 $(u,v) = \left(\sqrt{U(x)}u, v\right)_{\mathbb{R}^N}$ をリーマン計量とする距離) である ([13, 32, 22])．$A = I_H$ の場合，V に対するある条件の下 $\limsup_{\lambda\to\infty} -\lambda^{-1}\log(E_1(\lambda) - E_0(\lambda)) \le \tilde{d}(a,b)$ が示せる ([6])．この証明には定理 2.4 の下からの評価が使われる．$\tilde{d}(a,b)$ は U より小さい B 上の関数の平方根で定義される Agmon distance の上限として定義される正の量である．$\tilde{d}(a,b)$ と $\sqrt{U}$ で定義される Agmon distance が一致するかどうかは今のところわからない．また，下からの評価はまだ得ていない．

(3) 変数係数の場合

ここまで，A は固定された作用素としてきたが，変数係数の場合も扱うことができる．A を $A(w)$ に置き換えて得られるシュレーディンガー作用素のスペクトルの下限も $E_0(\lambda, A, V)$ と書こう．これまで，A は self-adjoint operator としてきたが，これはある意味で表記を単純化するためである．次節でリーマン多様体上の道の空間でシュレーディンガー作用素を考えるが，その結果との関連で下の定理では $A(w)$ に対称性を仮定しない．

定理 2.10 $A(w) = I_H + T(w)$, $T \in C_b^4(B, L(B, B^*))$ とする．正定数 c が存在して

$$\inf\{\|A(w)h\|_H \mid w \in B\} \ge c\|h\|^2 \quad \forall h \in H$$

を仮定する．さらに $U(h) = \frac{1}{4}\|A(h)h\|_H^2 + V(h)$ に対して (A1),(A2),(A3)',(A4) を仮定する．このとき，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{E_0(\lambda, A, V)}{\lambda} = \min_{1\le i\le n} E_i, \tag{2.10}$$

である．ただし

$$E_i = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sqrt{A(h_i)2D^2U(h_i)A(h_i)^*} - D\left(A(h)^*A(h)h\right)|_{h=h_i}\right]. \tag{2.11}$$

[5] では更に仮定を置いていたが，これは不要である．また，$L(B, B^*)$ の元は H 上の trace class operator になる．これも含めて上記の定理の仮定は非常に強いが，もっと弱い仮定でも成立すると思われる．

(4) 関連する研究について

ユークリッド空間でのシュレーディンガー作用素の最小固有値の空間次元，パラメータ λ に関する漸近挙動の研究も行われている ([20, 21, 29] およびその中の参考文献). $A = I$ のとき，2 節の表示式を見てもわかるように, 我々は，$\frac{N}{2}\lambda$ という次元とともに無限大に発散する項を引いた作用素を見ているが, 彼らはこれも含めての漸近挙動を調べている．彼らの作用素は $P(\phi)$ 型の作用素を格子近似して出てくる作用素と見ることができる.

3 リーマン多様体の道の空間上のシュレーディンガー作用素 (I)

(M, g) を d 次元コンパクトリーマン多様体とし，一つの点 m_0 を取り固定する．連続なパス空間

$$P_{m_0}(M) \quad = \quad C([0,1] \to M \mid \gamma(0) = m_0) \tag{3.1}$$

を考える．この上で定義される Ornstein-Uhlenbeck 型の作用素にポテンシャル関数がついたシュレーディンガー型作用素を考え，その準古典極限を考察する．このような曲がった無限次元の空間で準古典極限の研究をする動機は Witten が [34] でモース不等式を示すために行った解析の無限次元版を考えたいことにある．この論文での Witten の議論は Floer[16] などにより無限次元で行われているが，シュレーディンガー作用素 (超対称ハミルトニアン) を用いたものではない．また同様なことをやろうと思ってそこでの’ モース関数’ を用いて経路積分で形式的に定義される測度を考えようとしても，それは簡単に定式化できるものではない．しかし, パスのエネルギー関数は自然なモース関数でそれによる測度は厳密に定義できるので，まず (というかこれでも十分意味があると思われるので) こちらで議論をしてみよう，ということである．(滑らかなパス空間を考えれば)$P_{m_0}(M)$ の位相はトリヴィアルなので，$\gamma(1) = m_1$ のように条件つけた空間の方が興味があると思われるが，それは次の節で論ずる.

まず，$P_{m_0}(M)$ 上での結果と対比するため，コンパクトリーマン多様体 X 上のシュレーディンガー作用素に対する結果を書いておこう.

定理 3.1 E, V を X 上の滑らかな関数とする．ν_λ を $e^{-\lambda E(x)}dx$ を正規化して得られる X 上の確率測度とする．dx は X の体積要素である．∇ を *Levi-Civita* 共変微分とする.

$$\mathcal{E}_\lambda(f, f) \quad = \quad \int_X |\nabla f(x)|^2_{T_xM} d\mu_\lambda(x) \tag{3.2}$$

$$\mathcal{E}_{\lambda,V}(f, f) \quad = \quad \mathcal{E}_\lambda(f, f) + \lambda^2 \int_X V(x) f(x)^2 d\mu_\lambda(x) \tag{3.3}$$

$$E_0(\lambda, V) \quad = \quad \inf \left\{ \mathcal{E}_{\lambda,V}(f, f) \;\middle|\; \|f\|_{L^2(\mu_\lambda)} = 1 \right\}. \tag{3.4}$$

とおく．次を仮定する：

(A1) $U(x) = \frac{|\nabla E(x)|^2}{4} + V(x)$ は非負値関数で有限個のゼロ点 $\{c_1, \ldots, c_n\}$ のみを持つ.

(A2) U の c_i $(1 \leq i \leq n)$ でのヘッシアンは非退化.

このとき,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{E_0(\lambda, V)}{\lambda} = \min_{1\leq i\leq n} \mathrm{tr}\left\{\sqrt{\frac{(\nabla^2 U)(c_i)}{2}} - \frac{\nabla^2 E}{2}(c_i)\right\}. \tag{3.5}$$

$P_{m_0}(M)$ での結果は上の定理の自然な一般化と見れるが，そのためには，$P_{m_0}(M)$ でのリーマン計量，Levi-Civita 接続，' 体積要素', 関数 E が何か，形式的にでも明らかにする必要がある.

