ルベーグ積分入門*

会田茂樹

内容

以下に書いてある%は各章の完成率です。100%と書いてあってもすこし書き直す可能性があります。

1 Introduction

2 リーマン積分 (100%)

2.1 平面上の積分

2.2 面積について

2.3 ルベーグ測度について

3 測度空間 (100%)

3.1 定義と性質

3.2 ある集合族から生成された σ-加法族

4 可測関数 (100%)

4.1 定義と性質

4.2 補足

5 ルベーグ積分の定義 (100%)

5.1 非負単関数の積分

5.2 非負可測関数の積分と単調収束定理

5.3 一般の関数に対する積分の定義とその性質

6 リーマン積分とルベーグ積分の関係 (100%)

7 収束定理 (40%)

8 ユークリッド空間上の Fubini の定理 (90%)

---

*2007.11.5 版

8.1 ボレル可測関数に対する Fubini の定理

8.2 ルベーグ可測関数に対する Fubini の定理

9 色々な関数の収束概念 (0%)

10 補足 (50%)

10.1 ルベーグ測度の性質について

10.2 Carathéodory による測度の構成法

10.3 直積測度と Fubini の定理

1 Introduction

この講義ではルベーグ積分を学ぶ。高校や大学 1 年の時に学んだ積分はリーマン積分と呼ばれるもので、リーマン積分だけではいろいろと不都合なことがあり、ルベーグ積分まで積分論を進めておく必要がある。リーマン積分だけでは不都合な理由は

(1) リーマン積分可能な関数はルベーグ積分可能な関数に比べて圧倒的に少ない。

(2) リーマン積分可能な関数の極限は一般にはリーマン積分可能ではない。しかし、ルベーグ積分可能な関数の極限はやはりルベーグ積分可能である。

もう少し、正確に述べよう。

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を閉区間 $[a,b]$ 上のリーマン積分可能な関数とする。ある $K>0$ が存在して、すべての n,x について $|f_n(x)| \le K < \infty$ (有界性) を仮定する。すべての $x \in [a,b]$ について $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が収束するとし、極限を $f(x)$ と書く。このとき、

(1) $f(x)$ は積分可能か?

(2) (積分と極限の順序交換定理) $f(x)$ が積分可能の時

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{1.1}$$

となるか?

という問題を考えよう。

答えは

(1) $f(x)$ は一般にはリーマン積分可能ではないが、ルベーグ積分可能である。

(2) $\int_a^b f(x)dx$ をルベーグ積分の意味で解釈すれば (1.1) は成立する。リーマン積分の範疇では $f_n(x)$ が連続関数で $f(x)$ に一様収束しているときは (1.1) が成立するのは微分積分でよく知られた事実だが、ルベーグ積分の順序交換定理はこれよりはるかに一般的な定理なのである。さらに次の事も指摘しておこう。次の問題を考える:

問題 A_i $(i=1,2,\ldots)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の面積確定な集合で、

(1) ある大きな正方形 $E=[a,b]\times[c,d]$ が存在し、すべての A_i が E に含まれるとする。

(2) $i\neq j$ のとき $A_i\cap A_j=\emptyset$ とする。

このとき、$\cup_{i=1}^{\infty}A_i$ の面積が確定であるか? また

$$|\cup_{i=1}^{\infty}A_i|=\sum_{i=1}^{\infty}|A_i| \qquad\qquad \text{(面積の完全加法性)}$$

が成立するか?

この問題では、平面上の集合に対してどのように面積を定義するかをはっきりさせねばならない。面積・体積と言うとアプリオリ (a priori, 先験的) に与えられているような気がするが定義が必要なものだと認識する必要がある。リーマン式の面積 (1 年次に講義したはず。次の章で復習する) に基づくと $\cup_{i=1}^{\infty}A_i$ は一般にはリーマン式に面積の定義される集合にはならず、完全加法性は成立しないということになる。しかし、ルベーグ式に面積を定義すると

(1) リーマン式に面積が定義できれば、ルベーグ式に面積が定義可能 (ルベーグ式の面積が定義できる集合の方が多い)

(2) ルベーグ式に面積が定義できる集合については、完全加法性が成立する

のようになるのである。上の完全加法性も積分と極限の交換可能性の一つの表現なのだが、このようにルベーグ式の面積 (ルベーグ測度) を考えた方が、都合のよい事が多いのである。

さて、リーマン積分はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の積分論であったがルベーグ積分論はより一般な測度空間と呼ばれる空間で定式化される。この講義でも一般な測度空間の枠組でルベーグ積分を学ぶことにする。一般な集合上の話になるので、抽象的な話になるが、それも訓練と思ってついてきて欲しい。

私の専門分野は確率論と解析学だが、皆さんには確率論と言うと高校で学んだ場合の数の計算という印象が強いかもしれない。しかし、現代的な確率論ではルベーグ式の積分論を修得するのは必須であると言える。

最後に、

- $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ について、リーマン式の積分とルベーグ式の積分のおおざっぱな定義
- 初等確率論に現れる期待値 (平均値) の定義がルベーグ式の積分であること

を述べておこう。

(1) リーマン式

$[a,b]$ を分割して積分する。すなわち分割

$$\Delta : a=a_0<\cdots a_n=b$$

に対してリーマン和

$$I(f,\{\xi_i\},\Delta)=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\left(a_i-a_{i-1}\right) \quad (a_i\le \xi_i\le a_{i+1})$$

の極限 $\lim_{|\Delta|\to 0} I(f,\{\xi_i\},\Delta)$ を計算する。ただし $|\Delta| = \max_i(a_i - a_{i-1})$.
(2) ルベーグ式
　$f(x)$ が $[\alpha,\beta]$ の範囲の値をとるとする。$[\alpha,\beta]$ の分割

$$\Delta : \alpha = \alpha_0 < \cdots \alpha_m = \beta$$

に対して

$$\tilde{I}(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i-1} |\{x \mid \alpha_{i-1} \le f(x) < \alpha_i\}|$$

を計算し極限 $\lim_{|\Delta|\to 0} \tilde{I}(f,\Delta)$ を計算する。ただし $|\{x \mid \alpha_{i-1} \le f(x) < \alpha_i\}|$ は $[a,b]$ の部分集合 $\{x \mid \alpha_{i-1} \le f(x) < \alpha_i\}$ の長さを表す。
(3) 初等確率論における期待値の定義
　確率変数 X が異なる有限個 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ の値を取り、$X = x_i$ になる確率が p_i とする。このとき X の期待値は次で定義される:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

