ルベーグ積分入門後編

会田茂樹

平成 24 年 12 月 13 日版*

0 初めに

これは, 解析学概論 B2 の講義ノートです. 内容は

1. 測度の再導入
2. 測度空間の完備性・完備化
3. フビニの定理
   (a) 直積測度
   (b) Fubini の定理 (完備化しない場合)
   (c) Fubini の定理 (完備化した場合)
4. ルベーグ測度に対するフビニの定理
5. ルベーグ測度に関する注意
6. 確率論に関連する注意
   (a) 直積確率測度と確率変数の独立性
   (b) 大数の法則
   (c) 像測度と積分の変数変換の公式
7. Radon-Nikodym の定理
8. 有界変動関数・Stieltjes 積分・測度の構成
9. フーリエ変換

---

*まだ完成品ではありません. 順次更新します.

1 測度の再導入

前期の講義で $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A のルベーグ外測度 $m_L^*(A)$[1]を次のように定義した.

$$\begin{aligned} m_L^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \;\Big|\; & I_i \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の直方体 } (\textstyle\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]\ (-\infty < a_i < b_i < \infty) \text{ の形の図形 }) \\ & \text{かつ } A \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i \Big\}. \end{aligned}$$

この m_L^* は次を満たす：

(a) $0 \le m_L^*(A) \le +\infty$

(b) $A \subset B$ ならば $m_L^*(A) \le m_L^*(B)$

(c) 任意の $A_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ に対して $m_L^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m_L^*(A_i)$.

これらを示すのは簡単である. 次に A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。任意の $\mathbb{R}^n$ の部分集合 E に対してつねに

$$m_L^*(E) = m_L^*(E \cap A) + m_L^*(E \cap A^c) \tag{1.1}$$

が成立するような集合 A 全体を $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ と書くと[2]

(d) $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ は σ-加法族となること

(e) $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ の元をルベーグ可測集合とよぶこと

(f) m_L^* を $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ に制限したものを m_L と書くと $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n), m_L)$ は測度空間となること

を説明した. この $m_L(A)$ がルベーグ測度である. ルベーグ外測度および Jordan 式の測度について演習問題をあげる.

演習問題 1.1. 前期に次の定理を述べ, これにより Jordan 可測な有界集合は Lebesgue 可測であり, Jordan 測度 (リーマン式の体積) はその集合のルベーグ測度と一致することが示せると述べた. 以下の定理を証明しかつ有界集合が Jordan の意味で可測のときその Jordan 測度と Lebesuge 測度は一致するという命題の証明を完成させよ.

定理

(1) 直方体 $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ について $m_L^*(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$, すなわち I の通常の意味での体積と一致する.

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。次は同値である：

---

[1]前期、およびこれまで外測度を $\overline{m}(A)$ などのように m の上にバーをつけて表してきたが、測度の完備化の方でこの記号を用いたほうがよいので、ここでは m^* のように $*$ をつけて外測度を表すことにする

[2]外測度の性質からこの等式は不等式 $m_L^*(E) \ge m_L^*(E \cap A) + m_L^*(E \cap A^c)$ と同値である. また前期は「内測度」の視点からこの等式の意味を説明した.

(i) 任意の直方体 I に対して

$$m_L^*(I) \geq m_L^*(I \cap A) + m_L^*(I \cap A^c).$$

(ii) 任意の集合 E に対して

$$m_L^*(E) \geq m_L^*(E \cap A) + m_L^*(E \cap A^c).$$

上記の外測度から測度を構成する部分では考えている集合がユークリッド空間である必要は無く全く一般の集合で差し支えない．これは Carathéodory による発見である．これに従い, 一般的な測度の構成定理を説明する．

定義 1.2. X を集合とする．X の任意の部分集合 A に対して非負の数 $0 \leq m^*(A) \leq +\infty$ が定まり次を満たすとき m^* を外測度という．

(1) $m^*(\emptyset) = 0$

(2) $A \subset B$ ならば $m^*(A) \leq m^*(B)$

(3) (外測度の劣加法性) 任意の X の部分集合 A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ に対して $m^*(\cup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty m^*(A_i)$.

定理 1.3 (Carathéodory の拡張定理)**.** 集合 X 上に外測度 m^* が与えられたとする．任意の $E \subset X$ に対して

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

が成立するような A を m^*-可測集合といい m^*-可測集合全体を $\mathcal{F}_{m^*}$ と書くと次が成立する．

(1) $\mathcal{F}_{m^*}$ は σ 加法族をなす

(2) m^* を $\mathcal{F}_{m^*}$ に制限したものを m と書くと $(X, \mathcal{F}_{m^*}, m)$ は測度空間となる．

証明. (1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}_{m^*}$ は自明．$A \in \mathcal{F}_{m^*}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}_{m^*}$ も自明．$A_i \in \mathcal{F}_{m^*}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ならば $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}_{m^*}$ を示す．$B_n = \cup_{i=1}^n A_i$ とおく．次を示そう．

(i) 任意の $E \subset X$ に対して

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap B_n) + m^*(E \cap B_n^c).$$

(ii) $A_i \in \mathcal{F}_{m^*}$ $(1 \leq i \leq n)$ が $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ を満たすとき

$$m^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n m^*(E \cap A_i).$$

(iii) $A_i \in \mathcal{F}_{m^*}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ が $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ を満たすとき $B = \cup_{i=1}^\infty A_i$ とおくと

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c).$$

(i) より $\mathcal{F}_{m^*}$ が有限加法族であることがわかる. (iii) により σ 加法族であることもわかる. (i) を帰納法で示す. $n=1$ は仮定から正しい. n のとき成立するとする.

$$\begin{aligned}
m^*(E) &\geq m^*(E\cap B_n)+m^*(E\cap B_n^c)\\
&\geq m^*(E\cap B_n\cap A_{n+1})+m^*(E\cap B_n\cap A_{n+1}^c)+m^*(E\cap B_n^c\cap A_{n+1})+m^*(E\cap B_n^c\cap A_{n+1}^c)\\
&\geq m^*(E\cap B_{n+1})+m^*(E\cap B_{n+1}^c). \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

(1.2) では外測度の劣加法性, A_{n+1} に対する仮定および

$$B_{n+1}=(B_n\cap A_{n+1})\cup\left(B_n\cap A_{n+1}^c\right)\cup(B_n^c\cap A_{n+1}),\quad B_{n+1}^c=B_n^c\cap A_{n+1}^c$$

を用いた. (ii) を示す. $A_i\in\mathcal{F}_{m^*}$ を次々と用い

$$\begin{aligned}
m^*(E\cap B_n)&=m^*(E\cap B_n\cap A_n)+m^*(E\cap B_n\cap A_n^c)\\
&=m^*(E\cap A_n)+m^*(E\cap B_{n-1})=\cdots=\sum_{i=1}^n m^*(E\cap A_i). \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

(iii) を示す. (i), (ii) から

$$\begin{aligned}
m^*(E)&\geq m^*(E\cap B_n)+m^*(E\cap B_n^c)\\
&=\sum_{i=1}^n m^*(E\cap A_i)+m^*(E\cap B_n^c)\\
&\geq \sum_{i=1}^n m^*(E\cap A_i)+m^*(E\cap B^c) \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

(1.4) で $n\to\infty$ とすると外測度の劣加法性を用い

$$m^*(E)\geq\sum_{i=1}^\infty m^*(E\cap A_i)+m^*(E\cap B^c)\geq m^*(E\cap B)+m^*(E\cap B^c).$$

以上より $\mathcal{F}_{m^*}$ は σ 加法族である.

(2) $A_i\in\mathcal{F}_{m^*}$ $(i=1,2,\ldots)$ が $A_i\cap A_j=\emptyset$ $i\neq j$ を満たすとし, $B=\cup_{i=1}^\infty A_i$ とおく. (1.3) で $E=X$ とし

$$m^*(B)\geq m^*(B_n)=\sum_{i=1}^n m^*(A_i).$$

$n\to\infty$ とし $m^*(B)\geq\sum_{i=1}^\infty m^*(A_i)\geq m^*(B)$ だから $m^*(B)=\sum_{i=1}^\infty m^*(A_i)$ となり完全加法性がわかる. □

さてルベーグ測度は Jordan 測度という有限加法的な測度を拡張して得られる測度である. より一般に有限加法的な測度がいつ測度に拡張できるかということについては, 次のような Hopf の拡張定理がある.

定理 1.4 (Hopf の拡張定理)**.** $(X, \mathcal{A}, m_0)$ を有限加法的測度空間とする．$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ と定める．
(1) $\mathcal{F}$ 上完全加法的な測度 m が存在して

$$m(A) = m_0(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

となるための必要十分条件は m_0 が $\mathcal{A}$ 上完全加法的なこと、すなわち

- $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ が $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ を満たすとき

$$m_0(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m_0(A_i)$$

  が成立することである.

(2) さらに有限加法的測度空間 $(X, \mathcal{A}, m)$ が σ 有限, すなわち

(a) $X_1 \subset X_2 \subset \cdots X_n \subset \cdots, \quad \cup_{n=1}^{\infty} X_n = X, \quad X_n \in \mathcal{A}$

(b) すべての n について $m_0(X_n) < \infty$

とする. このとき拡張 m は一意的である[3].

証明. (1) を証明する．(2) は単調族定理を用いる必要があるので後で示す．必要であることは明白なので, 十分であることを示す．外測度 m^* を導入する．$A \subset X$ に対して

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m_0(A_i) \;\middle|\; A_i \in \mathcal{A}, A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

外測度になるのは定義から自明である．Carathéodory の拡張定理より $(X, \mathcal{F}_{m^*}, m^*)$ は測度空間になる．次を証明すればよい.

(i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_{m^*}$

(ii) $m^*(A) = m_0(A) \;\; \forall A \in \mathcal{A}$.

(i) を示す．任意の集合 $E \subset X$, $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \tag{1.5}$$

を示せばよい．$m^*(E) = +\infty$ ならば常に成立するので $m^*(E) < \infty$ としてよい．$\varepsilon > 0$ を一つ取る．このとき $B_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ が存在して $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ かつ

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_0(B_i) \leq m^*(E) + \varepsilon. \tag{1.6}$$

[3] σ 有限性が無いと一般的には一意性は従わない．例えば演習問題 3.11 を見よ．しかしもっと人工的な例がそう難しく無く作れる．例えば伊藤清三の本を参照せよ.

$E \cap A \subset \cup_{i=1}^{\infty}(B_i \cap A)$, $E \cap A^c \subset \cup_{i=1}^{\infty}(B_i \cap A^c)$ だから外測度の定義から

$$m^*(E \cap A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_0(B_i \cap A), \quad m^*(E \cap A^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_0(B_i \cap A^c).$$

各辺を足し算して

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m_0(B_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} m_0(B_i \cap A^c) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m_0(B_i) \qquad (m_0 \text{ の有限加法性より}) \\ &\leq m^*(E) + \varepsilon \qquad ((1.6) \text{ より}). \end{aligned}$$

これは A の m^*-可測性を示している．ここまで m_0 の $\mathcal{A}$ 上の完全加法性を用いていない. (ii) を示すのに用いる．(ii) を示そう．$A \in \mathcal{A}$ なので $m^*(A) \leq m_0(A)$. $m_0(A) \leq m^*(A)$ を示す．そのためには $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$ となる A_i に対し,

$$m_0(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_0(A_i) \tag{1.7}$$

を示せば良い. $B_n = A_n \cap \left(\cup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c \cap A$ とおくと

$$B_n \subset A_n, \qquad \forall n \quad B_n \in \mathcal{A}, \quad B_n \cap B_m = \emptyset \quad (n \neq m) \tag{1.8}$$

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{1.9}$$

(1.9) より m_0 の $\mathcal{A}$ 上での完全加法性から

$$m_0(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m_0(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_0(A_i).$$

すなわち (1.7) が示された.

$\square$

有限加法的測度から完全加法性をもつ測度を構成する方法を説明したが, ルベーグ測度の場合にどう Hopf の拡張定理を用いるか, もう少し説明する．$\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度の構成の場合

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^n \;\middle|\; I = \textstyle\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \text{ の形の半開区間の有限和として表される集合全体} \right\} \tag{1.10}$$

のような有限加法族を取る．ただし半開区間 I については $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty$ とし, 無限区間も含むとする[4]. $\mathcal{A}$ の定義で半開区間の有限和としているが,

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} I_i \qquad \text{ただし } i \neq j \text{ のとき } I_i \cap I_j = \emptyset$$

[4] $b_i = +\infty$ のとき $(a_i, b_i] = (a_i, +\infty)$ と考える.

のように有限個の半開区間の disjoint union [5] で書けているもの全体としても同じである．m_0 は $A = \coprod_{i=1}^N I_i$ のとき

$$m_0(A) = \sum_{i=1}^N |I_i|, \qquad |I_i| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

と定めると

(i) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, m_0)$ は有限加法的測度空間であり m_0 は $\mathcal{A}$ 上完全加法的である．これから Hopf の拡張定理を経由して作られる測度空間は $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), m_L)$, ただし $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ はボレル集合族である,

(ii) $\mathcal{F}_{m^*}$ がルベーグ可測集合全体で, 外測度 m^* をこの集合族に制限して得られるのがルベーグ測度

ということになる．また, 今の場合, Hopf の拡張定理の証明に現れる外測度は

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^\infty |I_i| \;\middle|\; I_i \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の半開区間で } A \subset \cup_{i=1}^\infty I_i \right\}. \tag{1.11}$$

と書いてよいこともわかる[6]．上の (i) で自明でないのは m_0 の $\mathcal{A}$ 上での完全加法性である．これは次を示せば十分である．

命題 1.5. I を半開区間とする．互いに disjoint な半開区間の列 I_i が $I = \cup_{i=1}^\infty I_i$ を満たすとき

$$|I| = \sum_{i=1}^\infty |I_i|$$

証明. N を任意の自然数とする．$\cup_{i=1}^N I_i \subset I$, I_i は共通部分をもたないから $|I| \geq \sum_{i=1}^N |I_i|$ は明らかと言っていいだろう．したがって $|I| \geq \sum_{i=1}^\infty |I_i|$ である．逆の不等式を示す．

(1) $|I| < \infty$ のとき

$\varepsilon > 0$ を取る．$J \subset I$ となる直方体 J[7]で

$$|J| \geq |I| - \varepsilon \tag{1.12}$$

となるものがある．I_i をすこし膨らました開直方体 $\tilde{I}_i$[8]を取り

$$\sum_{i=1}^\infty |\tilde{I}_i| \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^\infty |I_i| \tag{1.13}$$

とできる．$J \subset \cup_{i=1}^\infty \tilde{I}_i$ なので J のコンパクト性から適当な N を取れば

$$J \subset \cup_{i=1}^N \tilde{I}_i. \tag{1.14}$$

[5] $A = \coprod_{i=1}^N I_i$ のように書くこともある．

[6] 簡単なことであるが、確かめるべきことである．

[7] $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ の形の集合

[8] $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ という形の集合

(1.14), (1.12), (1.13) より

$$|I| \leq |J| + \varepsilon \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{N} |\tilde{I}_i| \leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

これで逆向きの不等式が示された.