そのため結果を述べる前に少し準備をしよう．$P_{m_0}(M)$ の中でパスのエネルギー $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot\gamma(t)|^2 dt$ が有限なもの全体 $P_{m_0,H}(M)$ はヒルベルト多様体である．$\gamma \in P_{m_0,H}(M)$ に沿うベクトル場 $h(t) \in T_{\gamma(t)}M$ で $h(0) = 0$ をみたすもの全体が γ の接空間となるが，Levi-Civita 平行移動 $\tau(\gamma)_t : T_{m_0}M \to T_{\gamma(t)}M$ を用いてこの空間を $[0,1]$ から $T_{m_0}(M)$ への写像の空間と同一視できる．さらに $T_{m_0}M$ の orthonormal frame $u_0 = \{e_1, \ldots, e_d\}$ を一つ取れば，$[0,1]$ から $\mathbb{R}^d$ への写像の空間と同一視できる．この写像の空間の部分空間で H^1 に属すパス全体 $H := H^1([0,1] \to \mathbb{R}^d|\ h(0) = 0)$ (内積は $(h_1, h_2)_H = \int_0^1 (\dot h_1(t), \dot h_2(t))dt$) を指定するとこれは，$P_{m_0,H}(M)$ に一つのリーマン計量を与えていることになる．この H は後で Wiener 空間 B を考えるとき，その Cameron-Martin 部分空間となるものである．このリーマン計量を H^1 リーマン計量と言う．H^1 の代わりに L^2-計量を考えることもできる．

さて，$P_{m_0}(M)$ に確率を導入しよう．Δ を (M, g) 上のラプラス作用素とし，拡散半群 $e^{\frac{t}{2\lambda}\Delta}$ に対応する m_0 からスタートする拡散過程 (ブラウン運動) の拡散測度を ν_λ と書く．測度 ν_λ は形式的な表示

$$d\nu_\lambda(\gamma) = Z_\lambda^{-1} \exp\left(-\lambda E(\gamma)\right) d\gamma$$

を持つ．$d\gamma$ は $P_{m_0}(M)$ 上のルベーグ測度である．ただし，このような表示とは違った表示 (このときは，指数の方にスカラー曲率の項も現れる) を導く傍証も Onsager-Machlup functional の研究, その他などである．この点について，Andersson-Driver [11] の研究は興味深い．彼らは，上にあげた $P_{m_0,H}(M)$ に H^1-リーマン計量が与えられているとき，$d\gamma$ はその計量による体積要素と考えられることを示した．正確に言うと時間区間 $[0,1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ を考え $\{\gamma(t) \mid t_i \leq t_{i+1}\}$ が測地線になっている曲線全体は $P_{m_0,H}(M)$ の有限次元部分多様体であり，分割を細かくすると $P_{m_0,H}(M)$ を近似すると考えられる．この部分多様体に H^1 計量から誘導される計量を近似する計量を考え，その体積要素に $e^{-E(\gamma)}$ のウエイトがついた確率測度を考えると，これは ν_1 に弱収束することを示したのである．(彼らは L^2 距離のときは，極限はスカラー曲率に依存する汎関数が指数の肩にのった密度関数を持つ ν_1 に絶対連続な測度であることも示している．)

この事から，$(P_{m_0}(M), \nu_\lambda)$ 上で H^1 計量によるグラジエント作用素を用いて定義される Dirichlet 形式を考え, その生成作用素で定まるシュレーディンガー作用素を考えるとき, 定理 3.1 の一般化が得られるのではないかと期待される．結果を正確に述べるため，グラジエント作用素, Dirichlet 形式を定義する．

定義 3.2 $f(\gamma) = F(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n))$ の形の滑らかな cylindrical function について

$$(\nabla f)(\gamma)_t = \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla F(\gamma)}_i t \wedge t_i$$

と定義する．ここで $\overline{\nabla F(\gamma)}_i = u_0^{-1}\tau(\gamma)_{t_i}^{-1}\nabla_i F(\gamma)$. 滑らかな cylindrical function の空間で定義された対称形式

$$\mathcal{E}_\lambda(f,f) = \int_{P_{m_0}(M)} \|Df(\gamma)\|_H^2 d\nu_\lambda(\gamma)$$

の最小閉拡大をやはり $\mathcal{E}_\lambda$, 生成作用素を $-L_\lambda$ と書く．$\mathcal{E}_{\lambda,V}$ も定義 2.1 の $\mathcal{E}_{\lambda,A,V}$ と同様に定める．その生成作用素がシュレーディンガー作用素 $-L_{\lambda,V}$ である．

形式的には $-L_{\lambda,V}$ は $L^2(P_{m_0}(M), d\gamma)$ 上のラプラス作用素 Δ を用いて定義されるシュレーディンガー作用素 $-\Delta + \lambda^2\left(\frac{1}{4}\|\nabla E(\gamma)\|^2_{T_\gamma P_{m_0}(M)} + V(\gamma)\right) - \frac{\lambda}{2}\Delta E(\gamma)$ とユニタリ同値である．これまでと同様な仮定を考える．

仮定 3.3 (H1) $U(c) = \frac{1}{2}E(c) + V(c) \quad (c \in P_{m_0,H}(M))$ は非負値関数でゼロ点集合は有限集合 $\{c_1, \ldots, c_n\}$ である．

(H2) U の c_i $(1 \le i \le n)$ におけるヘッシアンは非退化.

(H3) V は $P_{m_0}(M)$ 上の次の意味で C^3 級の関数である．M の $\mathbb{R}^L$ への滑らかな埋め込みを一つ取る．この埋め込みにより $P_{m_0}(M)$ は $C([0,1] \to \mathbb{R}^L)$ の閉部分集合になる．V はバナッハ空間 $C([0,1] \to \mathbb{R}^L)$ 上の *Fréchet* の意味での C^3 関数の制限であるとする．さらにすべての λ について $V \in L^1(\mu_\lambda)$ かつある $q > 2$ が存在して

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \log\left(\int_{P_{m_0}(M)} e^{-q\lambda V} d\mu_\lambda(\gamma)\right) < +\infty \tag{3.6}$$

とする．

[5] では $q > 1$ としているが，これは書き間違いです．上記の V が $C([0,1] \to \mathbb{R}^L)$ の上の C^3 関数から来ているというのは特殊な気がするが，証明を見ればラフパス解析の意味で C^3 級 (この用語は一般的な物では無い) であればよいことがわかる．$X = P_{m_0}(M)$ のとき，これまで述べてきた結果と違い，極限の表示に trace class に属さない作用素 (具体的には Volterra 型の積分作用素) が現れる．それに意味を付けるため，次の定義をおく．H は先ほど定義した H^1 空間である．

定義 3.4 N を自然数とする．H 上の射影作用素 P_N を次のように定める．

(i) $(P_N h)\left(\frac{k}{2^N}\right) = h\left(\frac{k}{2^N}\right)$ $(0 \le k \le 2^N, k \in \mathbb{Z})$.