これはルベーグ式の積分である。

参考文献

[1] 高木貞治, 解析概論, 岩波書店

[2] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 裳華房

[3] 西尾真喜子, 確率論, 実教出版

[4] 竹之内脩, ルベーグ積分, 培風館

[5] 志賀徳造, ルベーグ積分から確率論, 共立出版

[6] 新井仁之, ルベーグ積分講義, 日本評論社

[7] 盛田健彦, 実解析と測度論の基礎, 培風館

[8] 吉田伸生, ルベーグ積分入門, 遊星社

[9] 梅田亨, 徹底入門・測度と積分, 日本評論社・数学セミナー (2002 年 11 月号〜2003 年 4 月号) の連載記事

　[1, 2, 3] は 1980 年以前、[4] は 1980 年、[5, 6, 7, 8] は 2000 年以後の出版である。[1, 4] はコンパクトにまとまっている。[7, 4] はルベーグ積分の歴史にも詳しい。また、[7] では、Stieltjes 積分の説明も詳しい。[6] は記述がわかりやすいが、測度論一般の説明と言うより、$\mathbb{R}^n$ 上の関数、測度の実解析的観点から書かれている。[3] は全測度 1 の測度空間、確率空間上の測度論が基礎から展開され、確率論特有の言葉に慣れるのによい。[5] では、講義ではあまり話されない停留位相、ラプラスの漸近公式も述べられている。[9] は「有界収束定理」を中心にリーマン積分とルベーグ積分の比較を論じていて興味深い。

2　リーマン積分

2.1　平面上の積分

ここではリーマン積分の定義を思い出す。記述を簡単にするため、2 次元 (平面) の場合に述べるが、一般次元でも同じである。$E = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ とする。$f(x, y)$ を E 上の有界関数とする。$\displaystyle\iint_E f(x, y)dxdy$ の定義を思い出そう。

定義 2.1 E の分割

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

に対し、

$$\begin{aligned} S(f, \Delta) &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} \sup\{f(x, y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ s(f, \Delta) &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} \inf\{f(x, y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} S(f) &= \inf\{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く}\} \\ s(f) &= \sup\{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く}\} \end{aligned}$$

$S(f), s(f)$ については次の Darboux の定理が基本的である。

定理 2.2 Δ に対して $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ とおく。$\displaystyle\lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \Delta) = S(f)$, $\displaystyle\lim_{|\Delta| \to 0} s(f, \Delta) = s(f)$ が成立する。

定義 2.3 $S(f) = s(f)$ のとき、$f(x, y)$ は E 上可積分と言い、この共通の値を $\displaystyle\iint_E f(x, y)dxdy$ と書く。

注 2.4 (1) $f(x, y)$ が連続ならば可積分である。実は可積分になるための必要十分条件は $f(x, y)$ の” 不連続点の集合の測度ゼロ” ということが知られている。これについては演習問題 6.2 を参照せよ。
(2)$f(x, y)$ が可積分ならば Darboux の定理からどのように分点 $\xi_{i,j} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ を選んでも

$$\iint_E f(x, y)dxdy = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

となる。逆にこの極限が分点、分割の取り方によらず同じ値に収束するなら、$f(x, y)$ が可積分になることも Darboux の定理から容易に分かるだろう。

2.2 面積について

前章の積分に基づいてリーマン積分の意味での面積の定義を思い出そう。有界集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ を考える。

$$1_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \in A^c \end{cases} \tag{2.1}$$

と定義し、1_A を A の定義関数と言う。

定義 2.5 (A の面積の定義) $A \subset E$ となる長方形を一つ取る。1_A が E で可積分のとき、

$$|A| = \iint_E 1_A(x,y)dxdy. \tag{2.2}$$

この定義で、ある E に対して 1_A が可積分ならば他の A を含む長方形 E' についても 1_A は E' 上可積分で

$$\iint_E 1_A(x,y)dxdy = \iint_{E'} 1_A(x,y)dxdy$$

が成立する。したがって、A の面積 $|A|$ の定義は E の取り方にはよらない。

有界でない集合についても広義積分で面積を定義できるが、リーマン積分に基づいた面積の定義に深入りしてもあまり意味がないので、述べないことにする。

定義 2.6 $S(1_A)$ を $\overline{m}_J(A)$, $s(1_A)$ を $\underline{m}_J(A)$ と書き、それぞれ A の *Jordan* 外測度、*Jordan* 内測度と言う。また面積 $|A|$ のことを A の *Jordan* 測度とも呼び、$m_J(A)$ とも書く。$S(1_A), s(1_A)$ を定義する時には、A を含む長方形 E を取ることになるが、これらの値は E の取り方にはよらない。積分の定義から $\underline{m}_J(A) = \overline{m}_J(A)$ のとき、A の面積が確定で、この共通の値が A の面積の値になる。またこのとき、A は *Jordan* 可測と言う。

例 2.7 (1) $c(t) = (x(t), y(t))$ を区分的に C^1 の平面上の単純閉曲線 ($c(0) = c(1)$ かつ $t \neq t'$ のとき $c(t) \neq c(t')$) とし、この曲線で囲まれた図形 A の面積は確定。
(2) A を $E = [0,1]^2$ の点で x 座標、y 座標がともに有理数であるような点全体の集合とする。$\underline{m}_J(A) = 0$, $\overline{m}_J(A) = 1$ で *Jordan* 可測ではない。

この講義では証明しないが以下の性質が成り立つ。

定理 2.8 以下 A, A_i は有界集合とする。
(1) $\underline{m}_J(A) \leq \overline{m}_J(A)$.
(2) (*Jordan* 測度の有限加法性)A_1, A_2 が *Jordan* 可測ならば $A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ も *Jordan* 可測で

$$m_J(A_1 \cup A_2) = m_J(A_1) + m_J(A_2) - m_J(A_1 \cap A_2).$$

(3) $\{A_i\}_{i=1}^n$ が *Jordan* 可測ならば $\cup_{i=1}^n A_i$ も *Jordan* 可測で

$$m_J(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n m_J(A_i).$$

(4) $A \subset E$ (E は長方形) のとき、

$$\underline{m}_J(A) = |E| - \overline{m}_J(A^c \cap E).$$

また A が *Jordan* 可測ならば $A^c \cap E$ も *Jordan* 可測である。

演習問題 2.9 A を $\mathbb{R}^2$ の集合とする。1_A の不連続点全体の集合は A の境界と一致することを示せ。ただし、A の境界 ∂A とは次の集合である。

$$\partial A = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して、} B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset, B_\varepsilon(P) \cap A^c \neq \emptyset \right\}. \tag{2.3}$$

ただし、$P = (p, q)$ のとき $B_\varepsilon(P) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} < \varepsilon\}$.