(2) $|I| = +\infty$ のとき

(1) と同じように示せる. ある i について $|I_i| = +\infty$ ならば正しいので, すべての i について $|I_i| < \infty$ とする. 大きな正数 R を取る. $J \subset I$ となる閉区間 J で

$$|J| \geq R \tag{1.15}$$

となるものがある. I_i をすこし膨らました開区間 $\tilde{I}_i$ を取り

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{I}_i| \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \tag{1.16}$$

とできる. $J \subset \cup_{i=1}^{\infty} \tilde{I}_i$ なので J のコンパクト性から適当な N を取れば

$$J \subset \cup_{i=1}^{N} \tilde{I}_i. \tag{1.17}$$

(1.17), (1.15), (1.16) より

$$R \leq |J| \leq \sum_{i=1}^{N} |\tilde{I}_i| \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

これは $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = +\infty$ を意味する. □

細かいことであるが、次を注意しておく. この節の冒頭でルベーグ外測度の定義を与えた. そこでは I_i は直方体 $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ としていたが (1.11) のように無限区間を含む半開区間にしても最初に定義した外測度と同じことが示せるのである.

定理 1.4 (2) の拡張の一意性を示すため, 単調族定理 (Monotone class theorem) を述べる.

定義 1.6. (1) $\mathcal{M}$ を集合 X の部分集合の族で次の性質をみたすとき単調族という:

(1) $A_i \in \mathcal{M}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \subset \cdots$ のとき $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

(2) $A_i \in \mathcal{M}$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \supset \cdots$ のとき $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

(2) X の集合族 $\mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}$ を含む最小の単調族が存在する[9]. これを $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$ と書くことにする.

定理 1.7 (単調族定理)**.** $\mathcal{A}$ を集合 X の有限加法族とする. このとき

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A}).$$

証明. $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ だから $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ が σ 加法族であることを示せば良い. そのためには

[9] $\mathcal{C}$ を含むすべての単調族の共通部分をとればよい

(i) $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ ならば $A^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$

(ii) $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ ならば $A \cap B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$

を示せばよい[10].
(i) の証明: $\mathfrak{M}_1(\mathcal{A}) = \{A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \mid A^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$ とおくとき, $\mathfrak{M}_1(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ を示せばよい. $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$ なので $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_1(\mathcal{A})$. 従って $\mathfrak{M}_1(\mathcal{A})$ が単調族であることを示せばよい.

(1) のチェック：$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_n \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{A})$ とするとき $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{A})$ を示す．まず $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ である．$A_i^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ かつ $\{A_i^c\}$ は単調減少列なので $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ が単調族であることから

$$(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \cap_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}).$$

よって $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

(2) のチェック：$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $A_n \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{A})$ とする．$\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{A})$ を示す．まず $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ は OK.

$$(\cap_{i=1}^{\infty})^c A_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$$

も $A_i^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ から従う.

以上 (1), (2) が示せたので $\mathfrak{M}_1(\mathcal{A})$ は単調族である.

(ii) の証明：2 段階で証明する.

(a) $\mathfrak{M}_2(\mathcal{A}) = \{A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \mid \forall B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$ とおくと $\mathfrak{M}_1(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ を示す. まず $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_2(\mathcal{A})$ は明らか. 従って $\mathfrak{M}_2(\mathcal{A})$ が単調族であることを示せば良い.

$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_i \in \mathfrak{M}_2(\mathcal{A})$ のとき, 任意の $B \in \mathcal{A}$ に対して $A_i \cap B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. 従って任意の $B \in \mathcal{A}$ に対して

$$(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B = \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}).$$

よって $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}_2(\mathcal{A})$.

$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $A_i \in \mathfrak{M}_2(\mathcal{A})$ のとき $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}_2(\mathcal{A})$ も同様な計算でわかる. 以上より $\mathfrak{M}_2(\mathcal{A})$ は単調族である.

(b) 次に $\mathfrak{M}_3(\mathcal{A}) = \{A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \mid \forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \quad A \cap B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$ とおくと $\mathfrak{M}_3(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ を示す. これで (ii) が示され証明が完了する.

(a) の結果より, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_3(\mathcal{A})$. したがって, $\mathfrak{M}_3(\mathcal{A})$ が単調族である事を示せばよい. この証明は (a) と全く同じなので省略する. □

注 1.8. この定理は $\mathcal{A}$ を含む任意の単調族 $\mathcal{M}$ は $\sigma(\mathcal{A})$ を含むという主張と同値である.

単調族定理を使う問題として次をあげておく.

演習問題 1.9. μ を可測空間 $(I, \mathfrak{B}(I))$ 上の有限測度とする. ただし $I = [0,1]$ かつ $\mathfrak{B}(I)$ はボレル集合族である. f を I 上の有界ボレル可測関数とする. 任意の $0 \le t \le 1$ に対して $\int_{[0,t]} f(x) d\mu(x) = 0$ ならば $f(x) = 0$ μ-a.e.x となることを示せ.

[10] これが示されれば有限加法族であることがわかる

Hopfの拡張定理 (拡張の一意性) の証明. m_1, m_2 を m_0 の $\mathcal{F}(=\sigma(\mathcal{A}))$ への拡張とする.

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} \mid m_1(A \cap X_n) = m_2(A \cap X_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

と定める. $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ なので $\mathcal{C}$ が単調族であることを示せば単調族定理より

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$$

となりすべての $A \in \mathcal{F}$ について

$$m_1(A \cap X_n) = m_2(A \cap X_n).$$

この式で $n \to \infty$ とすると $m_1(A) = m_2(A)$ となり一意性が言えることになる. 従って $\mathcal{C}$ が単調族であることを示せばよいが, これは $m_1(X_n) = m_2(X_n) = m_0(X_n) < \infty$ だから測度の単調性から従う. □

注 1.10. Carathéodory および Hopf の拡張定理を述べたがこれらは

(1) (無限) 直積確率測度の構成

(2) 局所コンパクトハウスドルフ空間上の連続関数の空間上の正値な連続汎関数が測度に対応することを述べるリース・マルコフの定理

などで使われる. (1) については後で述べる. (2) は関数解析の講義で扱われる内容である.

2 測度空間の完備性・完備化

ルベーグ測度などのように外測度から Carathéodory の拡張定理を経由して構成される測度は完備性と呼ばれる性質を持つ. 正確には完備性は, 測度と σ 加法族両方に関わる性質である[11].

定義 2.1. 測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ が完備とは次の条件 (C) が成立するときに言う.

(C) $A \in \mathcal{F}$ が $m(A) = 0$ を満たせば, 任意の $B \subset A$ に対して $B \in \mathcal{F}$ となり, かつ $m(B) = 0$.

注 2.2. $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), m_L)$ は完備でない測度空間である. ただし $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ は (位相的) ボレル集合族, m_L はルベーグ測度.

(a) 任意のルベーグ測度 0 の集合の部分集合はルベーグ可測であること

(b) 濃度が連続体の濃度 $\aleph$ のルベーグ測度 0 の集合が存在すること

(c) $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ の濃度は $\aleph$ であること

[11]確率過程論で重要なブラウン運動には情報増大系と呼ばれる σ 加法族がある. この σ 加法族は完備ではないが、完備化すると色々と有用な事がある.

から濃度の比較によりルベーグ可測だがボレル可測ではない集合が存在することがわかる．これは前期にレポートとして出題した．上記の (c) は全く自明ではない．例えば「実関数論」(近藤基吉、朝倉書店)[12]を参照のこと．

定理 2.3. $(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間とする．

$$\overline{\mathcal{F}}^m = \left\{ B \subset X \mid m\text{- 測度ゼロの集合 } N \in \mathcal{F} \text{ と } A \in \mathcal{F} \text{ が存在して } A \triangle B \subset N \cdots (*) \right\}$$

と定める．ここで $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. 以下 (曖昧さが無いときは) 簡単のため, $\overline{\mathcal{F}}^m$ を $\overline{\mathcal{F}}$ と測度 m を省略して書くこともある．
(1) $\overline{\mathcal{F}}^m$ は σ 加法族であり, $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}^m$.
(2) (1) の $(*)$ の関係にある B に対して $\overline{m}(B) = m(A)$ と定める．このとき, この定義は well-defined であり, $(X, \overline{\mathcal{F}}^m, \overline{m})$ は完備な測度空間になる．さらに $A \in \mathcal{F}$ ならば $\overline{m}(A) = m(A)$ となる．この測度空間を $(X, \mathcal{F}, m)$ の完備化と言う．

証明. (1) まず $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$ は明らか. σ 加法族であることを示す．

(i) $A \in \overline{\mathcal{F}}$ ならば $A^c \in \overline{\mathcal{F}}$

(ii) $A_i \in \overline{\mathcal{F}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ならば $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \overline{\mathcal{F}}$

を示せばよい．(i) を示す．$A \in \overline{\mathcal{F}}$ のとき, $B \in \mathcal{F}$ と $N \in \mathcal{F}$ で $A \triangle B \subset N$, $m(N) = 0$ となるものがある．$A^c \triangle B^c = A \triangle B \subset N$ となり, $B^c \in \mathcal{F}$ だから $A^c \in \overline{\mathcal{F}}$. (ii) を示そう．各 A_i について $B_i \in \mathcal{F}$, $N_i \in \mathcal{F}$ で $A_i \triangle B_i \subset N_i$, $m(N_i) = 0$ とできる．

$$\begin{aligned}
(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \triangle (\cup_{i=1}^{\infty} B_i) &= ((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap (\cap_{i=1}^{\infty} B_i^c)) \cup ((\cup_{i=1}^{\infty} B_i) \cap (\cap_{i=1}^{\infty} A_i^c)) \\
&= \left\{ \cup_{i=1}^{\infty} \left(A_i \cap \left(\cap_{j=1}^{\infty} B_j^c \right) \right) \right\} \cup \left\{ \cup_{i=1}^{\infty} \left(B_i \cap \left(\cap_{j=1}^{\infty} A_j^c \right) \right) \right\} \\
&\subset (\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B_i^c)) \cup (\cup_{i=1}^{\infty} (B_i \cap A_i^c)) \\
&\subset \cup_{i=1}^{\infty} N_i.
\end{aligned}$$

となり $m(\cup_{i=1}^{\infty} N_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(N_i) = 0$ だから (ii) が示された．
(2) まずこの定義が well-defined であることを示す．別の $A' \in \mathcal{F}$, $N' \in \mathcal{F}$ で $A' \triangle B \subset N'$, $m(N') = 0$ とする．

$$\begin{aligned}
A \triangle A' &= (A \setminus A') \cup (A' \setminus A) \\
&\subset \big((B \cup N) \setminus A' \big) \cup \big((B \cup N') \setminus A \big) \\
&\subset \big((B \setminus A') \cup N \big) \cup \big((B \setminus A) \cup N' \big) \\
&\subset N \cup N'
\end{aligned}$$

なので $m(A \triangle A') = 0$. 従って $m(A) = m(A')$. またこの事から定義した $\overline{m}$ は m の拡張であることも定義から明らか. $\overline{m}$ が測度になること, すなわち完全加法性は m の完全加法性から従う．完備性の定義の条件 (C) も明らかである． □

[12]古い本ですが復刻版が出ています．

演習問題 2.4. $(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間とする．$A \subset X$ に対して次の (1),(2),(3) は同値であることを示せ.
(1) $A \in \overline{\mathcal{F}}^m$.
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B \subset A \subset C$, $B, C \in \mathcal{F}$, $m(C \setminus B) < \varepsilon$ をみたす B, C が存在する[13].
(3) $B, C \in \mathcal{F}$ で $B \subset A \subset C$ $m(B \setminus C) = 0$ を満たすものが存在する.

演習問題 2.5. $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$ と定める．ここで

$$\mathcal{N} = \{A \subset X \mid A \subset N,\, m(N) = 0 \text{ となる } N \in \mathcal{F} \text{ が存在する}\},$$
$$\mathcal{F} \vee \mathcal{N} = \text{集合族 } \mathcal{F}, \mathcal{N} \text{ を含む最小の } \sigma \text{ 加法族}.$$

このとき $\overline{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}$.

定理 2.6. ルベーグ測度 m_L をボレル集合族 $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ に制限したものを $m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}$ と書くことにする．$(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)})$ の場合 $\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}^{m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}}$ はルベーグ可測集合全体 $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ と一致しかつ $\overline{m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}} = m_L$.

証明. 前期にレポート問題として出題した次の事実が本質的である:

(∗) A を $\mathbb{R}^n$ のルベーグ可測集合とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$m_L(G \setminus A) \leq \varepsilon, \quad m_L(A \setminus F) \leq \varepsilon, \quad F \subset A \subset G$$

となるような開集合 G, 閉集合 F が存在する.

実際上記のことが示されれば任意のルベーグ可測集合 A に対して閉集合 F_i が存在して $\cup_{i=1}^{\infty} F_i \subset A$, $m_L(A \setminus \cup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$ となる．従って $A \setminus \cup_{i=1}^{\infty} F_i$ のルベーグ外測度は 0．このことからルベーグ測度 0 のボレル可測集合 N で $A \setminus \cup_{i=1}^{\infty} F_i \subset N$．従って $A \in \overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}^{m_L}$ かつ $\overline{m_L}(A) = m_L(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = m_L(A)$. (記号を変えたので、混乱するかも知れませんが, ここでの $\overline{m_L}$ は $(m_L, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ を完備化して得られる測度であり外測度ではありません.) よって

(i) $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}^{m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}}$

(ii) $\overline{m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}}$ を $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ に制限したものはルベーグ測度と一致する

ことがわかった．後は $\overline{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}^{m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}} \subset \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ を示せばよいが, これは演習問題 2.5 の結果から明らかである. □

演習問題 2.7. (1) $(X, \mathcal{F}, m)$ を σ 有限な測度空間とする．m から決まる Carathéodory 外測度 m^*, および m^*-可測集合全体 $\mathcal{F}_{m^*}$ を考える[14]．このとき $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{m^*}$, $\overline{m} = m^*|_{\mathcal{F}_{m^*}}$ となる.
(2) $(X, \mathcal{A}, m_0)$ を σ 有限な有限加法的測度空間とする．さらに m_0 は $\mathcal{A}$ 上完全加法的とする．m_0 の一意的拡張として得られる測度空間 $(X, \sigma(\mathcal{A})), m)$ の完備化は Hopf の拡張定理の証明の中に現れる Carathéodory の拡張定理を用いて得られる外測度 m^* を m^*-可測集合全体 $\mathcal{F}_{m_*}$ に制限して得られる完備測度空間と一致することを示せ.

[13] この B, C はもちろん ε に応じて変わる可能性がある
[14] 定理 1.3 を参照せよ.

演習問題 2.8. [15] $(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間, $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{m})$ をその完備化とする.