(ii) $P_N h$ は各区間 $\left[\frac{k-1}{2^N}, \frac{k}{2^N}\right]$ で線形

H 上の有界線形作用素 T に対して極限が存在するとき,

$$\tilde{\mathrm{tr}}\, T = \lim_{N\to\infty} \mathrm{tr}\,(P_N T P_N)\,. \tag{3.7}$$

と定義する.

$P_N h$ は h の dyadic polygonal approximation と呼ばれる. $\tilde{\mathrm{tr}}$ が決まる例として次がある ([5]). $a(t), b(t)$ $(0 \le t \le 1)$ を $d\times d$ 行列値可測写像とする. H 上の作用素

$$(T_{a,b}h)(t) = \int_0^t a(s)\left(\int_0^s b(u)\dot{h}(u)du\right)ds. \tag{3.8}$$

は一般には trace class operator では無いが, $\tilde{\mathrm{tr}}\ T_{a,b} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{tr}(a(t)b(t))dt$.

下記の $\tilde{\mathrm{tr}}$ について注意しておく必要がある. もし作用素 K が trace class に属せば, 任意の可逆変換 T に対して $\mathrm{tr}(TKT^{-1}) = \mathrm{tr}K$ だから座標系の取り方によらず, trace は確定する. しかし今の場合は trace class に入っていない作用素を扱っているので, 座標系を固定するなり, あるクラスに座標変換のクラスを固定する (例えば $I+$ Hilbert-Schmidt の形の微分が現れる変換群のクラスに制限するなど) 必要がある. 下記の例では, $P_{m_0,H}(M)$ 上の Levi-Civita 平行移動を用いて $P_{m_0,H}(M)$ 上の bundle は自明化することができるので, $P_{m_0,H}(M)$ 上の関数の 2 階共変微分は H 上の作用素になる. この作用素の $\tilde{\mathrm{tr}}$ が下記の trace である.

定理 3.5 (H1)-(H3) を仮定する. このとき,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{E_0(\lambda, V)}{\lambda} = \min_{1\le i\le n} E_i. \tag{3.9}$$

ここで

$$E_i = \tilde{\mathrm{tr}}\left\{\sqrt{\frac{(\nabla^2 U)(c_i)}{2}} - \frac{\nabla^2 E}{2}(c_i)\right\}. \tag{3.10}$$

∇^2 は $P_{m_0,H}(M)$ での *Levi-Civita* 共変微分を表す.

この定理は, $P_{m_0}(M)$ 上の問題を Ito map を用いて Wiener 空間 B 上のシュレーディンガー作用素の問題に変換することにより証明される. 今の場合 (抽象)Wiener 空間の三つ組は, $H = H^1([0,1]\to\mathbb{R}^d \mid h(0)=0)$, $B = C([0,1]\to\mathbb{R}^d)$, $\mu =$ Wiener measure である.

セミマルチンゲール $\gamma(t)$ の $\mathbb{R}^d$ への anti-development $w(t) = \int_0^t u_0^{-1}\tau(\gamma)_s^{-1}\circ d\gamma(s)$ により得られる確率過程は $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動でその測度は μ の分散を変更して得られる μ_λ と一致する. さらに, この写像で $P_{m_0}(M)$ 上の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}_\lambda$, 対称形式 $\mathcal{E}_{\lambda,V}$ は次の形の対称形式に変換される. $f \in \mathfrak{F}C_I^\infty(B)$ のとき, f は $\mathcal{E}_\lambda$ の定義域に入り,

$$\mathcal{E}_\lambda(f,f) = \int_B \|A(w)Df(w)\|_H^2 d\mu_\lambda(w) \tag{3.11}$$

$$\mathcal{E}_{\lambda,V}(f,f) = \int_B \|A(w)Df(w)\|_H^2 d\mu_\lambda(w) + \lambda^2\int_B V(\gamma(w))f(w)^2 d\mu_\lambda(w). \tag{3.12}$$

ここで $f(w)=F(w(t_1),\dots,w(t_n)))$ の形の時，$Df(w)_t=\sum_i \partial_i F(w)t\wedge t_i$, $Df(w)\in B^*\subset H$ である．さらに,

$$
\begin{aligned}
(A(w)\varphi)(t) &= \varphi(t)+(T(w)\varphi)(t) && (3.13)\\
(T(w)\varphi)(t) &= \int_0^t \left\{\int_s^1\int_u^1 \overline{R(\gamma)}_u(\dot\varphi(r),dw(r))\circ dw(u)\right\}ds \quad (0\le t\le 1). && (3.14)
\end{aligned}
$$

$\overline{R(\gamma)}_t$ はリーマンの曲率テンソル R のパスに沿う自明化である:

$$
\overline{R(\gamma)}_t(v_1,v_2)v_3=u_0^{-1}\tau(\gamma)_t^{-1}R(\gamma(t))(\tau(\gamma)_t u_0 v_1,\tau(\gamma)_t u_0 v_2)(\tau(\gamma)_t u_0 v_3).
$$

適当なバージョンを取ることにより $T(w)\in L(B^*,H)$ であることがわかるので，$A(w)Df(w)$ は意味を持つ．また $\mathfrak{F}C_I^\infty(B)$ を定義域として，(3.11), (3.12) の最小閉拡大を取っても定義 3.2 の対称形式と同じ物が得られる．従って，問題は B 上の問題に帰着されたことになる．しかし，ブラウン運動のパスが有界変動ではないことから，$T(w)$ は H 上の有界作用素にはならない (したがってラプラス作用素のような非有界性とは性質が違う)．これは，anti-development map の微分が有界線形作用素にならないと言うことである．また，確率微分方程式の解はブラウン運動の汎関数として一様収束の位相などの通常の位相に関して連続ではないので，写像 $w\to T(w)\in L(B^*,H)$, $w\to V(\gamma(w))$ も連続では無い．この非有界性, 不連続性は非常に具合の悪い問題である．と言うのは,