演習問題 2.10 有界集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ の面積が確定するための必要十分条件は A の境界の *Jordan* 測度の面積が 0 であることを示せ。

演習問題 2.11 $\mathbb{R}$ の閉区間 $I = [0, 1]$ をとる。

(i) I の中点を中心とした長さ $\frac{1}{3}$ の開区間を除く。

(ii) (i) の操作で除かれた後の左側の閉区間を I_1, 右側の閉区間を I_2 とする。I_1 の中点を中心に、長さ $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ の開区間を除く。同様に I_2 の中点を中心に長さ $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ の開区間を除く。

(iii) (ii) の操作の後残っている閉区間を左から $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{2,1}, I_{2,2}$ とする。おのおのの閉区間の中点を中心とした長さ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ の開区間を除く。以下この操作を繰り返す。

以上のような開集合を除去して最終的に得られる閉集合 C は *Cantor* 集合と呼ばれる。$m_J(C) = 0$ を示せ。また、n 回目の操作で除かれる開区間の長さを r^n $(0 < r < \frac{1}{3})$ として得られる閉集合を C_r と書くとき C_r は *Jordan* 可測では無いことを示せ。

2.3 ルベーグ測度について

例 2.7 (2) の集合 A は E の稠密な部分集合だが可算集合である。したがって、その面積は 0 になってもおかしくない。しかし、その Jordan 外測度は正でそのため面積が 0 ではなくなっている。これは、Jordan 外測度が規則的に並んだ長方形の和で覆ったときの面積で近似するという近似の仕方が粗すぎることにある。そのためルベーグはもっとうまく外から図形を覆って外測度が小さくなるように工夫して次の定義を置いた。以下では特に 2 次元にかぎらず一般次元で定義を与える。

定義 2.12 A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。A のルベーグ外測度 $\overline{m}_L(A)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
&\overline{m}_L(A) \\
&\quad = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \;\middle|\; I_i \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の直方体 } (\textstyle\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \text{ の形の図形 }) \text{ で、} A \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ルベーグ外測度は次の性質を持つことが証明できる。

定理 2.13 (ルベーグ外測度の基本性質)
(1) 任意の $A \subset \mathbb{R}^n$ について $\overline{m}_L(A) \geq 0$.
(2) $A \subset B$ ならば $\overline{m}_L(A) \leq \overline{m}_L(B)$
(3) 任意の集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\overline{m}_L(A \cup B) \leq \overline{m}_L(A) + \overline{m}_L(B)$$

(4) 任意の集合 $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, \ldots,)$ に対して、

$$\overline{m}_L(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{m}_L(A_i).$$

注 2.14 (1) $\mathbb{R}^n$ の空集合 $\emptyset$ に対しても、ルベーグ外測度を定義することができる。空集合は任意の $\mathbb{R}^n$ の部分集合の部分集合になるから、上の定義に従うと $\overline{m}_L(\emptyset) = 0$ となる。これは、机上の空論のようだが、これからのいろいろな計算で空集合の測度を 0 と考えておくのが自然である。
(2) N を自然数とし、集合 $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(1 \leq n \leq N)$ が与えられたとき、

$$\cup_{i=1}^{N} A_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{ある } 1 \leq i \leq N \text{ が存在して } x \in A_i\}$$

である。しかし、上記の (4) の記号で

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{ある } 1 \leq i < \infty \text{ について } x \in A_i\}$$

が定義であることに注意してほしい。A_∞ という集合があってそれの要素も含むというわけでは無い。無限級数の和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ であって $a_1 + a_2 + \cdots + a_\infty$ では無いのと同様である。

また次もわかる。次の (1)-(4) は定義から簡単に (有界閉集合の定義を知っていれば) わかる。(5) は少し工夫を要する。

演習問題 2.15 (1) A_i がルベーグ外測度ゼロの集合ならば $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ のルベーグ外測度もゼロ。
(2) A が可算集合ならば $\overline{m}_L(A) = 0$.
(3) A を有界集合とすると $\overline{m}_L(A) \leq \overline{m}_J(A)$.
(4) A を有界閉集合とする。このとき、A のルベーグ外測度が 0 ということと $Jordan$ 測度が 0 ということは同じである。
(5) E を $\mathbb{R}^n$ の直方体とする。$\overline{m}_L(E)$ は E の体積 $|E|$ と一致する。

さらに

定理 2.16 $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。次は同値である：

(i) 任意の直方体 E に対して

$$\overline{m}_L(A \cap E) + \overline{m}_L(A^c \cap E) \leq \overline{m}_L(E).$$

(ii) 任意の集合 B に対して

$$\overline{m}_L(A\cap B)+\overline{m}_L(A^c\cap B)\le \overline{m}_L(B).$$

上記定理で $\le$ としているが、定理 2.13 (3) より逆向きの不等号は常に成立しているから等号成立と同じことである。次にルベーグ測度の定義を与える。

定義 2.17 A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。任意の $\mathbb{R}^n$ の部分集合 B に対してつねに

$$\overline{m}_L(A\cap B)+\overline{m}_L(A^c\cap B)=\overline{m}_L(B) \tag{2.5}$$

が成立するとき、A をルベーグ可測集合、$\overline{m}_L(A)$ を A のルベーグ測度と言い $m_L(A)$ と書く。また、$\mathbb{R}^n$ のルベーグ可測な部分集合全体を $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ と書く。

注 2.18 A を有界集合とする。E を直方体で $A\subset E$ のとき、$B=E$ とすると (2.5) は

$$\overline{m}_L(A)=|E|-\overline{m}_L(A^c\cap E) \tag{2.6}$$

と同じである。この式は定理 2.8 の (4) の式に従い、右辺を A の「ルベーグ内測度」の定義と思うならば、「ルベーグ内測度＝ルベーグ外測度」を意味し、*Jordan* 測度の定義から見ても定義としてふさわしいと見て取れる。

以下の定理からルベーグ測度はリーマン式の面積・体積の拡張概念であるとわかる。

定理 2.19 $\mathbb{R}^n$ の有界集合 A が *Jordan* 可測とする。このとき、A はルベーグ可測で $m_J(A)=m_L(A)$.