(1) f を $\overline{\mathcal{F}}$-可測な実数値関数とすると $\mathcal{F}$-可測な関数 $\tilde{f}$ が存在して $f(x) = \tilde{f}(x)$ $\overline{m}$-a.e. x.

(2) g を X 上の実数値 $\mathcal{F}$ 可測関数とする．実数値関数 h に対して $m(N) = 0$ となる $\mathcal{F}$ 可測集合が存在して $\{x \mid h(x) \neq g(x)\} \subset N$ となるとき h は $\overline{\mathcal{F}}$ 可測であることを示せ.

最後に完備化とは関係ないが似た性質として測度の近似定理に関して次の演習問題をあげる.

演習問題 2.9. $(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間とする．$\mathcal{A}$ を有限加法的集合族[16]とし $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$ とする．このとき任意の $A \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ に対して, $B \in \mathcal{A}$ が存在して $m\,(A \triangle B) \leq \varepsilon$.

3 フビニの定理

$\mathbb{R}^{n+m}$ の点 z を $z = (x, y)$ $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ のように最初の n 次元の点を x、後の m 次元の点を y と書くことにする。$f(z) = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^{n+m}$ 上のルベーグ積分可能な関数として、累次積分

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx \right) dy$$

は可能であろうか？漠然とこう問題を述べても

(1) $f(x, y)$ は x, y を固定して y, x それぞれの関数と見た時, ルベーグ可測なのか?

(2) 可測性がわかったとして可積分か?

など疑問がすぐに湧く．これらの問題を解決しているのが Fubini(フビニ) の定理である。この定理では $\mathbb{R}^{n+m}$ 上のルベーグ測度 dz と $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度 dx, $\mathbb{R}^m$ 上のルベーグ測度 dy の関係に注意する必要がある．この講義では 2 つの測度空間 $(X, \mathcal{F}_X, m_X), (Y, \mathcal{F}_Y, m_Y)$ が与えられた時, その直積測度空間を構成する話から始めてフビニの定理を述べることにする[17].

3.1 直積測度の構成 (有限直積空間)

$(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$ を可測空間とする．直積空間 $X \times Y$ 上に σ 加法族を定義する.

定義 3.1 (直積 σ 加法族)**.** $\{E \times F \mid E \in \mathcal{F}_X, F \in \mathcal{F}_Y\}$ を含む有限加法族を $\mathcal{A}$ とする．$\mathcal{A}$ で生成される $X \times Y$ 上の σ 加法族を $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ と書き, $(X, \mathcal{F}_X)$ と $(Y, \mathcal{F}_Y)$ との直積 σ 加法族という．また、$(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ を直積可測空間という.

演習問題 3.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ をボレル可測関数とする．グラフ $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ は直積空間 $\mathbb{R}^{n+m}$ のボレル可測集合であることを示せ．このことは一般の測度空間の場合に拡張可能か?

[15] 従って任意のルベーグ可測関数に対して, ほとんどすべての点で一致するボレル可測関数が存在する.
[16] σ-algebra ではなく algebra
[17] このようにする理由は確率論で独立な確率変数を考察するときは，直積測度空間を考えるのが必須だからである.

定義 3.3 (直積測度)**.** $(X, \mathcal{F}_X, m_X), (Y, \mathcal{F}_Y, m_Y)$ を測度空間とする。直積可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ 上の測度 m ですべての $E \in \mathcal{F}_X, F \in \mathcal{F}_Y$ に対して

$$m\,(E \times F) = m_X(E) m_Y(F)$$

をみたすものを m_X と m_Y の直積測度と言い、$m_X \times m_Y$ または $m_X \otimes m_Y$ と表す。

今、直積測度の定義を述べたが、その存在および一意性は自明では無い。一意性が破れる例については演習問題 3.11 を参照せよ.

定理 3.4. 測度空間 $(X, \mathcal{F}_X, m_X), (Y, \mathcal{F}_Y, m_Y)$ を考える。
(1) 直積測度 $m_X \times m_Y$ が存在する。
(2) 測度空間 $(X, \mathcal{F}_X, m_X), (Y, \mathcal{F}_Y, m_Y)$ が σ 有限ならば直積測度は一意である。

注 3.5. $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ 上にルベーグ測度を制限したものを $m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}$ のように書くことにする。

(i) $\quad \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+m}),$

(ii) $\quad m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)} \times m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)} = m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+m})},$

が成立する. したがって, 直積測度 $m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)} \times m_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)}$ はルベーグ測度をボレル集合族に制限したものになる.

演習問題 3.6. $(X, \mathcal{F}_X, m_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, m_Y)$ は σ 有限とする. X, Y それぞれの有限加法族 $\mathcal{A}_X$, $\mathcal{A}_Y$ が $\sigma(\mathcal{A}_X) = \mathcal{F}_X$, $\sigma(\mathcal{A}_Y) = \mathcal{F}_Y$ を満たすとする. m を $(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ 上の測度とする. 任意の $A \in \mathcal{A}_X$, $B \in \mathcal{A}_Y$ について

$$m(A \times B) = m_X(A) m_Y(B) \tag{3.1}$$

を満たせば $m = m_X \times m_Y$ であることを単調族定理を用いて示せ. またこのことを用いて注 3.5 の (ii) を示せ.

まず直積測度の存在・一意性を示す。まず次の記号を導入する.

定義 3.7. $A \subset X \times Y$ とする.

$$A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}, \qquad A^y = \{x \in X \mid (x, y) \in A\}$$

と切り口集合を定める. $A_x \subset Y$, $A^y \subset X$ である.

補題 3.8. $\tilde{\mathcal{A}}$ を $A \times B$ $(A \in \mathcal{F}_X, B \in \mathcal{F}_Y)$ の形の積集合の互いに共通部分の無い有限和の形で表される集合全体とする.
(1) $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ である.
(2) $A = \coprod_{i=1}^N (E_i \times F_i) \in \mathcal{A}$ に対して

$$A_x = \coprod_{\{i \mid x \in E_i\}} F_i \in \mathcal{F}_Y, \quad A^y = \coprod_{\{i \mid y \in F_i\}} E_i \in \mathcal{F}_X. \tag{3.2}$$

また

$$m_Y(A_x) = \sum_{i=1}^N 1_{E_i}(x) m_Y(F_i), \quad m_X(A^y) = \sum_{i=1}^N 1_{F_i}(x) m_X(E_i). \tag{3.3}$$

特に $x \mapsto m_Y(A_x)$, $y \mapsto m_X(A^y)$ はそれぞれ $\mathcal{F}_X$, $\mathcal{F}_Y$ 可測である.
(3) $A = \coprod_{i=1}^N (E_i \times F_i) \in \mathcal{A}$ に対して

$$m(A) = \sum_{i=1}^N m_X(E_i) m_Y(F_i) \tag{3.4}$$

と定めると

$$m(A) = \int_X m_Y(A_x) dm_X(x) = \int_Y m_X(A^y) dm_Y(y)$$

特に (3.4) の定義は A の表示によらない.
(4) m は $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度になる。かつ m は $\mathcal{A}$ で完全加法的である。

証明. (1) 明らかである. (2) $i \neq j$ とする. $(E_i \times F_i) \cap (E_j \cap F_j) = \emptyset$ なので $x \in E_i$ かつ $x \in E_j$ $(i \neq j)$ ならば $F_i \cap F_j = \emptyset$ である. 従って式 (3.2) の A_x の表示の式で $\coprod$ と書けることがわかる. A^y の方も同様である. (3.3) も (3.2) から従う. (3) は (3.3) の両辺を積分すれば得られる. (4) の $\mathcal{A}$ 上の完全加法性を示す. 有限加法性の方は完全加法性から従う. $E \in \mathcal{F}_X, F \in \mathcal{F}_Y$ について

$$E \times F = \coprod_{i=1}^\infty E_i \times F_i \tag{3.5}$$

のとき

$$m_X(E) m_Y(F) = \sum_{i=1}^\infty m_X(E_i) m_Y(F_i)$$

となることを示せばよい. (3.5) より

$$1_{E \times F}(x, y) = \sum_{i=1}^\infty 1_{E_i}(x) 1_{F_i}(y). \tag{3.6}$$

$x \in X$ を固定し y の関数と考えると

$$y \mapsto 1_{E \times F}(x, y), \quad y \mapsto 1_{E_i}(x) 1_{F_i}(y)$$

は $\mathcal{F}_Y$ 可測である. x を固定し (3.6) の両辺を y の関数として m_Y について積分する. 単調収束定理より

$$1_E(x) m_Y(F) = \sum_{i=1}^\infty 1_{E_i}(x) m_Y(F_i).$$

この両辺を測度 m_X に関して積分すると

$$m_X(E) m_Y(F) = \sum_{i=1}^\infty m_X(E_i) m_Y(F_i)$$

と期待した結果が得られる. □

定理 3.4 の証明. (1) 補題 3.8 の有限加法的測度は $\mathcal{A}$ 上完全加法的なので, これを Hopf の拡張定理により拡張すれば良い.

(2) 仮定より集合列 $X_i \in \mathcal{F}_X, Y_i \in \mathcal{F}_Y$ で $m_X(X_i) < \infty$, $m_Y(Y_i) < \infty$, $X_i \subset X_{i+1}, Y_i \subset Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ および $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, $Y = \cup_{i=1}^{\infty} Y_i$ となるものが存在する. 補題 3.8 の有限加法的測度 m は $m(X_i \times Y_i) = m_X(X_i) m_Y(Y_i) < \infty$, $\cup_{i=1}^{\infty}(X_i \times Y_i) = X \times Y$ だから拡張は一意である. □

より一般に有限個の測度空間の直積測度空間は次のように定める。

定義 3.9. [有限直積測度空間] $(X_i, \mathcal{F}_i, m_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ を測度空間とする。直積空間 $X_1 \times \cdots X_n$ ($\prod_{i=1}^n X_i$ のようにも書く) の集合族

$$\{A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{F}_i\}$$

で生成される σ-加法族を $\mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$ ($\prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ のようにも書く) と書き、直積 σ 加法族という。また、可測空間 $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i)$ 上の測度 m で

$$m(A_1 \times \cdots \times A_n) = m_1(A_1) \times \cdots \times m_n(A_n)$$

を満たすものを直積測度といい、$m_1 \times \cdots \times m_n$, $\otimes_{i=1}^n m_i$, などと書く。

存在と一意性について次が定理 3.4 から容易に従う。

定理 3.10. 上記の状況で直積測度 $m_1 \times \cdots \times m_n$ が存在する。また、すべての m_i が σ 有限ならば拡張は一意的である。

演習問題 3.11. $X = Y = [0,1], \mathcal{F}_X = \mathcal{F}_Y = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $m_X =$ ルベーグ測度, m_Y は要素の数を対応させる測度とする.

(1) m を定理 3.4 (1) の証明の中で構成した Carathéodory 外測度から定まる直積測度とする. $\Delta = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$ と対角集合を定める. $m(\Delta) = +\infty$ を示せ.

(2) $\tilde{m}(A) = m(A \setminus \Delta)$ と定めると $\tilde{m}$ も直積測度でありかつ $m \neq \tilde{m}$ となることを示せ.

3.2 Fubini の定理 (完備化しない場合)

直積測度に対する Fubini の定理を述べる。**この節では σ 有限な測度空間のみを考える. すなわち次を仮定する.**

仮定 3.12. $(X, \mathcal{F}_X, m_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, m_Y)$ は σ 有限すなわち

(i) $X_n \in \mathcal{F}_X, Y_n \in \mathcal{F}_Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $m_X(X_n) < \infty, m_Y(Y_n) < \infty$,

(ii) $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ かつ $\cup_n X_n = X$,
$Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n \subset \cdots$ かつ $\cup_n Y_n = Y$

と仮定する.

補題 3.13 (定義関数に対する Fubini の定理)**.** $A \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ とする。

(1) 任意の $x \in X, y \in Y$ に対して $A_x \in \mathcal{F}_Y$, $A^y \in \mathcal{F}_Y$.

(2) $x(\in X) \mapsto m_Y(A_x)$, $y(\in Y) \mapsto m_X(A^y)$ はそれぞれ $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y$-可測関数である。

(3)

$$(m_X \otimes m_Y)(A) = \int_X m_Y(A_x) dm_X(x) = \int_Y m_X(A^y) dm_Y(y). \tag{3.7}$$

証明. $\mathcal{A}$ を定義 3.1 で定義した有限加法族とする.

(1)　この主張は σ 有限性無しで成立する. $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y \mid A_x \in \mathcal{F}_Y, A^y \in \mathcal{F}_X\}$ とおく. $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ は補題 3.8 (2) から従う. 従って $\mathcal{C}$ が σ 加法族であることを示せばよい.

(2), (3):

$$\mathcal{G} = \Big\{ A \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y \ \Big| A \cap (X_n \times Y_n) \text{ について (2), (3) の関係式が成立する.} \\ \text{ただし } n \text{ は任意の自然数} \Big\}$$

と定める. 補題 3.8 より $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ が単調族であることを示せば単調族定理より $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$ となり (2), (3) が $A \cap (X_n \times Y_n)$ $(A \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y, n \in \mathbb{N})$ の形の集合について成立することがわかる. 従って $n \to \infty$ として集合の単調増加列に対する測度の連続性, 単調収束定理により (2), (3) が一般の $A \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ について示されたことになる. $\mathcal{G}$ が単調族であることはやはり集合の単調増加列に対する測度の連続性, 単調収束定理および

- 有限な測度の集合の単調減少列に対する測度の連続性[18]

から従う. □

補題 3.14 (単関数に対する Fubini の定理)**.** $(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ 上の可測な単関数が $f(x,y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{A_i}(x,y)$ と書けているとする。ここで、$A_i \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ である。次が成立する。

(1)

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{(A_i)_x}(y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{(A_i)^y}(x) \tag{3.8}$$

である。従って補題 3.13 より x, y を固定して得られる関数 $y \to f(x,y)$, $x \to f(x,y)$ は $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y$-可測である。

(2) $\alpha_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq k)$ とする。$F(x) = \int_Y f(x,y) dm_Y(y)$, $G(y) = \int_X f(x,y) dm_X(x)$ とおく。次の等式が成立する。

$$F(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i m_Y((A_i)_x) \tag{3.9}$$

$$G(y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i m_X((A_i)^y). \tag{3.10}$$

[18] これを保証するため $X_n \times Y_n$ との共通部分を取り測度有限としている

さらに

$$\int_X F(x)dm_X(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (m_X \otimes m_Y)(A_i) = \int_{X\times Y} f(x,y)(m_X \otimes m_Y)(dx,dy) \tag{3.11}$$

$$\int_Y G(y)dm_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (m_X \otimes m_Y)(A_i) = \int_{X\times Y} f(x,y)(m_X \otimes m_Y)(dx,dy). \tag{3.12}$$

定理 3.15 (直積測度に対する Fubini の定理 (I))**.** $f(z)$ $(z = (x,y) \in X \times Y, x \in X, y \in Y)$ を $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$-可測関数とする。
(1) $y \in Y$ を固定する。関数 $x(\in X) \to f(x,y)$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数である。$x \in X$ を固定して得られる Y 上の関数 $y \to f(x,y)$ も $\mathcal{F}_Y$-可測である。
(2) (非負値関数のとき) すべての $z = (x,y)$ について $f(x,y) \geq 0$ とする。このとき、x, y の関数

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_Y f(x,y)dm_Y(y), \\ G(y) &= \int_X f(x,y)dm_X(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

は ($+\infty$ の値を取るかも知れない) $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y$-可測関数である。更に次の等式が成立する：

$$\int_{X\times Y} f(z)dm_X \otimes m_Y(z) = \int_X F(x)dm_X(x) = \int_Y G(y)dm_Y(y) \tag{3.14}$$

(3) (一般の場合) $f \in L^1(X \times Y, m_X \otimes m_Y)$ とする。このとき、以下が成立する。

(i) $m_X(N_1) = 0$ $(N_1 \in \mathcal{F}_X)$ が存在して、$x \notin N_1$ に対して $f(x,\cdot) \in L^1(Y, m_Y)$. 同様に $m_Y(N_2) = 0$ $(N_2 \in \mathcal{F}_Y)$ が存在して、$y \notin N_2$ に対して $f(\cdot,y) \in L^1(X, m_X)$.