(i) 2 節の証明を見てもわかるようにポテンシャル関数 $V(w)$ を 2 次関数で近似するとき，関数の滑らかさ，連続性を用いている,

(ii) 変数係数の場合は w が h_i に近い時, 評価 $\|A(w)Df(w)\|_H^2\ge(1-\varepsilon)\|A(h_i)Df(w)\|_H^2$ を使い定数係数の結果に帰着させるのは標準的な論法と思われる,

からである．しかしながら，確率微分方程式の解をブラウン運動の汎関数と見ると通常の位相で不連続であるにもかかわらず，大偏差原理、Malliavin 解析のように連続関数, 滑らかな関数と同じように扱える場合もあることも良く知られている．ここでは，(i),(ii) の問題をクリアするために，ラフパス解析とよばれるものを用いる ([26, 27])．ラフパス解析は Terry Lyons により始められた有界変動なパスをインプットとする通常の常微分方程式の理論をよりイレギュラーなパスをインプットとする場合に拡張した解析であり，それ自身は確率論とは関係なく定式化できる．それを確率微分方程式に適用すると，確率微分方程式の解は Brownian rough path の連続関数であることがわかるのである．上記 (i),(ii) はポテンシャルのゼロ点の近傍での解析に関係した問題であり，近傍の外側ではやはり NGS 評価を用いた手法が有効である．この部分の評価では (本質的には) ラフパス解析を用いる必要は無い．なお，NGS 評価は次の対数ソボレフ不等式から従う ([4, 10, 23])．

定理 3.6 適当な正定数 C が存在して，確率空間 $(P_{m_0}(M),\nu_\lambda)$ 上で対数ソボレフ不等式 (2.4) が $\alpha=\frac{2}{\lambda}\left(1+\frac{C}{\lambda}\right)$ で成立する．

ラフパス解析とは何か，どのような評価を使うかを簡単に説明する (今年の夏に開催される日本数学会季期研究集会で Lyons が話をされるので，興味ある方は参加をお薦めします).

ラフパス解析の主な定理は微分方程式の解の連続性定理である．$\sigma \in C_b^3(\mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n))$, $b \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^d$ 値有界変動連続なパス $x(t)$ $(0 \le t \le 1)$ に対して $X(t, x_0, x)$ を次の $\mathbb{R}^n$ 上の積分方程式の解とする．

$$X(t, z_0, x) \;=\; z_0 + \int_0^t \sigma\left(X(s, z_0, x)\right) dx(s) + \int_0^t b\left(X(t, z_0, x)\right) ds \tag{3.15}$$

写像 $x \to X(t, z_0, x)$ は有界変動ノルムに対して連続であるというのは想像できるであろう．確率微分方程式は x をブラウン運動 (あるいはより一般な確率過程) に置き換えたものだが, ブラウン運動のパスは有界変動では無いため、普通に考えては方程式に意味がつかないし，$x \to X(t, z_0, x)$ の連続性も意味が無い．そこで，上記の解の連続性を見直す事にする．そのため，有界変動ノルムより弱い位相を考える．

一般に $\Delta = \{(s,t) \mid 0 \le s \le t \le 1\}$ からノルム空間 V に値を取る写像 ϕ に対して, $\|\phi\|_p = \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n \|\phi(t_{i-1}, t_i)\|^p\right\}^{1/p}$ と p 次変動ノルムを定める．$D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ は全ての分割を動く．

例えば $\mathbb{R}^d$ 値のパス $x(t)$ に対して，$\phi(s,t) = x(t) - x(s)$ とおけば $p = 1$ のとき，これはパスの有界変動ノルムである．連続で p 次変動ノルム有限なパスを考えると p が小さい方がパスの正則性が高いことになる．今、興味があるのは $2 < p < 3$ のときである．

ここで，有界変動なパスに対して"smooth rough path" と呼ばれる「パスとそれの逐次積分のペア」を考える．$\mathbb{R}^d$ 値有界変動連続なパス $x(t)$ に対して，$\bar{x}_1(s,t) = x(t) - x(s)$, $\bar{x}_2(s,t) = \int_s^t (x(u) - x(s)) \otimes dx(u)$ $((s,t) \in \Delta)$ とおく．$\otimes$ はテンソル積を表す．それをまとめて $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ と書く．$\bar{x}$ は Δ から線型空間 $\mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\right)$ への連続写像のなすベクトル空間の元で，smooth rough path と呼ばれるものである．$\bar{x} - \bar{y}$ と書いたらこのベクトル空間の元としての差を表す．$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ に対して p-variation norm を $\|\bar{x}\|_p = \left\{\|\bar{x}_1\|_p^2 + \|\bar{x}_2\|_{p/2}\right\}^{1/2}$ と定める．

Terry Lyons は次の連続性定理を証明した．

定理 3.7 $R > 0$, $2 < p < 3$ とする．$\mathbb{R}^d$ 上の有界変動連続なパス x, y の *smooth rough path* $\bar{x}, \bar{y}$ が $\|\bar{x}\|_p \le R, \|\bar{y}\|_p \le R$ を満たすと仮定する．このとき R に依存した定数 $C(R)$ が存在して,

$$\|\overline{X(\cdot, z_0, x)} - \overline{X(\cdot, z_0, y)}\|_p \le C(R)\|\bar{x} - \bar{y}\|_p$$

また，ブラウン運動のパス $w(t)$ に対してその dyadic polygonal approximation $P_n w$ に対応する smooth rough path $\overline{P_n w}$ について $\Omega = \{w \in B \mid \overline{P_n w}$ は $\|\ \|_p$ の位相で極限がある $\}$ とおくと $\mu(\Omega) = 1$ も示されている．$w \in \Omega$ に対して $\bar{w}$ を自然に対応させることができ，この意味でブラウン運動のパスをラフパスの空間に埋め込むことができる．このようにして得られるラフパス全体を Brownian rough path とよぶ．