証明 定理 2.16 (2) から任意の直方体 E について

$$\overline{m}_L(A\cap E)\le |E|-\overline{m}_L(A^c\cap E) \tag{2.7}$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}
\overline{m}_L(A\cap E) &\le \overline{m}_J(A\cap E) \quad (\text{演習問題 } 2.15\ (3)) && (2.8)\\
&\le |E|-\overline{m}_J(A^c\cap E) \quad (A\text{ の Jordan 可測性と定理 } 2.8\ (4)) && (2.9)\\
&\le |E|-\overline{m}_L(A^c\cap E) \quad (\text{演習問題 } 2.15\ (3)) && (2.10)
\end{aligned}$$

これは、(2.7) を示している。(2.7) からなぜ $\overline{m}_L(A)=\overline{m}_J(A)$ が従うかは演習問題とする。 □

定理 2.20 の (3), (4) が解析での極限と積分の順序交換に有効に働く基本的に重要な性質である。

定理 2.20 (ルベーグ測度, ルベーグ可測集合の基本性質)
(1) $\mathbb{R}^n,\emptyset\in\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$.
(2) $A\in\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ ならば $A^c\in\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$.
(3) $A_i\in\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ $(i\in\mathbb{N})$ ならば $\cup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$.
(4) (ルベーグ測度の完全加法性) $A_i\in\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ $(i\in\mathbb{N})$ かつ $i\ne j$ のとき $A_i\cap A_j=\emptyset$ ならば

$$m_L(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m_L(A_i). \tag{2.11}$$

定理 2.19 とあわせれば面積・体積が定義される集合が非常にたくさんあることがわかる。

注 2.21 ルベーグ測度のその他の基本的な性質は 10.1 章にまとめておく。また、現代的な測度論では Carathéodory にしたがって、一般的な集合上で

1. 外測度の定義をあたえる。
2. その外測度を用いて (2.5) の式をみたす A 全体を可測集合とよび、測度を導入する。

の順番で理論が展開される。その観点からは定理 2.16 (2) の直方体から任意の集合への拡張は非常に重要である。10.2 Carathéodory による測度の構成法を参照せよ。

次の章からは $\mathbb{R}^n$ とは限らない一般な集合上で測度論を展開していく。

3 測度空間

3.1 定義と性質

まず、集合に関する復習をしておく。

定義 3.1 以下 X と書いたら集合を表す。また、2^X で X の部分集合全体を表す (X 自身、$\emptyset$ も入る)。また、任意の $A \subset X$ に対して $\emptyset \subset A$ である。2^X の部分集合は X の部分集合の集合だがそれを集合族と呼ぶ。

すでに前の章で $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ の定義、notation について注意したが、以下の定義について復習しておく：

定義 3.2 (1) $A_i \subset X$ $(i \in \mathbb{N})$ に対して

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in X \mid \text{ある } i \in \mathbb{N} \text{ が存在して } x \in A_i\ \} \tag{3.1}$$

$$\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in X \mid \text{すべての } i \in \mathbb{N} \text{ について } x \in A_i\} \tag{3.2}$$

(2) より一般に任意の $S \subset \mathbb{N}$ に対して、集合族 A_i $(i \in S)$ が与えられたとき、

$$\cup_{i \in S} A_i = \{x \in X \mid \text{ある } i \in S \text{ が存在して } x \in A_i\ \} \tag{3.3}$$

$$\cap_{i \in S} A_i = \{x \in X \mid \text{すべての } i \in S \text{ について } x \in A_i\} \tag{3.4}$$

定義 3.3 $A, B \subset X$ に対して

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

とかき、差集合という。B^c は B の補集合 (complementary set) を表す。

次の演算規則もよく用いられる。以下では可算個の集合について述べているが、もっと一般の場合も同様に成り立つ。

命題 3.4 (1) (*de Morgan* の法則) $A_i \subset X\ i=1,2,\ldots$ に対して

$$(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \cap_{i=1}^{\infty} A_i^c, \quad (\cap_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \cup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

(2) ($\cup, \cap$ の分配法則)

$$(\cup_{i=1} \infty A_i) \cap B = \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) \tag{3.5}$$

$$(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) \cup B = \cap_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B) \tag{3.6}$$

演習問題 3.5

$$(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B_i)$$

は成立するか*?*

以上の事は基礎数理 B で学んだはずですが、ピンとこない人は、復習をしておいて下さい。

定義 3.6 (可測空間) X を集合、$\mathcal{F}$ を 2^X の部分集合 (すなわち $\mathcal{F}$ の要素は X の部分集合) とする。$(X, \mathcal{F})$ が可測空間であるとは次が成立する時に言う。
(1) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$.
(2) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$.
(3) $A_n \in \mathcal{F}\ (n=1,2,\ldots)$ ならば $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
上の (1), (2), (3) をみたす集合族を σ-*algebra,* σ-*field,*σ-加法族*,* σ-集合体などという。

例 3.7 $(X, 2^X)$ は明らかに可測空間である。X が有限集合あるいは可算個の要素からなる集合ならこれは自然な例である。

命題 3.8 $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする。
(1) 可測空間の定義の (3) に関連して次が成立する*:*
(3)$'$ $A_n \in \mathcal{F}\ (n=1,2,\ldots)$ ならば $\cup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{F}\ (N \in \mathbb{N})$.
(2) $A_n \in \mathcal{F}\ (n=1,2,\ldots)$ ならば $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}\ (\forall n)$, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

証明 (1) 定義 3.6 (2) の条件で、$A_n = \emptyset\ (n = N+1, N+2, \ldots)$ とすればよい。
(2) $\cap_{i=1}^{n} A_i = (\cup_{i=1}^{n} A_i^c)^c$ だから (1) と σ-加法族の定義 (2) から従う。$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ も同様である。
$\square$

注 3.9 定義 3.6 の (1), (2) と上の (3)$'$ をみたす集合族を有限加法族とよぶ。あきらかに σ-加法族は有限加法族である。

定義 3.10 (測度空間) $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし、m を $\mathcal{F}$ 上の関数とする。m が次の性質をみたすとき、m を測度、三つ組 $(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間と言う。
(1) すべての $A \in \mathcal{F}$ について $0 \le m(A) \le +\infty$ かつ $m(\emptyset) = 0$.
(2) (可算加法性, 完全加法性) $A_n \in \mathcal{F}$ が $A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m)$ をみたせば、

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \tag{3.7}$$

特に、
(i) $m(X_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ が存在して $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ のとき σ-有限測度空間、
(ii)$m(X) < \infty$ のとき有限測度空間、
(iii) $m(X) = 1$ のとき確率空間 (m を確率測度と言う)
と言う。

注 3.11 (1) $\mathcal{A} \subset 2^X$ とし, $(X, \mathcal{A}, m)$ が

(i) $\mathcal{A}$ は有限加法族

(ii) すべての $A \in \mathcal{A}$ について $0 \le m(A) \le +\infty$ かつ $m(\emptyset) = 0$.