(ii) 関数 $F(x) = \int_Y f(x,y)dm_Y(y)$ $(x \in N_1^c)$, $G(y) = \int_X f(x,y)dm_X(x)$ $(y \in N_2^c)$ はそれぞれ $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y$-可測かつ X, Y 上の積分可能な関数で次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f(z)dm_X \otimes m_Y(z) &= \int_X F(x)dm_X(x) \\ &= \int_Y G(y)dm_Y(y). \end{aligned} \tag{3.15}$$

証明. (1) $f = f^+ - f^-$ のように正部分, 負部分 f^- のそれぞれについて示せばよいので, $f \geq 0$ としてよい. $f_n \uparrow f$ のように下から単調増加して f に収束する単関数があるので, 非負単関数について示せば良い. この場合はすでに補題 3.14 で示した.

(2) $f_n \uparrow f$ となる非負単関数をとる. $F_n(x) = \int_Y f_n(x,y)dm_Y(y)$ とおく. 補題 3.14 より F_n は $\mathcal{F}_X$-可測関数で

$$\int_{X\times Y} f_n(z)dm_X \otimes m_Y(z) = \int_X F_n(x)dm_X(x).$$

この式で $n \to \infty$ とし単調収束定理を用いれば $\int_{X\times Y} f(z)dm_X \otimes m_Y(z) = \int_X F(x)dm_X(x)$. G の方も同様である.

(3) (i) を示す.(2) の結果より

$$\int_{X\times Y}|f(z)|dm_X\otimes m_Y(z)=\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|dm_Y(y)\right)dm_X(x)<\infty.$$

従って $N_1=\{x\in X\mid \int_Y|f(x,y)|dm_Y(y)=\infty\}$ とおくと $N_1\in\mathcal{F}_X$, $m_X(N_1)=0$ でありこれは (i) を示している (x に関する積分の方も同様). (ii) を示す. まず $F(x)$ ($x\in N_1^c$) の $\mathcal{F}_X$-可測性を示す. $f=f^+-f^-$ と正部分, 負部分に分ける.

$$\int_Y f^+(x,y)dm_Y(y)<\infty,\quad \int_Y f^-(x,y)dm_Y(y)<\infty\qquad x\in N_1^c$$

であり

$$x(\in X)\mapsto\int_Y f^+(x,y)dm_Y(y),\quad x(\in X)\mapsto\int_Y f^-(x,y)dm_Y(y)$$

は ($+\infty$ を取るかもしれないが)$\mathcal{F}_X$-可測だからその差

$$F(x)=\int_Y f^+(x,y)dm_Y(y)-\int_Y f^-(x,y)dm_Y(y)\qquad x\in N_1^c$$

も $\mathcal{F}_X$-可測である. 次に F が可積分であることを示す.

$$\begin{aligned}\int_X|F(x)|dm_X(x)&=\int_X\left|\int_Y f(x,y)dm_Y(y)\right|dm_X(x)\le\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|dm_Y(y)\right)dm_X(x)\\&=\int_{X\times Y}|f(z)|dm_X\otimes m_Y(z)<\infty\end{aligned}\tag{3.16}$$

より F は可積分である. 最後に (3.15) を示す.

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}f(z)dm_X\otimes m_Y(z)&=\int_{X\times Y}f^+(z)dm_X\otimes m_Y(z)-\int_{X\times Y}f^-(z)dm_X\otimes m_Y(z)\\&=\int_X\left(\int_Y f^+(x,y)dm_Y(y)\right)dm_X(x)-\int_X\left(\int_Y f^-(x,y)dm_Y(y)\right)dm_X(x)\\&=\int_{N_1^c}\left(\int_Y f^+(x,y)dm_Y(y)\right)dm_X(x)-\int_{N_1^c}\left(\int_Y f^-(x,y)dm_Y(y)\right)dm_X(x)\\&=\int_{N_1^c}\left(\int_Y f^+(x,y)dm_Y(y)-\int_Y f^-(x,y)dm_Y(y)\right)dm_X(x)\\&=\int_{N_1^c}\left(\int_Y(f^+(x,y)-f^-(x,y))dm_Y(y)\right)dm_X(x)\\&=\int_{N_1^c}\left(\int_Y f(x,y)dm_Y(y)\right)dm_X(x)\\&=\int_X F(x)dm_X(x).\end{aligned}\tag{3.17}$$

□

注 3.16. 以下の注意は次の節の完備化した場合の Fubini の定理についても同様に言えることである.
(1) $f=f(x,y)$ が $\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y$-可測とする. $A=\{x\in X\mid \int_Y|f(x,y)|dm_Y(y)<\infty\}$ とおくと $A\in\mathcal{F}_X$ である. さらに関数 $x(\in A)\mapsto F(x)=\int_Y f(x,y)dm_L(y)$ は $\mathcal{F}_X$-可測である. しかし $A=X$ で F が可積分を仮定しても f 自身が直積測度 $m_X\otimes m_Y$ に関して可積分とは限らない. こう言った例については例えば伊藤清三などの本を参照せよ.
(2) $f=f(x,y)$ の可積分性をチェックするには $|f(x,y)|$ を逐次積分して得られる (3.14) の式の真ん中または最右辺の積分が有限であることをみればよい.

3.3 Fubini の定理 (完備化した場合)

定理 3.17. $(X,\mathcal{F}_X,m_X)$, $(Y,\mathcal{F}_Y,m_Y)$ を完備な σ 有限測度空間とする. $(X\times Y,\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y,m_X\times m_Y)$ の完備化を $(X\times Y,\overline{\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y},\overline{m_X\times m_Y})$ とする.
(1) $f=f(x,y)$ $((x,y)\in X\times Y)$ を $\overline{\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y}$ 可測な関数とする. このとき

(a) $m_X(N_1)=0$ なる N_1 が存在して,

$$\text{任意の } x\in X\setminus N_1 \text{ に対して } y\mapsto f(x,y) \text{ は } \mathcal{F}_Y \text{ 可測.} \tag{3.18}$$

(b) $m_Y(N_2)=0$ なる N_2 が存在して

$$\text{任意の } y\in Y\setminus N_2 \text{ に対して, } x\mapsto f(x,y) \text{ は } \mathcal{F}_X \text{ 可測.} \tag{3.19}$$

(2) $f=f(x,y)$ を非負値 $\overline{\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y}$ 可測な関数とする.

(c) 測度 0 の除外集合 $N_1\subset X, N_2\subset Y$ が存在し (3.18), (3.19) が成立し, 写像

$$x(\in X\setminus N_1)\mapsto F(x)=\int_Y f(x,y)dm_Y(y),\qquad y(\in Y\setminus N_2)\mapsto G(y)=\int_X f(x,y)dm_X(x) \tag{3.20}$$

はそれぞれ $\mathcal{F}_X$, $\mathcal{F}_Y$ 可測.

(d) 次の等式が成立する.

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d\overline{m_X\times m_Y}(x,y)=\int_X F(x)dm_X(x)=\int_Y G(y)dm_Y(y). \tag{3.21}$$

(3) $f\in L^1(X\times Y,\overline{m_X\times m_Y})$ とする. このとき、以下が成立する。

(e) $m_X(N_1)=0$ が存在して、$x\notin N_1$ に対して $f(x,\cdot)\in L^1(Y,dm_Y)$. 同様に $m_Y(N_2)=0$ が存在して, $y\notin N_2$ に対して $f(\cdot,y)\in L^1(X,dm_X)$.

(f) (e) の除外集合 N_1,N_2 に対して (3.20), (3.21) が成立する.

証明. これは補題 3.13 と定理 3.15 を用いて示す.
(1) 演習問題 2.8 より f が $\overline{\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y}$-可測のとき, $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$-可測な $\tilde{f} = \tilde{f}(x,y)$ および測度 0 の集合 $N \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ が存在して

$$\{(x,y) \mid f(x,y) \neq \tilde{f}(x,y)\} \subset N.$$

補題 3.13 より

$$\int_Y m_X(N^y)dm_Y(y) = \int_X m_Y(N_x)dm_X(x) = 0. \tag{3.22}$$

$$N_1 = \{x \in X \mid m_Y(N_x) > 0\} \tag{3.23}$$

$$N_2 = \{y \in Y \mid m_X(N^y) > 0\} \tag{3.24}$$

と定めると $N_1 \in \mathcal{F}_X, N_2 \in \mathcal{F}_Y$ かつ $m_X(N_1) = m_Y(N_2) = 0$. また

$$\text{すべての } x \text{ について} \quad \{y \in Y \mid f(x,y) \neq \tilde{f}(x,y)\} \subset N_x \tag{3.25}$$

$$\text{すべての } y \text{ について} \quad \{x \in X \mid f(x,y) \neq \tilde{f}(x,y)\} \subset N^y \tag{3.26}$$

だから

1. $x \notin N_1$ ならば $m_Y(N_x) = 0$ となるので $f(x,y) = \tilde{f}(x,y)$ m_Y-a.e. y.
   従って $x \notin N_1$ の時 $y \mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測[19]
2. 同様に $y \notin N_2$ に対して $x \mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{F}_X$-可測.

これで (1) が示された.
(2) (1) の $\tilde{f}$, 測度 0 の集合 N を用いて定義された測度 0 の集合 $N_1 \subset X$, $N_2 \subset Y$ を取る. このとき (1) の結果から $x \notin N_1$, $y \notin N_2$ に対して $F(x) = \int_Y f(x,y)dm_Y(y)$, $G(y) = \int_X f(x,y)dm_X(x)$ は ($+\infty$ かも知れぬが) 確定し次が成立する:

$$F(x) = \int_Y \tilde{f}(x,y)dm_Y(y) \qquad \forall x \in N_1^c, \tag{3.27}$$

$$G(y) = \int_X \tilde{f}(x,y)dm_X(x) \qquad \forall y \in N_2^c. \tag{3.28}$$

定理 3.15(2) より F, G はそれぞれ $\mathcal{F}_X$, $\mathcal{F}_Y$-可測であり,

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d\overline{m_X \times m_Y}(x,y) &= \int_{X\times Y} \tilde{f}(x,y)dm_X \otimes m_Y(z) \\ &= \int_X F(x)dm_X(x) = \int_Y G(y)dm_Y(y).\end{aligned} \tag{3.29}$$

(3) f の正部分 f^+, 負部分 f^- を考える. $N_1 = N_1^+ \cup N_1^-$, $N_2 = N_2^+ \cup N_2^-$ と定めればよい. ここで N^+ を f^+ に対する (1) の証明の中で定義した測度 0 の集合とする.

$$N_1^+ = \left\{x \in X \mid m_Y((N^+)_x) > 0\right\} \cup \left\{x \in X \mid m_Y((N^+)_x) = 0, \int_Y f^+(x,y)dm_Y(y) = +\infty\right\}.$$

N_1^- も f^- を用いて定義する. N_2 の定義も同様である. □

[19] $\mathcal{F}_Y$ は完備と仮定してある. 演習問題 2.8 (2) を参照せよ.

注 3.18. $f=f(x,y)$ が $\overline{\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y}$-可測とする．

$$A=\left\{x \mid y\mapsto f(x,y) \text{ は } \mathcal{F}_Y\text{-可測で } \textstyle\int_Y |f(x,y)|dm_Y(y)<+\infty\right\}$$

とおく．このとき $A\in\mathcal{F}_X$ かつ $x(\in A)\mapsto \int_Y f(x,y)dm_Y(y)$ は $\mathcal{F}_X$-可測.

4 ユークリッド空間上のフビニの定理

ユークリッド空間上のフビニの定理は一般の直積測度に対するフビニの定理から従う．そのさい, 注 3.5 に注意する必要がある．講義ではこの節の内容をあらためて説明する事はしないが, ルベーグ測度の場合に再度, 定理を述べなおしておく．以下の記号を使う。

定義 4.1. $A\subset\mathbb{R}^{n+m}$ に対して

$$A_x=\{y\in\mathbb{R}^m \mid (x,y)\in A\} \quad (x\in\mathbb{R}^n)$$
$$A^y=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (x,y)\in A\} \quad (y\in\mathbb{R}^m)$$

以下で $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{n+m}$ 上の３つのルベーグ測度が出てくるがいずれも m_L と書くことにする。

4.1 ボレル可測関数に対する Fubini の定理

次がボレル可測関数に対する Fubini の定理である。

定理 4.2. $f(z)$ $(z=(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}, x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m)$ はボレル可測関数とする。
(1) $y\in\mathbb{R}^m$ を固定する。関数 $x(\in\mathbb{R}^n)\to f(x,y)$ は $\mathbb{R}^n$ 上のボレル可測関数である。$x\in\mathbb{R}^n$ を固定して得られる $\mathbb{R}^m$ 上の関数 $y\to f(x,y)$ もボレル可測である。
(2) (非負値関数のとき) すべての $z=(x,y)$ について $f(x,y)\ge 0$ とする。このとき、x,y の関数

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y),$$
$$G(y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dm_L(x) \tag{4.1}$$

は ($+\infty$ の値を取るかも知れない) ボレル可測関数である。更に次の等式が成立する：

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dm_L(z)=\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dm_L(x)=\int_{\mathbb{R}^m} G(y)dm_L(y) \tag{4.2}$$

(3) (一般の場合) $f\in L^1(\mathbb{R}^{n+m},m_L)$ とする。このとき、以下が成立する。

(i) $m_L(N_1)=0$ $(N_1\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ が存在して、$x\notin N_1$ に対して $f(x,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^m,m_L)$. 同様に $m_L(N_2)=0$ $(N_2\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m))$ が存在して、$y\notin N_2$ に対して $f(\cdot,y)\in L^1(\mathbb{R}^n,m_L)$.