一方ほとんどすべての w について $X(\cdot, z_0, P_n w)$ は (3.15) の x をブラウン運動 w で置き換えたStratonovich 確率微分方程式の解に一様収束することが知られているので，$w \in \Omega$ の元に対しては確率微分方程式の解は逐次積分もこめた $\| \ \|_p$ の位相で連続であることが示されたことになる．

以上説明が長くなったが，一様収束の位相の代わりに Brownian rough path に対する p 次変動ノルムを用いて，(実際にはノルムを微分する必要があるので，より扱いやすいノルムを使う)2 節の議論を行うことになる．例えば，テイラー展開で 3 次の項を評価するときは，ラフパス解析で証明されている次の確率積分に関する評価を用いる．ただし，$R_{i,j}(t,w) = \overline{R(\gamma(w))_t}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ で ε_i は i 座標が 1 の $\mathbb{R}^d$ の単位ベクトルである．

補題 3.8 ある連続関数 C が存在して，$0 \le s \le t \le 1$ に対して

$$\left| \int_s^t R_{i,l}(u,w) \circ dw(u) \right| \le C(\|\bar{w}\|_p)\|\bar{w}\|_p \quad (3.16)$$

$$\left| \int_s^t \left(\int_s^u R_{i,l}(r,w) \circ dw(r) \right) \circ dw^l(u) \right| \le C(\|\bar{w}\|_p)\|\bar{w}\|_p^2 \quad (3.17)$$

$$\left| \int_s^t \left\{ \int_s^u \left(\int_s^r R_{i,l}(v,w) \circ dw(v) \right) \circ dw^l(r) \right\} \circ dw^j(u) \right| \le C(\|\bar{w}\|_p)\|\bar{w}\|_p^3, \quad (3.18)$$

(ii) の変数係数の問題に関しては，次の変形を用いる．

以下の補題で使われる記号を説明する．(3.14) の式で w を $h \in B^*$ に置き換えて得られる作用素を $A(h), T(h)$ と書く．$T(h)$ は trace class operator であることが示せる．また，$-L_{\lambda, A(w+h)}$ は $A(w)$ を $A(w+h)$ に置き換えた対称形式の生成作用素である．

補題 3.9 $h \in B^*$ とする．K を *Hilbert-Schmidt operator* とする．$\mathcal{E}_{\lambda, A(h), :(Kw,w):_\lambda}$ の最小固有値に対する固有関数を Ω とする．このとき，任意の $f \in \mathfrak{F}C_I^\infty(B)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\int_B \|A(w+h)Df(w)\|_H^2 d\mu_\lambda + \lambda^2 \int_B :(Kw,w):_\lambda f(w)^2 d\mu_\lambda \\
&\quad = \int_B \|A(w+h)D(f\Omega^{-1})(w)\|_H^2 \Omega^2(w) d\mu_\lambda + E_0(\lambda, A(h), :(Kw,w):_\lambda)\|f\|_{L^2(\mu_\lambda)}^2 \\
&\quad + \int_B \frac{L_{\lambda,A(h)}\Omega(w) - L_{\lambda,A(w+h)}\Omega(w)}{\Omega(w)} f(w)^2 d\mu_\lambda \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

さらに，K が良い性質を満たせば Ω の具体的な形とラフパス解析の評価を用いて

$$\left| \frac{L_{\lambda,A(h)}\Omega(w) - L_{\lambda,A(w+h)}\Omega(w)}{\Omega(w)} \right| \le \lambda^2 C(\|\bar{w}\|)\|\bar{w}\|^3 \qquad (3.20)$$

の評価が示せる．C はある連続関数である．これは $\bar{w}$ が小さいとき，定数係数の対称形式での下からの評価が可能であることを示している．

注意 3.10 定理 3.5 の E_i の具体的な形を述べておく．計算の過程では E_i は下に書いた形で出てくる．ただし，$K_i = \frac{1}{2}D^2\left(V(\gamma(h))\right)|_{h=h_i}$, D は H 上の微分, $\overline{\mathrm{Ric}(c_i)_s}$ は Ricci tensor の自明化である．

$$
\begin{aligned}
E_i &= \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{tr}}\left\{\sqrt{A(h_i)(I_H+4K_i)A(h_i)^*)}-I_H\right\} \\
&\quad +\frac{1}{4}\int_0^1\left(\overline{\mathrm{Ric}(c_i)_s}h_i(s),\dot{h}_i(s)\right)ds. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

一方定理 3.5 の E_i の $\tilde{\mathrm{tr}}$ の中身を具体的に計算すると

$$
\frac{1}{2}\sqrt{A(h_i)(I_H+4K_i)A(h_i)^*)}-\left(\frac{1}{2}I_H+\frac{1}{4}\left(S(c_i)+S(c_i)^*\right)\right) \qquad (3.22)
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
(S(c_i)\phi)(t) &= \int_0^t\overline{R(c_i)_s}(h_i(s),\phi(s))(\dot{h}_i(s))ds \qquad (3.23)\\
\tilde{\mathrm{tr}}S(c_i) &= -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\overline{\mathrm{Ric}(c_i)_s}h_i(s),\dot{h}_i(s)\right)ds. \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

従って，定理 3.5 の形で定理が成立する．また, 定理 2.10 の (2.11) が現在の場合も成立すると仮定すると曲率テンソルの反対称性から $T(h)h=0$ だから

$$
E_i=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sqrt{A(h_i)(I_H+4K_i)A(h_i)^*}-I_H-D(T(h)^*h)|_{h=h_i}\right]. \qquad (3.25)
$$

となるはずである．

$$
\tilde{\mathrm{tr}}D\left(T(h)^*h\right)|_{h=h_i}=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\overline{\mathrm{Ric}(c_i)}_sh_i(s),\dot{h}_i(s)\right)ds
$$

がわかるので，定理 3.5 は定理 2.10 から類推できる結果である．

4 リーマン多様体の道の空間上のシュレーディンガー作用素 (II)