(iii) $A_i \in \mathcal{A}$ $(1 \le i \le n, n \in \mathbb{N})$, が $A_i \cap A_j = \emptyset$ をみたせば $m(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$.

をみたすとき、有限加法的測度空間と言う。Jordan 測度はこの性質をみたす。

例 3.12 (1) X を集合とし、$\mathcal{F} = 2^X$ とする。

$$m(A) = \begin{cases} A \text{ の要素の数} & A \text{ が有限集合} \\ +\infty & A \text{ が無限集合.} \end{cases} \tag{3.8}$$

(2) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ としてルベーグ可測集合の全体 $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$, ,$m(A)$ を A のルベーグ測度の三つ組 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n), m_L)$.

確率論では

$$X = \{w : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n \mid w(0) = 0 \text{ で } w(t) \text{ は } t \text{ の連続関数}\} \tag{3.9}$$
$$X = [0,1]^{\mathbb{N}} \tag{3.10}$$

のような無限次元空間上に測度 (確率測度) を考える必要がある。どのような σ-加法族を考えるかについては、3.2 を見よ。

命題 3.13 $(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間とする。次が成り立つ。
(1) $A_i \in \mathcal{F}$ $(1 \le i \le n)$ のとき $\cup_{i=1}^n A_i \in X$. さらに $A_i \cap A_j = \emptyset$ ならば $m(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$.
(2) $A, B \in \mathcal{F}$ が $A \subset B$ を満たせば $m(A) \le m(B)$. さらに、$m(B) < \infty$ ならば $m(A) < \infty$ で $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.
(3) $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \tag{3.11}$$

(4) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ならば $m\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.
(5) $A_n \supset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ かつある n_0 に対して $m(A_{n_0}) < \infty$ とする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(\cap_{n=1}^{\infty} A_n). \tag{3.12}$$

(6) $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ とおく。$m(A) < \infty, m(B) < \infty$ とする。$|m(A) - m(B)| \le m\left(A \triangle B\right)$.

証明 (1) 定義 3.10 の完全加法性で $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ とすればよい。
(2) $B = A \cup (B \setminus A)$ かつ $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. ここで $B \setminus A = B \cap A^c$ である。(1) の結果より $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$. $m(B) < \infty$ のとき $m(A) < \infty$ であり、$m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.
(3) $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(n \geq 1, A_0 = \emptyset)$ とおく。

1. $A_N = \cup_{n=1}^N A_n = \cup_{n=1}^N B_n$ ($N \in \mathbb{N}$ または $+\infty$)
2. $n > m$ のとき、$B_n \cap B_m \subset A_{n-1}^c \cap A_m = \emptyset$.

したがって、完全加法性とすでに証明した (1) より

$$
\begin{aligned}
m\left(\cup_{n=1}^\infty A_n\right) = m\left(\cup_{n=1}^\infty B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N m(B_n) &= \lim_{N\to\infty} m\left(\cup_{n=1}^N B_n\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} m(A_N). \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

(4) まず帰納法で

$$
m\left(\cup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N m(A_n) \qquad (3.14)
$$

を示す。
(i) $N = 2$ のとき $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ より $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2 \setminus A_1) \leq m(A_1) + m(A_2)$.
(ii) N のとき OK とする。$N = 2$ の結果と帰納法の仮定から

$$
\begin{aligned}
m\left(\cup_{n=1}^{N+1} A_n\right) &= m\left(\left(\cup_{n=1}^N A_n\right) \cup A_{N+1}\right) \\
&\leq m\left(\cup_{n=1}^N A_n\right) + m(A_{N+1}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{N+1} m(A_n). \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

これで示された。目的の式は (3.14) で $N \to \infty$ として (3) の結果を適用すればよい。
(5) $A_n \setminus A_{n+1} = B_n$, $\cap_{n=1}^\infty A_n = C$ とおく。$n > m$ のとき、$B_n \cap B_m \subset A_n \cap A_{m+1}^c = \emptyset$.

$$
A_{n_0} \setminus C = \cup_{n=n_0}^\infty B_n. \qquad (3.16)
$$

したがって、(2) の結果と測度の完全加法性より $m(C) < \infty, m(A_n) < \infty$ $n \geq n_0$ で

$$
\begin{aligned}
m(A_{n_0}) - m(C) = \sum_{n=n_0}^\infty m(B_n) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=n_0}^N \left(m(A_n) - m(A_{n+1})\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(m(A_{n_0}) - m(A_{N+1})\right). \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

ゆえに $m(C) = \lim_{N\to\infty} m(A_N)$. なお (3.16) は図を書くとほとんど自明だが次のようにチェックできる。
(i) $x \in A_{n_0} \setminus C$ とする。このとき、ある $n \geq n_0$ に対して $x \in A_n$ かつ $x \notin A_{n+1}$. したがって $x \in A_n \setminus A_{n+1} = B_n$.

(ii) $x \in \cup_{n=n_0} B_n$ とする。このとき、ある $n \geq n_0$ に対して $x \in B_n = A_n \setminus A_{n+1}$. したがって $x \in A_{n_0}$ かつ $x \notin C$.
(6) $m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$, $m(B) = m(A \cap B) + m(B \cap A^c)$. したがって、$|m(A) - m(B)| = |m(A \cap B^c) - m(B \cap A^c)| \leq m(A \cap B^c) + m(B \cap A^c) = m(A \triangle B)$. □

命題 3.14

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \{\cup_{i=n}^{\infty} A_i\} \tag{3.18}$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \{\cap_{i=n}^{\infty} A_i\} \tag{3.19}$$

と定義する。$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ のとき、$\lim_{n\to\infty} A_n$ と書く。次が成立する。
(1) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.
(2) $m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n)$.
(3) ある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $m\left(\cup_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) < \infty$ とする。このとき、

$$\limsup_{n\to\infty} m(A_n) \leq m\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right). \tag{3.20}$$

(4) ある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $m\left(\cup_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) < \infty$ とする。$\lim_{n\to\infty} A_n$ が存在するとき、

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right). \tag{3.21}$$

証明 (1) $x \in \liminf A_n$ とするとある n_0 が存在して $x \in \cap_{i=n_0} A_i$. ゆえに任意の n に対して $x \in \cup_{i=n} A_i$. したがって、$x \in \limsup A_n$.
(2) $B_n = \cap_{i=n}^{\infty} A_i$ とおく。$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ である。$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$ だから命題 3.13 (3) より

$$\begin{aligned} m\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) &= m\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(B_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} m(B_n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \end{aligned} \tag{3.22}$$