(ii) 関数 $F(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y)$ $(x\in N_1^c)$, $G(y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dm_L(x)$ $(y\in N_2^c)$ はそれぞれボレル可測かつ $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ 上のルベーグ積分可能な関数で次の等式が成立する。

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dm_L(z)=\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dm_L(x) = \int_{\mathbb{R}^m} G(y)dm_L(y). \tag{4.3}$$

注 4.3. 上記の (ii) の statement に関しては, 注意が必要である. すなわち, 関数 $F(x), G(y)$ は測度 0 の集合の上で値が決まっていないがそこでどのような値をとろうが積分の値は変わらないので, $\int_{N_1^c} F(x)dm_L(x)$ ではなく $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dm_L(x)$ と書いている.

4.2 ルベーグ可測関数に対する Fubini の定理

ここではルベーグ可測関数に対するフビニの定理を再度述べておく.

補題 4.4. $A\in\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^{n+m})$ とする。
(1) ルベーグ測度ゼロの集合 $N_1\subset\mathbb{R}^n, N_2\subset\mathbb{R}^m$ が存在して任意の $x\in N_1^c$, $y\in N_2^c$ に対して A_x, A^y はルベーグ可測集合である。さらに $x(\in N_1^c)\to m_L(A_x)$, $y(\in N_2^c)\to m_L(A^y)$ はルベーグ可測関数である。
(2)

$$m_L(A)=\int_{\mathbb{R}^n} m_L(A_x)dm_L(x)=\int_{\mathbb{R}^m} m_L(A^y)dm_L(y). \tag{4.4}$$

が成立する。

定理 4.5. $f(z)$ $(z=(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}, x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m)$ はルベーグ可測関数とする。
(1) $y\in\mathbb{R}^m$ を固定する。ルベーグ測度ゼロの集合 $N_1\subset\mathbb{R}^n, N_2\subset\mathbb{R}^m$ が存在して次が成立する。$x\in N_1^c$ を固定して得られる関数 $y(\in\mathbb{R}^m)\to f(x,y)$, $y\in N_2^c$ を固定して得られる関数 $x(\in\mathbb{R}^n)\to f(x,y)$ はルベーグ可測である。
(2) (非負値関数のとき) すべての $z=(x,y)$ について $f(x,y)\ge 0$ とする。このとき、x,y の関数 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y), \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dm_L(x)$ は ($+\infty$ の値を取るかも知れない) ルベーグ可測関数である。更に次の等式が成立する：

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dm_L(z)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y)\right)dm_L(x)=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dm_L(x)\right)dm_L(y) \tag{4.5}$$

(3) (一般の場合) $f\in L^1(\mathbb{R}^{n+m}, m_L)$ とする。このとき、以下が成立する。

(i) $m_L(N_1)=0$ $(N_1\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ が存在して、$x\notin N_1$ に対して $f(x,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^m, m_L)$. 同様に $m_L(N_2)=0$ $(N_2\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m))$ が存在して、$y\notin N_2$ に対して $f(\cdot,y)\in L^1(\mathbb{R}^n, m_L)$.

(ii) 関数 $x(\notin N_1) \to \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y), y(\notin N_2) \to \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(x)$ はそれぞれルベーグ可測かつ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 上のルベーグ積分可能な関数で次の等式が成立する。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dm_L(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y)\right) dm_L(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dm_L(x)\right) dm_L(y). \end{aligned} \tag{4.6}$$

注 4.6. (1) $f(x,y)$ がルベーグ可測で $\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|dm_L(y)\right)dm_L(x)$ が有限ならば $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}, m_L)$ であることもわかる。
(2) $f(x,y)$ が $A \in \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^{n+m})$ 上のルベーグ可積分関数ならば以下のルベーグ積分はすべて well-defined で

$$\begin{aligned}\int_A f(z)dm_L(z) &= \int_{A^y} \left(\int_{A_x} f(x,y)dm_L(y)\right) dm_L(x) \\ &= \int_{A_x} \left(\int_{A^y} f(x,y)dm_L(x)\right) dm_L(y). \end{aligned} \tag{4.7}$$

が成立する。

演習問題 4.7. I を $\mathbb{R}^n$ の直方体、J を $\mathbb{R}^m$ の直方体とし $f(x,y)$ が $I \times J$ でリーマン積分可能とする。
(1) m_L-*a.e.* $x \in I$ に対して関数 $y \to f(x,y)$, m_L-*a.e.* $y \in J$ に対して関数 $x \to f(x,y)$ はリーマン積分可能であることを示せ。
(2) J での有界関数 $F(y)$ に対して、リーマン上積分、下積分を $\overline{R}\text{-}\int_I F(y)dy$, $\underline{R}\text{-}\int_I F(y)dy$ と書く事にする。このとき、$\overline{R}\text{-}\int_J f(x,y)dy$, $\underline{R}\text{-}\int_J f(x,y)dy$ は I 上でリーマン積分可能で

$$\int_I \left(\overline{R}\text{-}\int_J f(x,y)dy\right)dx = \int_I \left(\underline{R}\text{-}\int_J f(x,y)dy\right)dx = \int_{I\times J} f(x,y)dxdy$$

を示せ。

注 4.8. 上の演習問題で (2) を示すのに、(1) は使う必要は無い。ただし、(1) の結果から、ほとんどすべての x について $\overline{R}\text{-}\int_J f(x,y)dy = \underline{R}\text{-}\int_J f(x,y)dy$ が言えていることになる。

5　ルベーグ測度に関する注意

以下の定理は f が連続関数で積分が有限になるような状況で微積分で習った.

定理 5.1. [変数変換の公式] G_1, G_2 を $\mathbb{R}^n$ の連結な開集合とし $T : G_1 \to G_2$ を上への一対一の C^1-写像で逆も C^1 級とする.
(1) f を G_2 上のルベーグ可測関数とする. このとき $f \circ T$ は G_1 上のルベーグ可測関数である.
(2) f を G_2 上の非負ルベーグ可測関数とする. このとき

$$\int_{G_1} f(T(x))|\det DT(x)|dm_L(x) = \int_{G_2} f(x)dm_L(x). \tag{5.1}$$

証明. (1) f がボレル可測の場合を考える．T は連続写像なので $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ならば $T^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$．従って $f \circ T$ はボレル可測．f がルベーグ可測の時を考える．f は単関数で近似できるので定義関数 $f = 1_A$ (A はルベーグ可測) の場合に示せば十分．$A = B \cup N$ ($B \cap N = \emptyset$) とボレル可測集合 B, ルベーグ測度 0 の集合 N の disjoint union で書ける．

$$1_A \circ T = 1_{T^{-1}(A)} = 1_{T^{-1}(B)} + 1_{T^{-1}(N)} \tag{5.2}$$

に注意する．ルベーグ測度 0 のボレル可測集合 N' が存在し $N \subset N'$．$T^{-1}(N) \subset T^{-1}(N')$ なので $T^{-1}(N')$ が測度 0 であることを示せば $T^{-1}(N)$ のルベーグ外測度も 0 となり従ってルベーグ測度 0 のルベーグ可測集合とわかる．よってボレル集合 $T^{-1}(N')$ の測度が 0 を示せばよいが, これは (5.1) を $f = 1_{N'}$ の場合に適用すれば証明されることなので (2) を証明すればよい．

(2) まず f がボレル可測関数の場合を示す．有界半開区間 $I = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i]$ を $\bar{I} \subset G_2$ のようにとる．

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset I \;\middle|\; A \text{ は } \prod_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i] \text{ の形の半開区間の有限和として表される集合全体} \right\} \tag{5.3}$$

と集合 I 上の有限加法族を取る．$A \in \mathcal{A}$ ならば

$$\int_{T^{-1}(I)} 1_A(T(x)) |\det DT(x)| dm_L(x) = \int_I 1_A(x) dm_L(x). \tag{5.4}$$

(5.4) はリーマン積分の範囲で証明できる結果なのでここでは示さない．

$$\mathcal{C} = \{ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \mid A \subset I \text{ かつ } 1_A \text{ について (5.1) が成立する} \}$$

とおくと $\mathcal{C}$ は単調族かつ $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$．よって単調族定理より[20] $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{A}) = \{ A \subset I \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \}$．従って (5.1) が 1_A ($A \subset I, A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$) について成立する．$G_2 = \cup_{i=1}^\infty I_i$ (I_i は半開区間で $\overline{I_i} \in G_2$ なるもの) と書けることから[21]一般の非負ボレル関数についても成立することがわかる．この結果を (1) の証明で考えた $f = 1_{N'}$ の場合に適用すると

$$\int_{T^{-1}(N')} |\det DT(x)| dm_L(x) = m_L(N') = 0$$

任意の x について $|\det DT(x)| > 0$ だから $m_L(T^{-1}(N')) = 0$ を得て (1) の証明が終わった．さて (5.1) を非負ルベーグ可測関数について示す．単関数について示せば十分．この場合は等式 (5.2) と $T^{-1}(N)$ が測度 0 の集合であることから従う． □

系 5.2. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を線形写像とし $\det T \neq 0$ とする．$A \subset \mathbb{R}^n$ をルベーグ可測集合とする．$T(A)$ もルベーグ可測集合で

$$m_L(T(A)) = |\det T| m_L(A). \tag{5.5}$$

注 5.3. 特に T が直交変換のときルベーグ測度は不変であることがわかる． より一般的には $|\det DT(x)| = 1$ のときルベーグ測度が不変になる．また $T(x) = x + v$ ($v \in \mathbb{R}^n$) のような平行移動の変換もルベーグ測度を保存する．

[20] $\sigma(\mathcal{A}) = \{ A \subset I \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \}$ も示すべきことである．
[21] disjoint union とは限らない

定理 5.4. $n \geq m$ を自然数とする. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像で T の階数は m とする.

(1) $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ ならば $T^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. $m_L(N) = 0$ ならば $m_L(T^{-1}(N)) = 0$. また A がルベーグ可測なら $T^{-1}(A)$ もルベーグ可測である.

(2) f を $\mathbb{R}^m$ 上のルベーグ可測関数とする. このとき $f \circ T$ は $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ可測関数である.

(3) $f(x) = g(x)$ m_L-a.e. $x \in \mathbb{R}^m$ ならば $f \circ T = g \circ T$ m_L-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

証明. (1) T は連続写像なので $T^{-1}(A)$ もボレル集合である. $N \subset N'$ となる測度 0 のボレル集合 N' を取る. $T^{-1}(N) \subset T^{-1}(N')$ なので $m_L(T^{-1}(N')) = 0$ を示せばよい. まず $n = m$ の場合を考えよう. 定理 5.1 で $f = 1_{N'}$ とおくと

$$m_L(T^{-1}(N')|\det T| = m_L(N') = 0.$$

従って $m_L(T^{-1}(N')) = 0$. 次に $m < n$ とする. 線形写像 $T_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ を適当に取り $S = (T, T_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とおくと $\det S \neq 0$ とできる. $f = 1_{N' \times \mathbb{R}^{n-m}}$ に (5.1) を適用し

$$m_L(T^{-1}(N'))|\det S| = m_L(N' \times \mathbb{R}^{n-m}) = 0$$

よって $T^{-1}(N')$ の測度は 0 とわかる. 一般にルベーグ可測集合 A はボレル集合 B と $N \cap B = \emptyset$ となるルベーグ測度 0 の集合 N を用いて $A = B \cup N$ と書けるので以上 2 つの結果から $T^{-1}(A)$ もルベーグ可測.

(2) $f = 1_A$ の単関数のときに示せば良い. $1_A \circ T = 1_{T^{-1}(A)}$ だから (1) の結果から $1_A \circ T$ はルベーグ可測関数である.

(3) $N = \{y \in \mathbb{R}^m \mid f(y) \neq g(y)\}$ とおくと $m_L(N) = 0$. また

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f \circ T(x) \neq g \circ T(x)\} = T^{-1}(N).$$

(1) の結果から $T^{-1}(N)$ のルベーグ測度は 0 だから証明終わり. □

注 5.5. (1) $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ を $T(x, y) = x \pm y$ と定めるとこの写像のランクは n. 従って f が $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ可測関数ならば $f(x+y)$, $f(x-y)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上のルベーグ可測関数である.

(2) 定理 5.4 (3) の結果は $f \in L^p(\mathbb{R}^m, dx)$ などのとき, 重要である. というのは $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ の元は測度 0 の集合を除いて一致するような関数を同一視しているので[22], その分, 代表元の取り方の不定性がある. しかし定理 5.4 (3) はその代表元の取り方によらず L^p の元として $f \circ T$ に意味が付くことを意味している. これは線形写像だけでなく一般の写像についても微分 $DT(x)$ のランクが像の空間の次元と常に同じかランクが次元より小さい集合 (これは閉集合になる) のルベーグ測度が 0 ならばルベーグ測度 0 の集合の逆像の測度はやはり 0 となることが証明でき, $f \circ T$ も同じように意味をもつことになる.

(3) T の階数が m でないと一般には A がルベーグ可測集合だとしても $T^{-1}(A)$ がルベーグ可測となるとは言えない. というのは $n = m = 2$ とし, $T(x, y) = (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ という線形写像で $A =$ ルベーグ非可測集合 $\times \{0\}$ という場合を考えればよい.

[22] 前期の講義では $\mathcal{F}$-可測で可積分性 $\int_X |f(x)|^p dm(x) < \infty$ を満たす関数全体を $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ と書き, ここで言う同一視をして得られる商空間を $L^p(X, \mathcal{F}, m)$ と表すと説明した.

定義 5.6. f, g を $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ可測関数とする．$f(x-y)g(y)$ が y の可積分関数の時 x の関数 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ を f と g の畳み込み (convolution または合成積) と言い, $f * g$ と書く.[23]

演習問題 5.7. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする．$f(x-y)g(y)$ は $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ に属すことおよび

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x-y)g(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy$$

を示せ．また $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ のとき, $f * g = g * f$, $(f * g) * h = f * (g * h)$ を示せ.

演習問題 5.8. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p \geq 1)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならばほとんどすべての x に関して $f(x-y)g(y)$ は y の可積分関数であり, かつ

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}. \tag{5.6}$$

演習問題 5.9. $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$ とおき $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $T_t f(x) = p_t * f(x)$ と定める．以下を示せ.
(1) $T_t f(x)$ は x の C^∞ 関数となる.
(2)[半群性] 任意の f, $t, s \geq 0$ に対して $T_{t+s}f = T_t(T_s f)$.
(3)[マルコフ性] $0 \leq f(x) \leq 1$ a.e. x ならば $0 \leq T_t f(x) \leq 1$.
(4)[強連続性 (C_0 性)] 任意の $f \in L^p$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \|T_t f - f\|_{L^p} = 0.$$

(5)[縮小性 (contraction property)] 任意の $f \in L^p$ に対して $\|\|T_t f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.
(6) $u(t, x) = T_t f(x)$ は次の関係式 (熱方程式) を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2}\Delta_x u(t, x) \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

ここで $\Delta_x f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

演習問題 5.10. $A \in \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ ならば

$$\lim_{v \to 0} m_L(A \cap (A + v)) = m_L(A). \tag{5.7}$$

ただし $A + v = \{x + v \mid x \in A\}$.