前節では，$P_{m_0}(M)$ 上のシュレーディンガー作用素を扱ったが，ここでは，条件付ブラウン運動の測度が与えられた空間 $P_{m_0,m_1}(M)=\{\gamma\in P_{m_0}(M)\mid\gamma(1)=m_1\}$ 上の Ornstein-Uhlenbeck 作用素の準古典極限について述べる．この場合は $\gamma(1)=m_1$ という条件がついているため，ポテンシャル項をつけなくても，Ornstein-Uhlenbeck 作用素 $-L_\lambda$ 自身の準古典極限の問題ですでに興味あるものと思われる．というのは前節と同様，形式的に $-L_\lambda$ は $-\Delta+\frac{\lambda^2}{4}\|\nabla E(\gamma)\|^2_{T_\gamma P_{m_0,m_1}(M)}-\frac{\lambda}{2}\Delta E(\gamma)$ とユニタリ同値で $\nabla E(\gamma)$ のゼロ点は測地線全体の集合だからである．さらにゼロ点の集合もこの場合は無限集合になっているためより

複雑である．現在のところ，得られている結果は M がコンパクトリー群 G に限られているので、一般の場合の Ornstein-Uhlenbeck 作用素は，前節で定義したグラジエント作用素を部分多様体である $P_{m_0,m_1}(M)$ に制限して得られる Dirichlet 形式の生成作用素であるとのみ述べ, コンパクトリー群上の結果を述べる．

G 上の両側不変なリーマン計量を一つ固定する．パス空間 $P_{e,a}(G) = \{\gamma \in P_e(G) \mid \gamma(1) = a\}$ 上での Ornstein-Uhlenbeck 作用素の定義を述べる．すなわち，前節で m_0 と書いてきた出発点は単位元 e とする．測度としては，$P_{e,a}(G)$ 上の条件付確率測度 $\nu_{\lambda,a}(\cdot) = \nu_\lambda(\cdot \mid \gamma(1) = a)$ を取る．前節では M 上の Levi-Civita 接続で決まる平行移動を用いて，パスの接空間を H^1-空間 H と同一視したが，ここでは右不変な接続を使い同一視を行う．すなわち，$h(t) \in T_{\gamma(t)}G$ なる γ に沿うベクトル場を $\left(R^{-1}_{\gamma(t)}\right)_* h(t) \in T_eG = \mathfrak{g}$ により T_eG に値を取るパスと同一視する．ここで $R_a g = ga$ である．さらに T_eG の orthonormal frame u_0 を一つ固定し，$\mathbb{R}^d$ 値のパスと同一視する．$H = H^1([0,1] \to \mathbb{R}^d \mid h(0) = h(1) = 0)$ の内積で $P_{e,a}(G)$ の接空間にリーマン計量を入れリーマン多様体と考える (厳密にはリーマン多様体の構造が与えられるのはエネルギー有限なパス全体の方である)．$d = \dim G$ である．$h \in H$ による関数 $f(\gamma)$ の微分は

$$(Df(\gamma), h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(e^{\varepsilon h}\gamma) - h(\gamma)}{\varepsilon}$$

と定義される $(\left(e^{\varepsilon h}\gamma\right)(t) = e^{\varepsilon h(t)}\gamma(t))$．この微分を用いて, $P_{e,a}(G)$ 上の Dirichlet 形式を考え，その生成作用素を $-L_\lambda$ と書く．結果を述べるため，いくつか記号，定義を導入する．

定義 4.1 $\gamma, \eta \in P_{e,a}(G)$ に対して, $d(\gamma, \eta) = \max_{0 \le t \le 1} d(\gamma(t), \eta(t))$ と定める．次の記号を使う：

$$\Omega_L = \left\{\gamma \in P_{e,a}(G) \mid \sqrt{E(\gamma)} \le L\right\}, \tag{4.1}$$

$$\Omega_{L,\varepsilon} = \{\gamma \in P_{e,a}(G) \mid \Omega_L \text{ の距離 } d \text{ での } \varepsilon\text{-近傍}\}, \tag{4.2}$$

$\alpha > 0$ に対して，

$$\|\gamma\|_\alpha = \sup_{0 \le s,t \le 1} \frac{d(\gamma(t), \gamma(s))}{|t-s|^\alpha}. \tag{4.3}$$

$\nu_{\lambda,a}\left(\cup_L \Omega_{L,\varepsilon}\right) = 1$ を注意しておく．a を e の cut-locus に属さない点とする．この場合，e と a を結ぶ測地線全体の集合は可算無限である．測地線全体の集合を $\{l_i\}_{i=1}^\infty$ と書く．

有界領域での Dirichlet 境界条件の作用素について次が成立する．

定理 4.2 *a は e の cut-locus に属さないとする．Ω を $P_{e,a}(G)$ の開集合で $L > 0$ と十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在して $\Omega \subset \Omega_{L,\varepsilon}$ を仮定する．一様収束の位相での境界 $\partial\Omega$ の適当な近傍は測地線を含まないと仮定する．*

$$E_{Dir,0}(\lambda, \Omega) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla f(\gamma)|^2 d\nu_{\lambda,a}}{\int_\Omega f(\gamma)^2 d\nu_{\lambda,a}} \;\middle|\; f(\neq 0) \textit{ is a smooth function on } \Omega \textit{ and } f|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \tag{4.4}$$

と定義する．

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{E_{Dir,0}(\lambda,\Omega)}{\lambda} \;=\; \min\{\theta_0(l_i)\mid l_i\in\Omega\}. \tag{4.5}$$

$\theta_0(l_i)$ は $\nabla^2E(l_i)$ の負の固有値の絶対値の総和である．ただし，Ω が測地線を含まないならば右辺は $+\infty$ とする．

注意 4.3 (1) 仮定から Ω に含まれる測地線は有限個である．Ω の例としては，$\{\gamma\mid\|\gamma\|_\alpha<R\}$ がある．$\Omega=P_{e,a}(G)$ の時は，$E_{Dir,0}(\lambda,\Omega)=0$ なのでスペクトルギャップの漸近挙動が興味があるが，スペクトルギャップがあるかどうかも現時点でははっきりしない．このことに関しては次の (2) の注意も読んでほしい．
(2) Eberle [14] は hyperbolic cylinder を持つ S^n と微分同相なコンパクトリーマン多様体上のループ空間 $P_{m_0,m_0}(M)$ で $\inf\{\sigma(-L_\lambda)\setminus\{0\}\}=0$ を示している．この空間ではいくらでも長い極小測地線が存在し，その近傍の定義関数を用いてスペクトルギャップが 0 であることが示されている．極小測地線 l_i においては $\theta_0(l_i)=0$ であることを注意しておく．また，彼は $E_{Dir,0}(\lambda)$ と類似の量の漸近挙動も研究している ([15])．
(3) a の中心化群 $C_a=\{g\in G\mid ga=ag\}$ は $(T_g\gamma)(t)=g\gamma(t)g^{-1}$ $(g\in C_a)$ で $P_{e,a}(G)$ に等長 (微分がユニタリ変換) かつ測度 $\nu_{\lambda,a}$ を保存するように作用する．従って，ポテンシャル関数 $V(\gamma)$ が T_g-不変であれば，$L^2(P_{e,a}(G),d\nu_{\lambda,a})$ 上のシュレーディンガー作用素 $-L_\lambda+\lambda^2V(\gamma)$ の固有値に縮退が起こる可能性がある．実際 $V(\gamma)=\frac{1}{4}|b(1)|^2$ のときは，最小固有値の次のスペクトルは離散固有値であることが示せるが，このことから，その重複度は 2 になりそうである．$b(1)$ については下で説明する．

