4. 関数の極限

4.1 定義

Definition 1 (1) $x = a$ の近くで定義された関数 $y = f(x)$ を考える．$f(x)$ は $x = a$ では定義されていなくてもよい．

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

を ε-δ 論法を用いて定式化する (Cauchy, Weierstrass による) と

「任意の正数 ε に対して、ある正数 δ が存在して $0 < |x - a| < \delta$ をみたすすべての x について $|f(x) - A| < \varepsilon$ となる.」

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ を次のように定義する．

「任意の正数 ε に対して，ある R が存在して $x > R$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$.」

(3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ を次のように定義する．

「任意の正数 ε に対して，ある S が存在して $x < S$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$.」

(4) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ を次のように定義する．

「任意の正数 M に対して，ある R が存在して $x > R$ ならば $f(x) > M$.」

注意 2 (1) δ は ε に応じて変わるし、いろいろな取り方がある．ただし，ε が小さくなればなるほど δ を小さくしなければならないだろう．

(2) a が $f(x)$ の定義域に入っていて $f(a) \neq A$ でも $\lim_{x \to a} f(x) = A$ となり得ることに注意してほしい.

(3) 右側極限値 $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$ ($x > a$ を満たしつつ，x は a に近付くとする), 左側極限値 $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x)$ ($x < a$ を満たしつつ，x は a に近付くとする) も ε-δ 論法で定式化される (教科書を参照して下さい).

(4) 上記のように極限を定式化すると，この定義に基づいて，“1. 数列の極限、関数の極限、関数の連続性 (高校の復習)“についての Theorem 4, Theorem 5 を証明できる．

問 1 次に従い $\displaystyle\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ を示せ.

(1) $|x - 1| < 1$ のとき $|x^2 - 1| < 3|x - 1|$ となることを示せ.

(2) $\varepsilon > 0$ が与えられたとする.

$$|x - 1| < \delta \text{ならば } |x^2 - 1| < \varepsilon$$

が成立するような δ を ε を用いて求め, $\displaystyle\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ を示せ.

Definition 3 関数 $y = f(x)$ は a を含むある集合 I を定義域とする関数とする．$f(x)$ が $x = a$ で連続とは $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ のときにいう．すなわち「任意の正数 ε に対して、ある正数 δ が存在して $0 < |x - a| < \delta$ をみたすすべての x について $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる.」$y = f(x)$ が定義域 I の各点で連続のとき, $y = f(x)$ は I で定義された連続関数であるという.

注意 4 (1) 上の定義で、$0 < |x-a| < \delta$ を $|x-a| < \delta$ にしても同じである.
(2) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続でないということは命題の否定を考えることにより,
「ある正数 ε が存在して、どのように正数 δ をとっても $|x-a| \leq \delta$ をみたす x で $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$ となるものが存在する.」となる.

4.2 補足

関数の極限について, よく使われる二つの定理を述べる.

Theorem 5 (コーシーの判定条件) $f(x)$ を a の近くで定義された関数とする. 次の $(1), (2)$ は同値である.
(1) 極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する.
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $0 < |x-a| < \delta, 0 < |x'-a| < \delta$ をみたすならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

このコーシーの判定条件は、数列の収束に関するコーシーの判定条件「$\{a_n\}$ が収束する」と「$\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0$」が同値ということと次の定理を用いて証明される.

Theorem 6 $f(x)$ を a の近くで定義された関数とする. 次の $(1), (2)$ は同値である.
(1) $\lim_{x\to a} f(x) = A$
(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (ただし $x_n \neq a\ \forall n$) をみたすすべての数列 $\{x_n\}$ について $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

4.3 ε-δ 論法, ε-N 論法が必要になる理由

これまで極限の厳密な定義を学んできたが, なぜ「限りなく近付く流」の定義では不十分なのか説明したい. (興味深いことに微積分法の発見者ニュートンやライプニッツもすでに ε-N 論法, ε-δ 論法に近い考え方を持っていたらしい.)
(1) 至るところ微分不可能な連続関数の存在

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a^k \cos(b^k x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

ただし $0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ とおく. このとき, $f_n(x)$ は n を限りなく大きくするとある連続な関数 $g(x)$ に近付いていくことがわかる. 驚くべき事にこの関数 $g(x)$ は連続だが, どの x でも微分不可能である. $g(x)$ が $x = a$ で微分可能とは極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

が存在することである. もちろん, $f_n(x)$ は $\cos$ の三角関数を足し合わせているだけだから, 何回でも微分できる関数だが, その極限の関数はそうでは無いというのである. このような微妙なことをチェックするには限り無く流では到底無理である.

(2) 次のような問題を考えよう：
問 2 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を $[0,1]$ の上で定義された関数の列とする. 各 $f_n(x)$ は $[0,1]$ で連続とする. 今, 各 $x \in [0,1]$ について極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとする. その極限は各 x に依存するので, $f(x)$ と書くことにする. では, 関数 $f(x)$ は $[0,1]$ 上の連続関数になるだろうか?