演習問題 5.11. $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする．$v(\in \mathbb{R}^n) \neq 0$ とする.

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x + kv)dx = 0$$

を示せ[24]．また

$$f_{v,N}(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f(x + kv)$$

と定めるとき, $\lim_{N \to \infty} \|f_{v,N}\|_{L^2} = 0$ となることを示せ.

[23] f, g を非負値実数の集合 $[0, +\infty)$ で定義された複素数値連続関数全体 $C([0, \infty)$ の元とし $f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$ と定義するものもある．これは Laplace 変換, Mikusiński の演算子法 (Scawartz 超関数論が出現する前の超関数論の一つ) などで用いられる．Titchmarsh の定理 ($f * g = 0$ ならば $f = 0$ または $g = 0$) が基本的である.

[24] 関数解析の言葉で言うと $f(\cdot + kv)$ が $k \to \infty$ で 0 に弱収束するということ.

ヒント：コンパクトな台を持つ連続関数全体の集合 $C_0(\mathbb{R}^n)$ が $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密であることを用いてよい.

演習問題 5.12 (ルベーグ測度のエルゴード性)**.** $A \in \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ が任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $m_L(A \triangle (A+v)) = 0$ を満たすならば $m_L(A) = 0$ または $m_L(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ のいずれかが成立する.

6 確率論に関連する注意

6.1 直積確率測度と確率変数の独立性

この節では測度空間が確率空間の場合について無限直積確率測度の定義・存在と一意性について解説する. すでに (脚注で) 注意したが, 直積測度は独立な確率変数と密接に関連し確率論では独立な無限個の確率変数を対象とするので, 無限直積確率測度を考察するのは必須である. まず, 注意を述べる.

- 全測度 1 の測度空間を確率空間という.
- これまで測度空間 (測度の与えられている集合) は X を用いて表して来たが, 確率論では Ω を用いて表すのが標準的なのでこの節ではその慣習に従う.
- 確率空間の場合, 可測関数は確率変数と呼ばれ, X, Y などの記号を用いることが多い[25].
- σ-加法族 $\mathcal{F}$ の元, すなわち可測集合, を事象という.
- Ω の使用にあわせて Ω の元を ω と表すことが多い. 一点集合 $\{\omega\}$ は σ-加法族 $\mathcal{F}$ の元とは必ずしも限らないが, 多くの場合 $\mathcal{F}$ に属す. このとき ω と $\{\omega\}$ を根元事象[26]と言う.
- 積分 $\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$ を $E[X]$ と書き X の期待値と言う.

積空間 $\Omega = \prod_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$ 上に積 σ 加法族および積測度 $\otimes_\lambda P_\lambda$ を定義しよう. 考え方は前節の有限個の直積測度空間の構成と同じである. ただし無限直積であるため考える測度は確率測度というように制限が付く.

定義 6.1 (定義と記号に対する注意)**.** $(\Omega_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ を可測空間の族[27]とする. 添字の有限部分集合 $\Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ を取る. 有限個の積 σ-加法族に属する集合 $A \in \prod_{\lambda\in\Gamma} \mathcal{F}_\lambda$ に対して集合

$$\left\{ (x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda \mid (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_n}) \in A \right\} (\subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda)$$

を $\tilde{A}$ と書くことにする. Γ をすべての有限部分集合の範囲で動かして得られる上記の集合 $\tilde{A}$ 全体 $\mathcal{A}$ は (明らかに[28]) 有限加法族をなす. $\mathcal{A}$ で生成される σ-加法族を積 σ-加法族と言い, $\otimes_{\lambda\in\Gamma}\mathcal{F}_\lambda$ と書く.

[25]従って必然的に確率空間を表すのに X を用いることはあまり無い.
[26]ただし「根元事象」という用語を用いるのは Ω が可算集合のような離散的な場合に限ることが多いと思う
[27]この定義では測度を考えていないので確率空間, 測度空間の区別は無いが Ω という記号を用いる
[28]なぜか?

補題 6.2. $(\Omega_\lambda, \mathcal{F}_\lambda, P_\lambda)$ を確率空間の族とする．集合 $B \in \mathcal{A}$ に対してある有限部分集合 $\Gamma \subset \Lambda$ と，$A \in\subset \prod_{\lambda\in\Gamma} \mathcal{F}_\lambda$ が存在して $B = \tilde{A}$ と書ける．このとき $Q(B)$ を

$$Q(B) = (\otimes_{\lambda\in\Gamma} P_\lambda)(A)$$

と定めると Q の定義は A の取り方によらず, well-defined で Q は $\mathcal{A}$ 上有限加法的確率測度である．

証明. B に対して A が一意に定まらないのは補題の中のように $B = \tilde{A}$ と表されるとしても $B = \tilde{A}'$, $A' = A \times \Omega_{\lambda'} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda\cup\{\lambda'\}} \mathcal{F}_\lambda$ のようにも書けるからである．しかしこの場合でも $Q(B)$ の値は変わらないのは明らかで矛盾なく定義できていることがわかる．有限加法性も明らかであろう． □

定理 6.3. [無限直積確率測度の定義とその存在と一意性について] $(\Omega_\lambda, \mathcal{F}_\lambda, P_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ を確率空間の族とする．補題 6.2 で定義した Q は $\mathcal{A}$ 上完全加法的である．Q を Hopf の拡張定理により一意的に $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ に拡張して得られる確率測度を直積確率測度と言い $\otimes_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ と表す．

この定理を証明するため, 次の補題を用意する．

補題 6.4. $(X, \mathcal{A}, m)$ を有限加法的測度空間で $m(X) < \infty$ とする．次の (1), (2), (3) は同値である．
(1) m は $\mathcal{A}$ 上完全加法的である．
(2) $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ が $A_1 \supset \cdots \supset A_i \supset \cdots$, $\cap_{i=1}^\infty A_i = \emptyset$ を満たす時 $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$.
(3) $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ が $A_1 \supset \cdots \supset A_i \supset \cdots$, $\lim_{n\to\infty} m(A_n) > 0$ を満たす時 $\cap_{i=1}^\infty A_i \neq \emptyset$.

証明. まず (2), (3) は対偶の関係にあるので同値なのは明らかである．また $m(A_n)$ は減少する非負の数列なので極限が存在することも注意しておく．(1) から (2) を示す．$B_i = A_i \setminus A_{i+1}$ $(i \geq 1)$ とおく．$A_1 = \coprod_{i=1}^\infty B_i$, $B_i \in \mathcal{A}$, $A_1 \in \mathcal{A}$ だから m の $\mathcal{A}$ 上の完全加法性を用い

$$m(A_1) = \sum_{i=1}^\infty m(B_i) = \sum_{i=1}^\infty (m(A_i) - m(A_{i+1})) = \lim_{n\to\infty} (m(A_1) - m(A_n)).$$

従って $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$. (2) から (1) を示す．$A = \coprod_{i=1}^\infty A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ とする．$B_n = A \setminus (\cup_{i=1}^n A_i)$ とおくと $B_n \in \mathcal{A}$, $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$, $\cap_{n=1}^\infty B_n = \emptyset$. 従って $\lim_{n\to\infty} m(B_n) = 0$. 一方 $m(B_n) = m(A) - \sum_{i=1}^n m(A_i)$ だから $m(A) = \sum_{i=1}^\infty m(A_i)$.

□

定理 6.3 の証明．上記の補題の (3) を示せば良い．記述を簡単にするため $\Lambda = \{1, 2, \ldots, \}$ の場合を考える．一般的に $A \subset \prod_{i=1}^\infty \Omega_i$ と $(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ に対して $A_{(a_1,\ldots,a_n)} = \{(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \in \prod_{i=n+1}^\infty \Omega_i \mid (a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \in A\}$ と定める． 有限直積測度の Fubini の定理より

$$Q(A_i) = \int_{\Omega_1} Q((A_i)_{(x)}) dP_1(x).$$

ただし右辺において $Q_((A_i)_{(x)})$ は $\prod_{i\geq 2} \Omega_i$ 上で同様に定義した有限加法的確率測度で測っていることに注意する．各 x に対して $\{Q((A_i)_{(x)})\}_{i=1}^\infty$ は 1 以下の減少数列であることに注意する．ルベーグの収束定理より

$$\lim_{i\to\infty} Q(A_i) = \int_{\Omega_1} \lim_{i\to\infty} Q((A_i)_{(x)}) dP_1(x)$$

なのである $\eta_1 \in \Omega_1$ が存在して

$$\inf_i Q((A_i)_{\eta_1}) > 0.$$

$A_i \subset \prod_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ の代わりに $(A_i)_{\eta_1} \subset \prod_{k=2}^{\infty} \Omega_k$ について同様の議論を行い $\eta_2 \in \Omega_2$ で

$$\inf_i Q((A_i)_{(\eta_1,\eta_2)}) > 0$$

となるものの存在が言える. ただし右辺の $Q((A_i)_{(\eta_1,\eta_2)})$ は $\prod_{i\geq 3} \Omega_i$ 上で定義されている有限加法的確率測度である. この操作は無限に繰り返すことができ, 無限点列 $\eta^* = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ を得る. 実は $\eta^* \in \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ となるので空でないことがわかることになる. なぜ $\eta^* \in \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ か? η の作り方からすべての i, n について

$$A_i \text{ は最初の } n \text{ 個の座標が } (\eta_1, \ldots, \eta_n) \text{ と一致する点を含む} \tag{6.1}$$

が言える. $A_i \in \mathcal{A}$ だからある最初の有限個の座標を除けば残りの座標はすべての点を取り得るので (6.1) からすべての i について $\eta^* \in A_i$ と言えるのである. □

注 6.5. 確率論では Kolmogorov の拡張定理と呼ばれるやはり無限直積空間に確率測度を構成する定理がある. この定理は例えばブラウン運動の測度を連続関数の空間上に構成するために使われたりする. この Kolmogorov の拡張定理は直積確率測度より一般の「両立条件」を満たす測度に対して適用される強みがあるが空間 Ω_λ の位相的性質を使う分制限がある. 直積確率測度の構成では Ω_λ は位相空間である必要は無い.

直積確率測度が独立な確率変数と関連すると述べたが, ここで確率変数の独立性を定義する.

定義 6.6. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された実数値確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が独立とは任意の有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$, ボレル集合 $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X_{\lambda_1}(\omega) \in A_1, \ldots, X_{\lambda_n} \in A_n\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{\omega \in \Omega \mid X_{\lambda_i}(\omega) \in A_i\}) \tag{6.2}$$

が成立するときに言う.

$P(\{\omega \in \Omega \mid X_{\lambda_1}(\omega) \in A_1, \ldots, X_{\lambda_n} \in A_n\})$ を $P(X_{\lambda_1} \in A_1, \ldots, X_{\lambda_n} \in A_n)$ などと簡単に書く.

定義 6.7. (1) $(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間とする. 可測写像 $T : X \to \mathbb{R}^n$ を考える[29]. すなわち任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して $T^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ とする. $\mathbb{R}^n$ 上の測度 $T_\sharp m (T_* m$ ともかく$)$ を

$$(T_\sharp m)(A) = m\left(T^{-1}(A)\right) \tag{6.3}$$

と定義し m の T による像測度 (image measure)[30]という.
(2) $(X, \mathcal{F}, m)$ が確率空間のとき $T_\sharp m$ は $\mathbb{R}^n$ 上の確率である. とくに T を確率変数 (確率ベクトル), $T_\sharp m$ を T の (確率) 分布 ((probability)distribution), 法則 (law) という.

[29] $\mathbb{R}^n$ ではなく一般の位相空間でも位相的ボレル集合族を考えて全く同じように定義できる
[30] m の T による push forward measure とも言う

確率論ではある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された次のような実数値確率変数 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を考える状況が多い.

(1) $\{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ は独立

(2) X_i の確率分布はある与えられた $\mathbb{R}$ 上の確率分布 μ_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

しかしこのような確率変数が存在するのか? どうやって構成するのか?というのは自然な疑問である[31].

直積測度を用いれば, 次のように構成できる.

(1) $\Omega_i = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_i = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $P_i = \mu_i$ という確率空間を考える. Ω_i の元を ω_i と書くことにする. ω_i は実数であることに注意する.

(2) 直積確率空間 $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, $\mathcal{F} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$, $P = \otimes_{i=1}^{\infty} P_i$ を考える. $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega$ のように書く.

(2) Ω 上の確率変数を $X_i(\omega) = \omega_i$ と定める[32]と $\{X_i\}$ は独立かつ X_i の法則は μ_i である.

独立な確率変数については次の定理が基本的である.

定理 6.8. (1) 実数値確率変数 X, Y について次は同値.

(a) 任意の有界ボレル関数 f, g について $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$.

(b) X, Y は独立.

(2) 実数値確率変数 X, Y は独立で $X, Y \in L^p$ $(p \geq 1)$ とする. f, g をボレル可測関数で $|f(x)| \leq C(1+|x|)^p$, $|g(x)| \leq C(1+|x|)^p$ を満たすとする. C は正定数. このとき $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$.

6.2 大数の法則

大数の法則とは $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を独立な確率変数で $E[X_i] = m$ のように期待値は一定の値 m とする. このとき「経験平均 (empirical mean) $\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ は m に収束する」という形の命題を言う. “収束” の概念により大数の強法則, 弱法則など違いがある.

補題 6.9. [大数の弱法則] $\{X_i\}$ を独立な確率変数で分散が有限 $\sup_i V[X_i] < \infty$, かつ期待値は一定 $E[X_i] = m$ とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{6.4}$$

[31] そもそも存在しないなら考える必要は無い状況である.

[32] すなわち, 座標関数.