この定理の下からの評価の証明はやはり IMS localization formula を用いて，測地線の近傍とその外側に分けてなされる．測地線の近傍の解析では，前章と同様 anti-development map を用いて，$P_{e,a}(G)$ を Wiener 空間の部分多様体と見なし，部分多様体の一点の近傍はその接空間 (Wiener 空間の有限余次元の部分空間) の近傍と見直しておいて，2 章のようにテイラー展開を用いて示す．パス空間の接空間は右不変な接続で決まっているが，左不変な接続による anti-development map を用いると前節で述べた $A(w)$ の非有界性が現れない (もっと強く, anti-development map の微分がユニタリ作用素になるため $A(w)=I$ となる) ので，(ii) の問題は発生しない．これは，リー群特有の現象である．測地線の近傍の外側では次に述べる対数ソボレフ不等式の助けを借りる．一般のコンパクトリーマン多様体上のループ空間で対数ソボレフ不等式は証明されているが ([1, 17]), 定理 4.2 に相当する結果を証明するのに十分よい結果とは言えないと思う．

定理 4.4 ([19, 8]) 正定数 $C_1,C_2>0$ が存在して十分大きな $\lambda>0$ について次が成立する．任意の $f\in\mathfrak{F}C^\infty(P_{e,a}(G))$ に対して，

$$\int_{P_{e,a}(G)} f^2(\gamma)\log\left(\frac{f^2(\gamma)}{\|f\|^2_{L^2(\nu_{\lambda,a})}}\right)d\nu_{\lambda,a}(\gamma) \;\le\; \frac{2}{\lambda}\left(1+\frac{C_1}{\lambda}\right)\mathcal{E}_{\lambda,V_{\lambda,a}}(f,f), \tag{4.6}$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\lambda,V_{\lambda,a}}(f,f) &= \int_{P_{e,a}(G)} |(\nabla f)(\gamma)|_H^2 d\nu_{\lambda,a} \\ &\quad + \int_{P_{e,a}(G)} \lambda^2 V_{\lambda,a}(\gamma) f(\gamma)^2 d\nu_{\lambda,a}, \qquad (4.7)\\ V_{\lambda,a}(\gamma) &= \frac{1}{4}\left\{|b(1)|^2 + \frac{2}{\lambda}\log\left(\lambda^{-d/2}p(1/\lambda,e,a)\right)\right\} \\ &\quad + \frac{C_2}{\lambda}\left\{1+|b(1)|^2+\left(\int_0^1 |b(s)|ds\right)^2\right\} \qquad (4.8)\end{aligned}$$

上記で, $b(t)=\int_0^t \left((R_{\gamma(s)})_*\right)^{-1}\circ d\gamma(s)$ である．γ が滑らかなパスの時,

$$\|\nabla E(\gamma)\|^2_{T_\gamma P_{e,a}(G)} = 2E(\gamma) - |b(1)|^2$$

が成立する．この関係式が定理 4.2 の証明で重要である．なお，Ω 上で結果が得られるのは，次の指数可積分性があるからである．

補題 4.5 $L>0$ を固定する．任意の $p>1$ に対してある G にのみ依存する正定数 C が存在して，$\varepsilon \le C/p$ をみたす ε に対して，次が成立する*:*
L,ε に依存する定数 $C_i(L,\varepsilon)$ が存在して

$$\int_{\Omega_{L,\varepsilon}} e^{\frac{p\lambda}{2}|b(1)|^2} d\nu_{\lambda,a} \le C_1(L,\varepsilon)\exp\left(pC_2(L,\varepsilon)\lambda\right).$$

最後に $P_{e,a}(G)$ 上の 1-form に作用するシュレーディンガー作用素 (Witten Laplacian) についての結果を述べる．

定義 4.6 d を $P_{e,a}(G)$ 上の外微分作用素とする．$d^*_{\nu_{\lambda,a}}$ を $L^2(\wedge T^*P_{e,a}(G), d\nu_{\lambda,a})$ での d の *dual operator* とする．$\Box_{\lambda,a} = -\left(dd^*_{\nu_{\lambda,a}} + d^*_{\nu_{\lambda,a}}d\right)$ とおく．$P_{e,a}(G)$ の部分集合 Ω に関して

$$E_{Dir,1}(\lambda,\Omega) = \inf\left\{(-\Box_{\lambda,a}\alpha,\alpha)_{L^2(\nu_{\lambda,a})} \;\middle|\; \alpha \textit{ is a smooth } 1\textit{-form and } \alpha|_{\partial\Omega}=0\right\} \qquad (4.9)$$

と定める．

微分形式に作用する場合, 上記の境界条件を Dirichlet 境界条件と呼ぶのはふさわしいと言えないかも知れないが，上記の量に関して次の漸近挙動が示せる．証明は Weitzenböck formula を用いスカラーの場合に帰着させる．Weitzenböck formula はいわゆる Dirichlet 形式の Ricci curvature の計算である．例えば，[30] を参照.

定理 4.7 $G = SU(n)$ とする．$\Omega \subset P_{e,a}(G)$ は定理 4.2 と同じ仮定を満たすとする．このとき，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{E_{Dir,1}(\lambda, \Omega)}{\lambda} = \min\{\theta_1(l_i) \mid l_i \in \Omega\}, \tag{4.10}$$

ここで $\theta_1(l_i)$ は $\nabla^2 E(l_i)$ の固有値で次のように定まる非負値の実数である．すなわち，(i) 負の固有値がないときは，正の固有値の最小値, (ii) 負の固有値が 1 個のときは，0, (iii) 負の固有値が 2 個以上のとき，負の最大固有値を除いた負の固有値の絶対値の総和.