答えは「Yes のときもあるし NO のときもある」である．ε-N 論法など極限の概念の厳密な定義に貢献した Cauchy(1821) ですら、上の問は Yes と思っていたらしく, Abel の反例 (1826) に関して頭を悩ませていたという。簡単な例として $f_n(x) = x^n$ と $f_n(x) = \frac{1}{n+x}$ を考えてみるとよい．

$f(x)$ が $x = a$ で連続とは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ということだから, $f_n(x)$ が連続関数であることに注意すると

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

という “二つの極限” の順序交換ができるということと同じである．しかし, 一般的にはこのようなことはできないのである．このような「極限の順序交換」は実際上の計算でも理論上でもいろいろな場面 (たとえば「微分方程式の解の存在証明」など) で出て来るものである．この交換がいつできるかを論じるためには, 極限や連続性の定義において「限りなく流」では不十分で, 「ε-δ 論法」などのきちんとした定義が必要になるのである．上記の問 2 の問題はその後、Weierstrass による関数の一様収束という概念 (1841) を生み出すことになる．実は (1) であげた $f_n(x)$ は $g(x)$ に一様収束している．(解析学 A, B ではこの問題は扱わない。)

5. 初等関数

多項式, あるいはそれの分数の形で書かれる関数, 三角関数, 指数関数, 対数関数などの関数を初等関数と言う．

これらは, 連続関数の代表的な例だが, これらの関数の連続性はどのようにチェックするのだろうか?

(1) 多項式, それらの分数の関数：$f(x) = x$ の連続性は自明であろう．このことを用いれば，これらが連続であることは, 1. 高校の復習の Theorem 4 から従う．

(2) 三角関数：

$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ は $\sin x$ の定義から x が十分小さい時, $|\sin x| \le |x|$ ということからわかる．

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ だから $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ がわかる．一般の x での $\sin x, \cos x$ の連続性は加法定理を用いて示される．$\tan x$ $(x \neq \frac{n\pi}{2})$ の連続性は $\sin x, \cos x$ の連続性と 1. 高校の復習の Theorem 4 (4) による．

(3) 指数関数：

$a > 0$ とする．a^x $(x \in \mathbb{R})$ の定義について述べる．

(i) $x = n \in \mathbb{N}$ のとき

a^n は a を n 回掛け合わせたもの．また $a^0 = 1$ と定義する．

(ii) $x = -n$ $(n \in \mathbb{N})$ のとき

$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ と定義する．

(iii) $x = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ のとき

$f(t) = t^n$ $(t \ge 0)$ という関数を考える．$f(0) = 0, t \to f(t)$ は (狭義) 単調増加, $\lim_{t \to \infty} t^n = \infty$ より任意の $a > 0$ に対して $t^n = a$ はただ一つの解をもつ．これは中間値の定理より従う．この値を $a^{1/n}$ と定義する．

(iv) $x=\frac{m}{n}$ $n,m\in\mathbb{N}$ のとき

$\frac{m}{n}$ は既約分数とする．$a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ と定める．$x=-\frac{m}{n}$ のときは $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ と定める．

(v) x が無理数のとき

Theorem 7 (有理数の稠密性) 有理数は実数の中で稠密である．すなわち，任意の実数 x に対して有理数の列 x_n で $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ となるものがある．

を用いる．

x に対して，x に収束する有理数の列 x_n を用いて，

$$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{x_n} \tag{1}$$

と定める．式 (1) の右辺の極限が収束することは，a^{x_n} がコーシー列であることからわかる．また，この極限が $\{x_n\}$ の取りかたによらないこともわかるので，この定義は well-defined である．

以上 $a>0$ のとき a^x を定義した．この定義に基づき，指数関数 ($f(x)=a^x$ $a>0,x\in\mathbb{R}$) の連続性が示される．また $a^{x+y}=a^x\cdot a^y, a^{xy}=(a^x)^y, (ab)^x=a^xb^x$ などの指数法則も示すことができる．

0 については $0^n=0$ ($n\in\mathbb{N}$) である．$0^{1/n}$ を $x^n=0$ の解と考えても $0^{1/n}=0$ とすべきことはよいであろう．そこで, $x\neq 0$ のとき $0^x=0$ と定める．ところで、$a>0$ なら $a^0=1$ です．また $x\neq 0$ のとき $0^x=0$ と定めた．では 0^0 は 0 とすべきでしょうか?それとも 1 とすべきでしょうか?

(4) 対数関数

対数関数は指数関数の逆関数として定義される．ここで次の定理に注意する．この定理で逆関数が存在することは，中間値の定理から従うことに注意せよ．

Theorem 8 *$y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ を単調増加 (すなわち, $x<x'$ ならば $f(x)<f(x')$) または単調減少 ($x<x'$ならば $f(x)>f(x')$) な連続関数とする．このとき, 逆関数 $x=g(y)$ は y の連続関数である．*

この結果と指数関数が連続関数であることから, 対数関数 $y=\log_a x$ ($a>0,x>0$) が x の連続関数であることがわかる．また n を自然数とするとき，$g(x)=x^{1/n}$ ($x\ge 0$) は単調増加な連続関数 $f(x)=x^n$ の逆関数だから連続である．さらに一般的に $g(x)=x^a$ ($x>0,a\in\mathbb{R}$) の連続性は $g(x)=e^{a\log x}$ と書き直して下の定理を用いればよい．

Theorem 9 *$y=f(x)$ $(a\le x\le b)$, $z=g(y)$ $(\alpha\le z\le\beta)$ は x,y の連続関数とする．さらに $f([a,b])\subset[\alpha,\beta]$ とする．このとき, 合成関数 $h(x)=g(f(x))$ $(a\le x\le b)$ はやはり x の連続関数になる．*

なども使えば, 上の初等関数の和, 差, 積, 商, 逆関数をとる操作, 関数の合成を取る操作でたくさんの連続関数を作ることができる．

注意 10 三角関数, 例えば, $f(x)=\sin x$ $(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ は単調増加関数だから連続な逆関数が定義される．この関数は $y=\arcsin x$ $(-1\le x\le 1)$ と書かれる関数である．これも大事な関数だが, 高校までは出て来なかった関数である．この関数は微分法の解説のところで取り上げる．