弱法則は 2 年次の統計の講義で学んだことがあるかもしれない．この定理の証明はいわゆるチェビシェフの不等式による．次に大数の強法則の一つの形のものを示す．

定理 6.10. [大数の強法則] $\{X_i\}$ を独立な確率変数で期待値はすべて同じ $E[X_i]=m$ で 4 次のモーメントが有限, すなわち $\sup_i E[X_i^4]<\infty$ とする．このとき

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}=m\right)=1. \tag{6.5}$$

(6.5) を略さない形で書くと

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n X_i(\omega)}{n}=m\right\}\right)=1.$$

すなわち (6.4) は確率 (測度) 収束, (6.5) は概収束を意味し，「概収束 $\Longrightarrow$ 確率収束」なので, 強法則の方が強いことを言っているわけである．また強法則は「概収束」を扱っているので「弱法則」とは違い 2 年次の統計のような初等的な講義ではあまり教えられることは無い．

定理 6.10 の証明は次のように演習問題とする．

演習問題 6.11. $\bar{X}_n=\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ とおく．定数 C が存在して $E[(\bar{X}_n-m)^4]\le\frac{C}{n^2}$ となることを示し[33]これを用いて定理 6.10 を示せ．

6.3 像測度と積分の変数変換公式

定理 6.12. 測度空間 $(X,\mathcal{F},m)$ から $\mathbb{R}^n$ への可測写像 $T:X\to\mathbb{R}^n$ を考える．f を $\mathbb{R}^n$ 上のボレル可測関数とする．$f\in L^1(\mathbb{R}^n,T_\sharp m)$ と $f(T)\in L^1(X,m)$ は同値であり次の等式が成立する．

$$\int_X f(T(x))dm(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(z)(T_\sharp m)(dz). \tag{6.6}$$

証明. $A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ とし $f=1_A$ の場合を考える．右辺の値 $(T_\sharp m)(A)$, 左辺の値 $m(\{x\in X\mid T(x)\in A\})$ であり像測度の定義からこれらは等しい．従って f が非負単関数の場合は (6.6) が成立する．単関数で近似することにより非負ボレル関数について (6.6) が成立することがわかり, 従って定理の主張が示されたことになる． □

この式と積分の変数変換の定理 5.1 を比較すると $T:G_1\to G_2$ という C^1-微分同相写像が与えられたとき,

$$T_\sharp m_L=\frac{1}{|\det(DT)(T^{-1}(x))|}\cdot m_L=|\det D(T^{-1})(x)|\cdot m_L$$

という関係にあることがわかる．

注 6.13. $D\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域とし, $T:D\to\mathbb{R}^m$ を D の閉包 $\overline{D}$ の近傍で定義された C^1-写像とする．全ての点 $x\in D$ で $DT(x)$ のランクは m とする (従って $n\ge m$ である)．注 5.5 で述べたように $N\subset\mathbb{R}^m$ をルベーグ測度 0 の集合とすると $m_L(T^{-1}(N))=0$ となる．従って像測度 $T_\sharp(m_L|_D)$ はルベーグ測度に絶対連続になる．これは D がウィーナー空間のような無限次元空間の場合にも成立し, このような解析をマリアバン解析と言う．これにより,T を非退化係数を持つ確率微分方程式の解とした場合, 準楕円型方程式の基本解の存在を示すことができる．

[33]定理 6.8 を用いる．

演習問題 6.14. F, G を $\mathbb{R}^n$ 上の非負値ボレル可測関数とし $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} G(x)dx = 1$ とする．$dP(x) = F(x)dx$, $dQ(x) = G(x)dx$ のように F, G を密度関数として持つ確率測度を定める．$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^1-微分同相写像とし $T_\sharp P = Q$ ならば T は次の関係式 (Monge-Ampere 方程式と呼ばれる) を満たすことを示せ.

$$F(x) = G(T(x))|\det DT(x)| \quad \text{a.e. } x.$$

7 Radon-Nikodym の定理

ヒルベルト空間におけるリースの表現定理を用いて Radon-Nikodym の定理を証明する．更に Radon-Nikodym の定理を用いて測度のルベーグの分解定理 (2 つの σ 有限測度が同じ空間に与えられた時一方の測度は他方の測度に絶対連続な部分と特異な部分の和で書けるということ) を証明する．また, Radon-Nikodym の定理を用いて確率論でよく使われる条件付き平均値を定義する.

定義 7.1. 共通の可測空間 $(X, \mathcal{F})$ で定義された測度 ν, μ を考える．$\mu(A) = 0$ となる $A \in \mathcal{F}$ について常に $\nu(A) = 0$ となるとき, ν は μ に絶対連続であると言う.

定理 7.2. $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし, ν, μ を $(X, \mathcal{F})$ 上の測度とする.
(1) 次の条件 (i), (ii) は同値である.

(i) μ, ν 共に σ-有限な測度で ν は μ に絶対連続.

(ii) μ は σ-有限かつ $f(x) < +\infty$ μ-a.e. x となる $\mathcal{F}$-非負可測関数 f が存在して任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu(x)$$

が成立する.

(2) (1) の (i),(ii) が成立する時関数 f は μ-a.e. x に関して一意的に定まる.

上記 (ii) の関数 f を密度関数と言う.

証明. (ii) から (i) が出るのは自明なので, (i) から (ii) を示す.
まず測度 ν, μ が有限測度の場合に証明する.
(a) ν, μ が有限測度の場合:
$m = \nu + \mu$ と新しい測度を考え, ヒルベルト空間 $E = L^2(X, \mathcal{F}, dm)$ を考える．E 上の汎関数を

$$T(\varphi) = \int_X \varphi(x)d\nu(x) \qquad \varphi \in E \tag{7.1}$$

と定める[34]. Schwarz の不等式を用い

$$\int_X |\varphi(x)|d\nu(x) \le \int_X |\varphi(x)|dm(x) \le m(X)^{1/2}\left\{\int_X |\varphi(x)|^2 dm(x)\right\}^{1/2} = m(X)^{1/2}\|\varphi\|_E$$

[34] φ は m-測度 0 の集合で不定性があるが m 測度 0 ならば ν-測度は 0 なのでこの定義は well-defined である.

となるのでこれは連続線形汎関数である．従って $g \in E$ が存在して任意の $\varphi \in E$ に対して

$$\int_X \varphi(x)d\nu(x) = \int_X \varphi(x)g(x)dm(x) = \int_X \varphi(x)g(x)d\nu(x) + \int_X \varphi(x)g(x)d\mu(x). \tag{7.2}$$

従って

$$\int_X \varphi(x)(1-g(x))d\nu(x) = \int_X \varphi(x)g(x)d\mu(x). \tag{7.3}$$

次に $0 \le g(x) < 1$ m-a.e. $x \in X$ を示す．$Y = \{x \in X \mid g(x) \ge 1\}$ とおく．$\varphi(x) = 1_Y(x)$ を (7.3) に代入し

$$\int_Y (1-g(x))d\nu(x) = \int_Y g(x)d\mu(x).$$

この式の左辺は非正, 右辺は非負だからこの式の値は 0. Y で $g(x) \ge 1$ だから $\mu(Y) = 0$. 絶対連続性から $\nu(Y) = 0$. $Y' = \{x \in X \mid g(x) < 0\}$ とおく．(7.3) で $\varphi(x) = 1_{Y'}(x)$ とおいて

$$\int_{Y'} (1-g(x))d\nu(x) = \int_{Y'} g(x)d\mu(x).$$

左辺は非負, 右辺は非正なので $\mu(Y') = 0$. 再度絶対連続性を用いて $\nu(Y') = 0$. 以上より $0 \le g(x) < 1$ m-a.e. $x \in X$ を得る．$Z_n = \{x \in X \mid 0 \le g(x) < 1 - \dfrac{1}{n}\}$, $Z = \{x \in X \mid 0 \le g(x) < 1\}$ とおく．$A \in \mathcal{F}$ を取る．(7.3) で $\varphi(x) = \frac{1_{A\cap Z_n}(x)}{1-g(x)}$ とおくと[35]

$$\nu(A \cap Z_n) = \int_X \frac{g(x)}{1-g(x)} 1_{A\cap Z_n}(x)d\mu(x). \tag{7.4}$$

$n \to \infty$ として, 測度の単調増加集合列に対する連続性, 単調収束定理を用い,

$$\nu(A \cap Z) = \int_X \frac{g(x)}{1-g(x)} 1_{A\cap Z}(x)d\mu(x). \tag{7.5}$$

$\mu(Z^c) = \nu(Z^c) = 0$ だからこれは $f = g/(1-g)$ として (2) が成立することを意味している．
(b) 一般の場合

$\mathcal{F}$-可測集合の列 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots X_n \subset \cdots$ で $\nu(X_n) < \infty$, $\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n)$, $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ なるものが存在する．(a) の結果から各 X_n 上の $\mathcal{F}$-可測関数 f_n が存在して任意の $A \subset X_n$, $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\nu(A) = \int_{X_n} f_n(x)d\mu(x). \tag{7.6}$$

この関係式から $l > n$ のとき $f_l|_{X_n}(x) = f_n(x)$ μ-a.e. $x \in X_n$. 従って X 上の $\mathcal{F}$-可測関数 f ですべての n について $f(x) = f_n(x)$ μ-a.e. $x \in X_n$ となるものが存在する．従って, 任意の $\mathcal{F}$-可測集合 A に対して

$$\nu(A \cap X_n) = \int_{A\cap X_n} f(x)d\mu(x). \tag{7.7}$$

[35] この φ は E に属することに注意.

$n \to \infty$ として f が密度関数とわかる．最後に $f(x) < +\infty$ μ-a.e.x であることに注意する．これは背理法による．$A = \{x \mid f(x) = +\infty\}$ としたとき $\mu(A) > 0$ としよう．上記証明で取った測度有限な集合列 $\{X_n\}$ を考え

$$\nu(A \cap X_n) = \int_{A \cap X_n} f(x) d\mu(x).$$

十分大きな n について $\mu(A \cap X_n) > 0$ だから $\nu(A \cap X_n) = +\infty$ となり矛盾が生じる．

(2) 一意性を示す．$\mathcal{F}$-可測関数 f, g について任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \int_A g(x) d\mu(x)$$

とする．$Y_n = \{x \mid f(x) \leq n, g(x) \leq n\}$ と定める．引き算をすることができて

$$\int_{A \cap Y_n} (f(x) - g(x)) d\mu(x) = 0.$$

$A = \{x \in X \mid f(x) - g(x) > 0\}$ および $A = \{x \in X \mid f(x) - g(x) < 0\}$ とおくことにより $\int_{Y_n} |f(x) - g(x)| d\mu(x) = 0$. 従って $f(x) = g(x)$ μ-a.e.x である． $\square$

演習問題 7.3. $(X, \mathcal{F})$ 上の測度 μ, ν について $\nu(A) \leq \mu(A)$ $(\forall A \in \mathcal{F})$ とする．このとき ν の μ に関する密度 f について $f(x) \leq 1$ μ-a.e. x.

演習問題 7.4. $(X, \mathcal{F})$ 上の測度 ν が μ に絶対連続で $d\nu = f d\mu$ とする． $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \nu)$ と $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ は同値であり

$$\int_X g(x) d\nu(x) = \int_X g(x) f(x) d\mu(x). \tag{7.8}$$

定理 7.5. ν, μ を可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の σ-有限測度とする．次のいずれかが成立する．
(1) ν は μ に絶対連続である．
(2) ν-測度正の $X' \in \mathcal{F}$ が存在して, 次が成立する．

(a) $\mu(X') = 0$

(b) $\nu|_{X \setminus X'}$ は $\mu|_{X \setminus X'}$ に絶対連続である．

証明. $m = \nu + \mu$ とおく．ν は m に絶対連続だから Radon-Nikodym の定理および演習問題 7.3 より密度関数 $0 \leq f(x) \leq 1$ が存在して任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\nu(A) = \int_A f(x) dm(x) = \int_A f(x) d\mu(x) + \int_A f(x) d\nu(x).$$

従って

$$\int_A (1 - f(x))\, d\nu(x) = \int_A f(x) d\mu(x). \tag{7.9}$$

$X' = \{x \mid f(x) = 1\}$ と定める．(7.9) より $\mu(X') = 0$ である．

(i) $\nu(X') = 0$ のとき：$1 - f(x) > 0$ ν-a.e. x である．さて $\mu(A) = 0$ ならば $\int_A (1 - f(x)) d\nu(x) = 0$. $1 - f(x) > 0$ ν-a.e. x だから $\nu(A) = 0$ となり ν は μ に絶対連続とわかる．

(ii) $\nu(X') > 0$ のとき：このとき (i) の (a) が成立していることになる．(b) を示す必要がある．$A \subset X \cap (X')^c$ で $\mu(A) = 0$ とする．(7.9) より

$$\int_A (1 - f(x)) d\nu(x) = 0$$

$1 - f(x) > 0\ \forall x \in A$ だから $\nu(A) = 0$ となり $\nu|_{X \setminus X'}$ は $\mu|_{X \setminus X'}$ に絶対連続である．

□

定義 7.6 (ルベーグ分解)**.** 上記定理で (2) の時, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_1(A) = \nu(A \cap X')$, $\nu_2 = \nu(A \cap (X \setminus X'))$ と分解し

- ν_1 を μ に関する ν の特異部分[36]
- ν_2 を μ に関する ν の絶対連続部分[37]

と言う．ν_1, ν_2 は一意に定まる[38]．(1) が成立するときは ν の μ に関する特異部分は存在しないと考える．この分解をルベーグ分解と言う．

注 7.7. $\mu = m_L$ のようにユークリッド空間上のルベーグ測度の場合, 特異部分 ν_1 をさらに細かく次のように分けて考えることが多い．

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nu_1(\{x\}) > 0\ \} \tag{7.10}$$

と定める．特異部分の定義から $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nu(\{x\}) > 0\}$ と定義しても同じである．S の濃度は高々可算無限である．これは ν の σ-有限性から従う．そこで

$$\nu_p = \sum_{x \in S} \nu(\{x\}) \delta_x \tag{7.11}$$

$$\nu_{sc} = \nu_s - \nu_p \tag{7.12}$$

と分けると $\nu = \nu_{ac} + \nu_p + \nu_{sc}$ のように一意的に分解される．δ_x は一点 x に測度 1 がある確率測度 (atomic measure, Dirac 測度) であり, ν_p はその和で表されるので ν の離散的部分である．ν_{sc} は一点に測度を持たないと言う意味で連続的な測度だがルベーグ測度に対して特異な特異連続 (singular continuous) な部分である．大学初年級の確率統計の講義では確率分布として確率密度関数を持つ分布, 高々可算個の点集合に重みがある離散的な分布を扱うことが多いが理論的には特異連続な分布もあり得るのである．このような測度の分解は自己共役作用素のスペクトルを絶対連続スペクトル, 特異連続スペクトル, 点スペクトルの 3 つのクラスに分類することにも使われる[39]．

特異な測度の例は次の章で有界変動関数と測度との対応を説明してから与える．以下の問題は Radon-Nikodym の定理と関係ないがこの節ではヒルベルト空間の性質を用いたので、そのつながりであげておく．

演習問題 7.8. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $L^2([0,1], dx)$ の完全正規直交系とする．ほとんどすべての x について $\sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)^2 = +\infty$ となることを示せ．

[36] ν_s と書くことがある．特異 (singular) の s である．
[37] ν_{ac} と書くことがある．絶対連続 (absolutely continuous) の ac.
[38] 一意性は証明すべきことである．2 つ分解があるとしてそれらが一致することを示す．
[39] Reed and Simon 著「Functional Analysis」参照.

8　有界変動関数

まず有界変動関数の定義を与える.

定義 8.1. $I = [a, b]$ を $\mathbb{R}$ の区間[40]とする. F を I 上の実数値関数とする. n を自然数とする. 区間の分割

$$\Delta : \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{8.1}$$

に対して

$$V_{F,\Delta} = \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})|$$

と定める. $F : I \to \mathbb{R}$ が有界変動[41]であるとは F の全変動 (total variation)

$$V_F = \sup \{V_{F,\Delta} \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く}\} \tag{8.2}$$

が有限であることと定める. I 上の有界変動関数全体を $BV(I)$ と表す.

有界変動関数について詳しい性質については後でまとめるが、ここでは次を注意しておく.