(3) $C_n = \cup_{i=n}^{\infty} A_i$ とおく。$\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ かつ $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$, $m(C_{n_0}) < \infty$ だから命題 3.13 (5) より

$$\begin{aligned} m\left(\limsup A_n\right) &= m\left(\cap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(C_n) \\ &= \limsup_{n\to\infty} m(C_n) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} m(A_n). \end{aligned} \tag{3.23}$$

(4) (2),(3) の結果より

$$m\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} m(A_n) \leq m\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right). \tag{3.24}$$

仮定よりこの４つの量はすべて等しい。 □

演習問題 3.15 $A_i \subset X$ $(i \in \mathbb{N})$ とする。

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \cup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \cap_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \cap_{i=1}^{n} A_i$$

を示せ。

注 3.16 上の問題は奇妙に見える。しかし、左辺の集合は定義 3.2 で定義されているもので、右辺の集合の極限は命題 3.14 で定義されているものだから当り前というわけでは無い。証明は簡単だと思いますが。

演習問題 3.17

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{x \in X \mid n(1,x) < n(2,x) < \cdots < n(k,x) < \cdots \text{ が存在して } x \in \cap_{k=1}^{\infty} A_{n(k,x)}\right\} \tag{3.25}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{x \in X \mid n(x) \text{ が存在して } x \in \cap_{n=n(x)}^{\infty} A_n\right\} \tag{3.26}$$

を示せ。

演習問題 3.18 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, f(x)$ を X 上の $[0, +\infty]$ 値関数とし、すべての n と x について $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ かつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ とする。a, b は $0 \le a < b \le +\infty$ を満たすとする。

$$A_n = \{x \in X \mid a < f_n(x) \le b\} \tag{3.27}$$

$$A = \{x \in X \mid a < f(x) \le b\} \tag{3.28}$$

とおく。このとき、$\lim_{n\to\infty} A_n = A$ を示せ。

なお、命題 3.14 (2) と演習問題 3.18 は単調収束定理 (定理 5.13) の証明で用いる。

3.2 ある集合族から生成された σ-加法族

感じとしては、σ-加法族とは X の部分集合のうち、面積、体積が定義され得る集合全体のことであるが、2^X 以外に性質 (1)〜(3) をみたすものをどう作るか? 疑問に思うのが自然である。

そこで次の概念を定義する。

定義 3.19 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset 2^X$ とする。$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ のとき $\mathcal{C}_1$ は $\mathcal{C}_2$ より小さい ($\mathcal{C}_2$ は $\mathcal{C}_1$ より大きい) と言う。

以下、上の意味で集合族の大小関係 (数学用語では順序) を考えることにする。

補題 3.20 $\mathcal{C} \subset 2^X$ とする。

$$\sigma(\mathcal{C}) = \cap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$$

と定義する。ただし、$\{\mathcal{F}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_\lambda$ となる σ-加法族 $\mathcal{F}_\lambda$ 全体を表す。すると $\sigma(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ を含む σ-加法族の中で最小のものである。

証明 まず、2^X 自身は σ-加法族だから少なくとも一つは $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_\lambda$ となるものがあることに注意する。また、$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ は自明。したがって、次の二つを示せばよい。

(i) $\sigma(\mathcal{C})$ は σ-加法族であること

(ii) $\mathcal{F}$ が σ-加法族で $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ をみたせば $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$ となること

(i) の証明：定義 3.6 の条件 (1)-(3) を示す。

(1) 任意の λ について $X, \emptyset \in \mathcal{F}_\lambda$ だから $X, \emptyset \in \sigma(\mathcal{C})$.

(2) $A \in \sigma(\mathcal{C})$ ならば任意の $\lambda \in \Lambda$ について $A \in \mathcal{F}_\lambda$. $\mathcal{F}_\lambda$ は σ-加法族だから $A^c \in \mathcal{F}_\lambda\ \forall\lambda \in \Lambda$. したがって $A^c \in \sigma(\mathcal{C})$.

(3) $A_n \in \sigma(\mathcal{C})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする。$A_n \in \mathcal{F}_\lambda$ だから $\cup_n A_n \in \mathcal{F}_\lambda$. これがすべての λ について言えるから $\cup_n A_n \in \sigma(\mathcal{C})$.

以上から $\sigma(\mathcal{C})$ は σ-加法族。

(ii) の証明：$\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ ならばこの $\mathcal{F}$ は $\{\mathcal{F}_\lambda\}$ の中に入っている。したがって $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$. □

定義 3.21 $\sigma(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ で生成された σ-加法族という。

多くの σ-加法族がこのような形で得られる。代表的なのが $\mathbb{R}^n$ の Borel(ボレル) 集合族である。

例 3.22 $X = \mathbb{R}^n$ とする。$\mathcal{C} = \{O \subset \mathbb{R}^n \mid O \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の開集合}\}$ とする。$\sigma(\mathcal{C})$ を $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ と書き、$\mathbb{R}^n$ のボレル集合族と言う。また、$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ に属す集合をボレル可測集合という。ボレル可測集合はルベーグ可測集合である (理由は*?*)。$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ が知られている。さらに $\mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n) \subsetneq 2^X$ も選択公理を仮定すれば証明することができる。

さらに、一般に位相空間 S についても、その開集合全体で生成された σ-加法族も *Borel* 集合族と言い、$\mathfrak{B}(S)$ と書く。S の例としては (3.9), (3.10) などがある。

演習問題 3.23 $X = \mathbb{R}^n$ とする。次の $\mathcal{C}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ のいずれにしても $\sigma(\mathcal{C}_i)$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ になることを示せ。

(1) $\mathcal{C}_1 = \{\mathbb{R}^n \text{ の閉集合全体}\}$

(2) $\mathcal{C}_2 = \{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \mid -\infty < a_i < b_i < \infty\}$

(3) $\mathcal{C}_3 = \{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i) \mid -\infty < a_i < b_i < \infty\}$

(4) $\mathcal{C}_4 = \{\prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \mid -\infty < a_i < b_i < \infty\}$

(5) $\mathcal{C}_5 = \{B_r(a) \mid r \text{ は有理数、} a \in \mathbb{R}^n \text{ かつ } a \text{ の各座標成分はすべて有理数}\}$. ただし、$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$.