すべての i について $\theta_1(l_i) > 0$ であることはモース理論でよく知られている．したがって，$H^1(P_{e,a}(G), \mathbb{R}) = \{0\}$ であるが，$\ker \Box_{\lambda,a} = \{0\}$ であることが [25] でアナウンスされている．講演者は [9] のアイデアを用いた別証明を考察中である．実はこの Witten Laplacian の準古典極限を考えたのはこのことを示すのが一つの目的であったが，まだこの方法で消滅定理は示せていない．その理由を説明しよう．$\theta_1(l_i) > 0$ だけでなく $\lim_{i\to\infty} \theta_1(l_i) = +\infty$ も示せる ([3])．したがって領域 Ω が無限遠の方にいけば，(4.10) の極限は大きくなるがその収束の早さがよいことが証明できないため，全空間でのスペクトルの下限が ∞ に発散する事，あるいはもっと弱く十分大きな λ について正になることなども現状では証明できていないのである．しかし，無限個のゼロ点があるため，なんらかの一様性の条件 (有限次元でも非コンパクトであれば，遠方での条件 $\liminf_{|x|\to\infty} U(x) > 0$ を置いたりする) が無いと全空間での結果が得られないのは当然なので，そこのところを考察する必要があるが，状況はまだはっきりしていない.

参考文献

[1] S. Aida, Logarithmic Sobolev inequalities on loop spaces over compact Riemannian manifolds, Stochastic analysis and applications (Powys, 1995), 1–19, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.

[2] 会田茂樹, ループ空間上の確率解析, 数学, Vol.50, 1998, no. 3, 265–281.

[3] S. Aida, Witten Laplacian on pinned path group and its expected semiclassical behavior, IDAQP, Vol.6, No.supp01, 2003. 103–114.

[4] S. Aida, Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space, J. Funct. Anal. 203 (2003), no.2, 401–424.

[5] S. Aida, Semi-classical limit of the bottom of spectrum of a Schrödinger operator on a path space over a compact Riemannian manifold, J. Funct. Anal. Vol. 251, no. 1, 59–121, (2007).

[6] S. Aida, Tunneling phenomena on Wiener spaces, in preparation.

[7] S. Aida, Semi-classical analysis of Witten Laplacian on bounded domains of a pinned path group, in preparation.

[8] S. Aida, Some remarks on log-Sobolev inequalities with potential functions on pinned path groups, preprint.

[9] S. Aida, Hadamard's variation and Poincare's lemma on a certain non-convex domain, to appear in the Proceedings of RIMS Workshop on Stochastic Analysis and Applications, RIMS Kokyuroku Bessastu.

[10] S. Aida and D. Elworthy, Differential calculus on path and loop spaces. I. Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces, C.R.Acad.Sci.Paris Sr. I Math. 321 (1995) no.1, 97–102.

[11] L. Andersson and B.K. Driver, Finite dimensional approximations to Wiener measure and path integral formulas on manifolds, J. Funct. Anal. **165** (1999), 430–498.

[12] A. Arai, Trace formula, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, J. Funct. Anal. **136**, (1996), 510–547.

[13] M. Dimassi and J. Sjöstrand, Spectral Asymptotics in the semi-classical limit, London Mathematical Society Lecture Note Series, **268**, Cambridge University Press, 1999.

[14] A. Eberle, Absence of spectral gaps on a class of loop spaces, J. Math. Pures Appl. (9) **81** (2002), no. 10, 915–955.

[15] A. Eberle, Local spectral gaps on loop spaces, J. Math. Pure Appl. (9) **82** (2003), no.3, 313–365.

[16] A. Floer, Witten's complex and infinite-dimensional Morse theory, J. Differential Geom. **30** (1989), no.1, 207–221.

[17] F-Z. Gong and Z.M. Ma, The log-Sobolev inequality on loop space over a compact Riemannian manifold, J. Funct. Anal. **157** (1998), no.2, 599–623.

[18] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061-1083.

[19] L. Gross, Logarithmic Sobolev Inequalities on Loop Groups, J. Funct. Anal. **102** (1991), 268-313.

[20] B. Helffer, Semiclassical analysis, Witten Laplacians, and Statistical Mechanics, Series on partial differential equations and applications, Vol. 1, World Scientific, 2002.

[21] B. Helffer and F. Nier, Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians, Lecture Notes in Mathematics, **1862**, Springer, 2005.

[22] B. Helffer and J. Sjöstrand, Multiple wells in the semiclassical limit. I. Comm. Partial Differential Equation **9** (1984), no.4, 337–408.

[23] E. Hsu, Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces over Riemannian manifolds, Comm. Math. Phys. **189** (1997), no.1 ,9–16.

[24] E. Hsu, Stochastic Analysis on manifolds, Graduate Studies of Mathematics, Volume 38, American Mathematical Society, 2002.

[25] S. Kusuoka, de Rham cohomology of Wiener-Riemannian manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I,II (Kyoto, 1990), 1075–1082, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[26] T. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev.Mat.Iberoamer., **14** (1998), 215–310.

[27] T. Lyons and Z. Qian, System control and rough paths, Oxford Mathematical Monographs, 2002.

[28] P. Malliavin, Stochastic Analysis, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 313, Springer, 1997.

[29] O. Matte and J. S. Møller, On the spectrum of semi-classical Witten-Laplacians and Schrödinger operators in large dimension, J. Funct. Anal., **220** (2005), no. 2, 243–264.

[30] I. Shigekawa, Differential calculus on a based loop group, New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994), 375–398, World Sci. Publ., 1997.

[31] B. Simon, Semiclassical Analysis of Low Lying Eigenvalues I. Nondegenerate Minima: Asymptotic Expansions, Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A, Vol. XXXVIII, no. 4, (1983), 295–308.

[32] B. Simon, Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling, Annals of Math. **120**, (1984), 89–118.

[33] B. Simon and R. Hoegh-Krohn, Hypercontractive Semigroups and Two Dimensional Self-Coupled Bose Fields, J. Funct. Anal., Vol. 9, (1972), 121–180.

[34] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J. Diff. Geom., **17** (1982), 661–692.