補題 8.2. F が有界変動ならば $\sup_{a \le x \le b} |F(x)| \le V_F + |F(a)|$. 特に f は有界である. この式の右辺の量 $V_F + |F(a)|$ を $\|F\|_{BV}$ と書き, F の有界変動ノルム[42]と言う.

次のようなリーマン式の積分 (Riemann-Stieltjes 積分) はリーマン積分の拡張としてよく用いられる.

定義 8.3. f, g を I 上の有界関数とする. Δ を I の分割 (8.1) とし, 分割 Δ に付随した $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ を満たす中間点 $\mathcal{P} = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ 取りリーマン和の類似

$$I(f, g, \Delta, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right)$$

を考える. $\mathcal{P}$ の取り方によらず次の極限

$$\lim_{|\Delta| \to 0} I(f, g, \Delta, \mathcal{P}).$$

が存在する時, f は g に対して Riemann-Stieltjes 積分可能と言い, この極限を Riemann-Stieltjes 積分 $\int_a^b f(x) dg(x)$ と定義する.

定理 8.4. $f \in C(I)$, $F \in BV(I)$ とする. Riemann-Stieltjes 積分 $\int_a^b f(x) dF(x)$, $\int_a^b F(x) df(x)$ が可能で次の部分積分の公式

$$\int_a^b F(x) df(x) = F(b) f(b) - F(a) f(a) = \int_a^b f(x) dF(x) \tag{8.3}$$

が成立する.

[40] 普通は有界区間を考える. $I = \mathbb{R}$ のときももちろん定義は同じだが無限区間であるため有界変動と言う条件は非常に強い条件になる.
[41] 英語では bounded variation という
[42] ノルムになることは簡単にわかる. またこの補題の結果から有界変動ノルムは sup-norm より強い位相を定めることがわかる. 真に強いかは少し議論が必要だが.

証明. $\int_a^b f(x)dF(x)$ が確定することは任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を十分小さくとれば, $\max\{|\Delta|, |\Delta'|\} \leq \delta$ のときおのおのに付随した分点 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ の取り方によらず $|I(f, F, \Delta, \mathcal{P}) - I(f, F, \Delta', \mathcal{P}')| \leq \varepsilon$ からわかる. 次に $\int_a^b F(x)df(x)$ が確定することと (8.3) を同時に示す. 分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ とそれに付随した中間点 ξ_i を

$$a = x_0 = \xi_1 < x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_2 \leq \cdots \xi_{n-1} \leq x_{n-1} < \xi_n = x_n = b$$

と取る[43]. 恒等式

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})) = (F(b)f(b) - F(a)f(a)) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(F(\xi_{i+1}) - F(\xi_i)) \tag{8.4}$$

において $|\Delta| \to 0$ とすると f の連続性から左辺の極限は ξ_0, ξ_n をもっと一般に取った場合の $\lim_{|\Delta|\to 0} I(F, f, \Delta, \mathcal{P})$ と一致する. 右辺は (8.3) の右辺に収束するのでこれで示されたことになる. □

有界変動関数の基本的な性質を述べる.

定義 8.5. f を $I = [a, b]$ 上の実数値関数とする. $a \leq x \leq b$ とし $\Delta = \{a = x_0 < \cdots < x_n = x\}$ を $[a, x]$ の分割とする.

$$V_{f,\Delta}(x) = \sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})| \tag{8.5}$$

$$P_{f,\Delta}(x) = \sum_i (f(x_i) - f(x_{i-1}))1_{(f(x_i) - f(x_{i-1}))>0} \tag{8.6}$$

$$N_{f,\Delta}(x) = \sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})|1_{(f(x_i) - f(x_{i-1}))<0} \tag{8.7}$$

とおき

$$V_f(x) = \sup_\Delta V_{f,\Delta}(x) \tag{8.8}$$

$$P_f(x) = \sup_\Delta P_{f,\Delta}(x) \tag{8.9}$$

$$N_f(x) = \sup_\Delta N_{f,\Delta}(x) \tag{8.10}$$

と定める.

補題 8.6. (1) $V_f(b) = V_f$ が成立する.
(2) すべての $a \leq x \leq b$ について

$$f(x) - f(a) = P_{f,\Delta}(x) - N_{f,\Delta}(x) = P_f(x) - N_f(x) \tag{8.11}$$

$$V_f(x) = P_f(x) + N_f(x) \tag{8.12}$$

(3) V_f, P_f, N_f は有界な単調増加関数.

[43] $\xi_1 = a, \xi_n = b$ とした特別な取り方である

この補題より

命題 8.7. (1) 関数 f が有界変動であるための必要十分条件は有界な単調増加関数 g, h が存在して $f = g - h$ と書けることである．また任意の $a < x < b$ に対して右極限 $f(x+0) = \lim_{y \to x+0} f(y)$, $f(x-0) = \lim_{y \to x-0} f(y)$ が存在する．
(2) 有界変動な関数 f の不連続点全体の集合は可算集合である．特に可算個の点を除いて $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$ が成立する．

証明. (1) 補題 8.6 より有界変動関数が単調増加関数の差で表されることは示された．逆を言えばよいがこれは簡単．というのは, $f = g-h$ で g, h が単調増加ならば $V_g = g(b)-g(a), V_h = h(b)-h(a)$, $V_f \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a)$ だから．また右極限, 左極限の存在は有界単調増加関数の差で書けていることから自明である．

(2) 有界関数 f について

$$\omega_f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{y,z \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} |f(y) - f(z)|$$

とおく[44]. $\omega_f(x) = 0$ となるための必要十分条件は f が x で連続であることである．f が有界変動とする．$r > 0$ ならば集合 $S_r = \{x \in I \mid \omega_f(x) > r\}$ は有限集合であることを示せば良い．$N_r \leq \sharp S_r$ となる自然数 N_r を取る．$rN_r \leq V_f$ だから $N_r \leq V_f/r$ で示された． □

上記の証明によれば有界変動関数の不連続点で振幅 (ジャンプの大きさ) がある一定以上大きい点は有限個のみであることがわかる．またジャンプの大きさの和について

$$\sum_{x \in (0,t]]} \omega_f(x) \leq V_f(t). \tag{8.13}$$

が成立する．次の補題は有界変動関数による積分は右連続有界変動関数による積分と $x = a$ における (符号付き)Dirac 測度による積分に分解されることを示している．

補題 8.8. F を $I = [a, b]$ 上の有界変動関数, $\tilde{F}(x) = F(x+0)(= \lim_{y \to x+0} F(y))$ とおく (ただし $\tilde{F}(b) = F(b)$). このとき $\tilde{F}$ は右連続な有界変動関数で I 上の任意の連続関数 f に対して

$$\int_a^b f(x)dF(x) = f(a)(F(a+0) - F(a)) + \int_a^b f(x)d\tilde{F}(x). \tag{8.14}$$

特に F が a で連続ならば F, $\tilde{F}$ による Stieltjes 積分は常に一致する．

証明. これは Stieltjes 積分の定義式の分割点を F の不連続点を避けるように選ぶことにより証明される． □

更に $I = [a, b]$ 上の右連続有界変動関数は点 a に mass を持たない有限な符号付き測度と一対一対応が付き, Stieltjes 積分はこの符号付き測度によるルベーグ式の積分と一致することがわかる．このことにより連続でないより一般の I 上のボレル可測関数 f に対する積分が可能になる．これを説明する．

[44] f の x における振幅と呼ばれることがある．

補題 8.9. F を (右, 左) 連続な有界変動関数とする．このとき $V_F(x), P_F(x), N_F(x)$ も (右, 左) 連続である．

この補題により F が右連続な有界変動関数とすると F は右連続な単調増加関数の差で書けることがわかる．右連続単調増加関数と測度は一対一に対応が付く．これは, Hopf の拡張定理の重要な適用例の一つである．

定理 8.10. F を $\mathbb{R}$ 上の右連続単調増加関数とする．このとき $\mathbb{R}$ 上の測度 μ_F で

$$\text{任意の } -\infty < a \le b < \infty \text{ に対して } \mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \tag{8.15}$$

を満たすものが一意に存在する．従ってこの意味で右連続単調増加関数と (8.15) を満たす測度が一対一に対応する．$F(x) = x$ の時に対応するものがルベーグ測度である．

証明. $\mathcal{C}$ を

$$(a,b], (-\infty, b], (a, +\infty), \mathbb{R} \tag{8.16}$$

全体の集合とする．ただし $-\infty < a \le b < +\infty$ である．$\mathcal{A}$ を $\mathcal{C}$ の有限和で表される有限加法族とする．(8.15) で定められる μ_F は $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度に拡張できる．明らかにこれは σ-有限である．Hopf の拡張定理を用いて $\sigma(\mathcal{A})$ 上の完全加法的測度に拡張しよう．そのためには $A \in \mathcal{C}$ が $A = \cup_{i=1} I_i$ $I_i \in \mathcal{C}$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ $(i \ne j)$ と書けるとき $\mu_F(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$ を示せば良い[45]．$A = (a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ の場合を示す．他の場合も同様である．n を固定し $I_1, \ldots, I_n$ を考える．適当に並べ替えることにし, $I_i = (a_i, b_i]$ と書いた時 $a_i < b_i < a_{i+1} < b_{i+1}$ となるとして良い．当然 $a \le a_1, b_n \le b$ である．このとき

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_F(I_i) = \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)) \le F(b_n) - F(a_1) \le F(b) - F(a) = \mu_F((a,b]).$$

従って $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(I_i) \le \mu_F((a,b])$．逆の不等式を示す．先ほどの a_i, b_i とは別に改めて $I_i = (\alpha_i, \beta_i]$ とおくことにする．$\varepsilon > 0$ を取る．$\varepsilon_i > 0, \delta > 0$ を適当に取り,

$$\mu_F((\alpha_i, \beta_i + \varepsilon_i]) \le \mu_F(I_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}, \qquad \mu_F((a+\delta, b]) \ge \mu_F((a,b])) - \varepsilon \tag{8.17}$$

とできる．開集合族 $\{(\alpha_i, \beta_i + \varepsilon_i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ はコンパクト集合 $[a+\delta, b]$ を被覆するので十分大きく N を取れば

$$(a+\delta, b] \subset [a+\delta, b] \subset \cup_{i=1}^{N} (\alpha_i, \beta_i + \varepsilon_i) \subset \cup_{i=1}^{N} (\alpha_i, \beta_i + \varepsilon_i].$$

従って

$$\mu_F((a+\delta, b]) \le \sum_{i=1}^{N} \mu_F((\alpha_i, \beta_i + \varepsilon_i]). \tag{8.18}$$

(8.17), (8.18) より

$$\mu_F((a,b]) - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{N} \mu_F(I_i) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(I_i) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なのでこれは逆向きの不等式を示している． □

[45] 以下の証明は考え方は命題 1.5 の証明と同じである．

演習問題 8.11. $[0,1]$ の実数 x を 3 進小数で展開したものを

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

とする．ただし $\frac{1}{3^n} = \sum_{i=n+1} \frac{2}{3^i}$ のように 3 進小数の有理数は 2 が無限に現れる表記の方を取ることにする．上記の時

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$$

と定める．
(1) F は狭義単調増加な連続関数で $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ となることを示せ.
(2) 前期レポート問題の解説にあった Cantor 集合 $C \subset [0,1]$ を考える．$\mu_F(C^c) = 0$ であることを示し, μ_F はルベーグ測度に対して特異連続な測度であることを示せ.

定義 8.12 (Lebesgue-Stieltjes 積分の定義)**.** F を $I = [a,b]$ 上の右連続有界変動関数とする．ただし $-\infty < a < b < +\infty$ とする．F の正の変動関数 P_F, 負の変動関数 N_F のそれぞれに対応する有限測度を μ_F^+, μ_F^- とする[46]．$[a,b]$ 上の符号付き測度 μ_F を

$$\mu_F(A) = \mu_F^+(A) - \mu_F^-(A) \qquad A \in \mathfrak{B}(I)$$

と定める．また $[a,b]$ 上のボレル可測関数 f が $f \in L^1(I, \mu_F^+) \cap L^1(I, \mu_F^-)$ を満たす時

$$\int_I f(x) d\mu_F(x) = \int_I f(x) d\mu_F^+(x) - \int_I f(x) d\mu_F^-(x)$$

と定める．またこの積分を $\int_a^b f(x) dF(x)$ とも書く．これを Lebesgue-Stieltjes 積分と言う.

演習問題 8.13. $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ を右連続単調増加関数で $\phi(0) = 0$ とする.f を非負値 Borel 可測関数とし不等式

$$f(t) \le K_1 + K_2 \int_{(0,t)} f(s) d\phi(s) < \infty \qquad \text{for all } t > 0$$

が成立するとする．ただし K_i は非負の定数, 積分は Lebesgue-Stieltjes 積分である．このとき

$$f(t) \le K_1 \exp(K_2 \phi(t)) \qquad t > 0. \tag{8.19}$$

これを次に従って示せ.
(1) G を $\mathbb{R}$ 上の C^1 関数とする．$x = x(t)$ を $[0, \infty)$ で定義された右連続有界変動関数とする．このとき次の連鎖率が成り立つ.

$$\begin{aligned} G(x(t)) - G(x(0)) = & \int_{(0,t]} G'(x(t-0)) dx(t) - \sum_{\{s \in (0,t]\}} G'(x(s-0)) \Delta x(s) \\ & + \sum_{\{s \in (0,t]\}} \Delta G(x(s)). \end{aligned} \tag{8.20}$$

[46] $\mu_F^{\pm}(\{a\}) = 0$ であるのでこれらの測度は $(a,b]$ で定義されているとみなせる. 従って以下で定義する $\int_a^b f(x) dF(x)$ は $\int_{(a,b]} f(x) dF(x)$ と書いてもよい.

ここで $\Delta G(x(t)) = G(x(t)) - G(x(t-0))$, $\Delta x(t) = x(t) - x(t-0)$, $x(t-0) = \lim_{h\to 0, h<0} x(t+h)$ である[47].
(2) $K_1 > 0$ とする. $G(x) = \log(x/K_1)$ $(x > 0)$, $x(t) = K_1 + K_2 \int_{(0,t]} f(s)d\phi(s)$ の場合に (1) を適用し (8.19) を示せ.

演習問題 8.14. $[0,1]$ 上の有界変動かつ連続な実数値関数 $f = f(x)$ $(0 \le x \le 1)$ で $f(0) = 0$ を満たすもの全体を $CBV([0,1])$ と書く. $CBV([0,1])$ は有界変動ノルム $\| \ \|_{BV}$ で完備なバナッハ空間となることを示せ. またこの空間は可分ではないことを示せ.

9 フーリエ変換

関数空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, L^2 でのフーリエ変換のユニタリ性. Nash の不等式のフーリエ変換を用いた証明. Riesz-Thorin の補間定理を認めて, Hausdorff-Young の不等式などの証明.

[47](8.20) において $\sum_{s\in(0,t])}$ は可算無限和になる可能性があるが $x(t)$ が有界変動であることから収束することになる.