4 可測関数

以下一般な集合 X から実数への写像 (関数) を考える。以下の性質は基本的であり、(1) はこれからよく使う。

命題 4.1 集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ を考える。$A \subset X$ に対して $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ を A の f による像、$B \subset Y$ に対して $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を B の f による逆像と言った。

(1) $B_n \subset Y$ $(n=1,2,\ldots)$ ならば

$$f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \tag{4.1}$$
$$f^{-1}\left(\cap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \cap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n). \tag{4.2}$$

(2) $A_n \subset X$ $(n=1,2,\ldots)$ とする。$f\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \cup_{n=1}^{\infty} f(A_n)$, $f\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset \cap_{n=1}^{\infty} f(A_n)$ が成立する。
(3) 任意の $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

4.1 定義と性質

以下では、$-\infty, +\infty$ をも値に取り得る関数を考える。

定義 4.2 (可測関数) (1) $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする。関数 $f: X \to [-\infty, +\infty]$ が $\mathcal{F}$-可測関数 ($\mathcal{F}$-*measurable function*) である (あるいは、$\mathcal{F}$-可測である) とは次が成立する時に言う：
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、$f^{-1}((a, +\infty]) := \{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}$.
(2) $X = \mathbb{R}^n$ で $\mathcal{F} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^n)$ のときそれぞれボレル可測関数, ルベーグ可測関数と言う。ボレル可測関数、ルベーグ可測関数というと通常は $\mathbb{R}$ に値を取る (すなわち $+\infty, -\infty$ を取らない) 関数のみを考えるのが普通である。

注 4.3 (1) $\mathcal{F}$ が何かはっきりしているときは、単に可測関数と言うことが多い。
(2) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ がボレル可測関数ならルベーグ可測関数でもある (理由は?)。
(3) $A \in \mathcal{F}$ とし、A 上でのみ定義されている関数 $f: A \to [-\infty, +\infty]$ についても任意の $a \in \mathbb{R}$ について $\{x \in A \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}$ のとき $\mathcal{F}$-可測という。

命題 4.4 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき、f はボレル可測関数である。

証明 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続ならば、$f^{-1}((a, +\infty])$ は開集合である。開集合はボレル可測集合だから、$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-可測関数になる。 □

補題 4.5 $f: X \to [-\infty, +\infty]$ が可測関数ならば、$f^{-1}(\mathbb{R}), f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\})$ はすべて $\mathcal{F}$ に属す。

証明

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = f^{-1}\left(\cap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty]\right) = \cap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((n, +\infty]\right)$$
$$f^{-1}(\{-\infty\}) = f^{-1}\left(\cap_{n=1}^{\infty}[-\infty, -n]\right) = \cap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left([-\infty, -n]\right) = \cap_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left((-n, +\infty]\right)\right)^c.$$

$f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{F}$ だから可測空間の性質 (2), (3) から $f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{F}$. また $f^{-1}(\mathbb{R}) = X \setminus \left(f^{-1}(\{\pm\infty\})\right) \in \mathcal{F}$. □
次の 4 つの命題 4.6-4.9 は基本的である。

命題 4.6 $(X,\mathcal{F})$ を可測空間とする。関数 $f:X\to[-\infty,+\infty]$ に対する次の4つの条件 (1), (2), (3), (4) は同値である。

(1) $f(x)$ は可測関数である。すなわち、任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $\{x\in X \mid f(x)>a\}\in\mathcal{F}$.

(2) 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して、$\{x\in X \mid f(x)\le a\}\in\mathcal{F}$.

(3) 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して、$\{x\in X \mid f(x)\ge a\}\in\mathcal{F}$.

(4) 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して、$\{x\in X \mid f(x)<a\}\in\mathcal{F}$.

証明 (1) $\leftrightarrow$ (2)、(3) $\leftrightarrow$ (4), (1) $\leftrightarrow$ (3) を示す。いずれも $\mathcal{F}$ の σ-加法族としての性質と命題 4.1 を使っている。

(1) $\to$ (2): $f^{-1}([-\infty,a])=f^{-1}((a,+\infty])^c\in\mathcal{F}$.

(2) $\to$ (1): $f^{-1}((a,+\infty])=f^{-1}([-\infty,a]^c)=f^{-1}([-\infty,a])^c\in\mathcal{F}$.

(3) $\to$ (4):

$$f^{-1}\left([-\infty,a)\right)=f^{-1}\left([a,+\infty]^c\right)=f^{-1}\left([a,+\infty]\right)^c\in\mathcal{F}.$$

(4) $\to$ (3):

$$f^{-1}\left([a,+\infty]\right)=f^{-1}\left([-\infty,a)^c\right)=f^{-1}\left([-\infty,a)\right)^c\in\mathcal{F}.$$

(1) $\to$ (3):

$$f^{-1}([a,+\infty])=f^{-1}\left(\cap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},+\infty]\right)=\cap_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left((a-\frac{1}{n},+\infty]\right)\in\mathcal{F}.$$

(3) $\to$ (1):

$$f^{-1}\left((a,+\infty]\right)=f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},+\infty)\right)=\cup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left([a+\frac{1}{n},\infty)\right).$$

□

命題 4.7 $(X,\mathcal{F})$ を可測空間とする。関数 $f:X\to[-\infty,+\infty]$ に対する次の三つの条件 (1), (2), (3) は同値である。

(1) $f(x)$ は X 上の可測関数。

(2) $f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\})\in\mathcal{F}$ となる。さらに、次の二つの性質をみたす $\mathbb{R}$ の集合族 $\mathcal{C}$ が存在する。

(i) $\sigma(\mathcal{C})=\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

(ii) 任意の $A\in\mathcal{C}$ に対して $f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$.

(3) $f^{-1}(\{+\infty\})\in\mathcal{F}$ となる。さらに、任意の $A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して $f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$.

証明 (1) $\to$ (2) $\to$ (3) $\to$ (1) を示す。

(1) $\to$ (2) の証明: $f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\})\in\mathcal{F}$ はすでに示した。$\mathcal{C}=\{(a,b] \mid -\infty<a<b<+\infty\}$ とおく。演習問題 3.23 (4) より $\sigma(\mathcal{C})=\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. また, $f^{-1}((a,b])=f^{-1}((a,+\infty])\cap\left(f^{-1}((b,+\infty])\right)^c\in\mathcal{F}$ だから (ii) も成立するので、この $\mathcal{C}$ について (2) が成立する。

(2) $\to$ (3) の証明：以下の論法は測度論でよく出てくるものなので慣れて欲しい。

$$\mathcal{H}=\left\{A \mid A \text{ は } \mathbb{R} \text{ の部分集合で } f^{-1}(A)\in\mathcal{F}\right\}$$

とおく。$\mathfrak{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{H}$ を示せばよい。このため、$\mathcal{H}$ が

(a) $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$,

(b) $\mathcal{H}$ は σ-加法族である.

をみたすことを言う。そうすれば、定義から $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H}$ である。(a) は (ii) から自明。(b) を示す。

(1) $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{H}$: $f^{-1}(\mathbb{R}) = X, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ より OK。

(2) $A \in \mathcal{H}$ ならば $A^c \in \mathcal{H}$: $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in \mathcal{F}$ だから OK。

(3) $A_n \in \mathcal{H}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ならば $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$: $f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(A_n\right) \in \mathcal{F}$ より OK。

以上より、$\mathcal{H}$ は σ-加法族である。

(3) $\to$ (1) の証明：$a \in \mathbb{R}$ とする。$f^{-1}\left((a, +\infty]\right) = f^{-1}\left((a, \infty)\right) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{F}$. $\square$

命題 4.8 $f(x), g(x)$ は可測関数で $+\infty, -\infty$ を取らないとする。$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が連続関数のとき、$h(x) = \varphi(f(x), g(x))$ も可測である。

証明 $a \in \mathbb{R}$ とする。φ は連続関数だから $S_a = \{(x, y) \mid \varphi(x, y) > a\}$ とおくと S_a は開集合である。$S_a \neq \emptyset$ とする。

$$\mathcal{H} = \{(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ は有理数で } (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \subset S_a.\ \}$$

とおくとこの集合族は可算濃度を持つ。ただし、(α, β) などは $(\alpha, \beta) = \{x \mid \alpha < x < \beta\}$ のように区間を表している。したがって、$\mathcal{H} = \{I_i \times J_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ と番号をつけられる。ここで $I_i = (\alpha_i, \beta_i), J_i = (\gamma_i, \delta_i)$. すると $S_a = \cup_{i=1}^{\infty} I_i \times J_i$ だから

$$\begin{aligned}
\{x \in X \mid h(x) > a\} &= \{x \in X \mid \varphi(f(x), g(x)) > a\} = \{x \in X \mid (f(x), g(x)) \in S_a\} \\
&= \cup_{i=1}^{\infty} \{x \in X \mid (f(x), g(x)) \in I_i \times J_i\} \\
&= \cup_{i=1}^{\infty} \left(f^{-1}(I_i) \cap f^{-1}(J_i)\right) \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

$\square$

命題 4.8 より、可測関数の定数倍、和、積、商、絶対値を取った関数も可測関数になることがわかる。

さらに、下の結果から可測関数は極限を取る操作に関して閉じていることがわかる。

命題 4.9 $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を可測関数とする。次が成立する。

(1) 関数 $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ は可測である。

(2) 関数 $\limsup_{n \to \infty} f_n(x)$, $\liminf_{n \to \infty} f_n(x)$ は可測である。従って、すべての x について $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が ($+\infty, -\infty$ もこめて) 存在すれば極限関数も可測である。

証明 (1)

$$\begin{aligned}
\{x \in X \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \le a\} &= \cap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \le a\} \in \mathcal{F}, \\
\{x \in X \mid \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \ge a\} &= \cap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \ge a\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

上の式で命題 4.6 の同値性を用いた。

(2) $\limsup_{n \to \infty} f_n(x) = \inf_n \left\{\sup_{m \ge n} f_m(x)\right\}$, $\liminf_{n \to \infty} f_n(x) = \sup_n \left\{\inf_{m \ge n} f_m(x)\right\}$ だから (1) の結果から従う。 $\square$

演習問題 4.10 $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ を可測関数とする。集合 $A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ は可測集合であることを示せ。

演習問題 4.11 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を $\mathbb{R}$ に値を取る $(X, \mathcal{F})$ 上の可測関数とする。

$$X_0 = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ がある実数値に収束する }\}$$

とおくと $X_0 \in \mathcal{F}$ となることを示せ。

演習問題 4.12 $f(x)$ を $[0, 1]$ で定義された実数値有界関数する。$f(x)$ の不連続点全体の集合はボレル可測集合であることを示せ。ボレル可測集合の定義は例 3.22 を見よ。

演習問題 4.13 (1) $f : X \to \mathbb{R}$ を可測関数とする。$\mathcal{F}_f := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$ とおくと $\mathcal{F}_f$ は σ-加法族で $\mathcal{F}_f \subset \mathcal{F}$ であることを示せ。
(2) X 上の σ-加法族 $\mathcal{G}$ で性質
(i) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
(ii) f は $\mathcal{G}$-可測である
をみたすものの中で最小のもの *(*大小関係は定義 *3.19* で定義したもの*)* は $\mathcal{F}_f$ であることを示せ。

上の問の σ-加法族 $\mathcal{F}_f$ を $\sigma(f)$ と書き、f で生成された σ-加法族と言う。

4.2 補足

定義 4.14 $(X_i, \mathcal{F}_i)$ $(i = 1, 2)$ を可測空間とする。写像 $f : X_1 \to X_2$ が $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$-可測とは、次が成立する時に言う*:*
任意の $A \in \mathcal{F}_2$ に対して、$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ となる。

定義 4.15 $(X, \mathcal{F})$ が可測空間、S を位相空間とする。S の開集合全体の集合で生成された σ-加法族 (S のボレル集合族と言う) $\mathfrak{B}(S)$ を考えて、可測空間 $(S, \mathfrak{B}(S))$ を考える。$f : X \to S$ が $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(S)$-可測の時、単に可測写像と言うことが多い。

例 4.16 $X_2 = \mathbb{R}, \mathcal{F}_2 = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ のとき、$\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$-可測とは定義 4.2 の意味での $\mathcal{F}_1$-可測関数である。

演習問題 4.17 写像 $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) : X \to \mathbb{R}^n$ について次の条件 (1), (2) は同値である。
(1) f は $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-可測である。
(2) すべての i について $f_i : X \to \mathbb{R}$ は定義 4.2 の意味で $\mathcal{F}$-可測である。

5 ルベーグ積分の定義

5.1 非負単関数の積分

定義 5.1 $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする。$f : X \to \mathbb{R}$ が単関数 $(simple function)$ であるとは次が成立する時に言う：
(1) f は可測関数。
(2) $f(x)$ の取る値は有限個。

注 5.2 一般に $A \subset X$ に対して X 上の関数 $I_A(x)$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \in A^c \end{cases} \tag{5.1}$$

と定義し A の定義関数 (indicator function) と言う。

補題 5.3 $f(x)$ を非負単関数とし、その取りうる相異なる値を $\{a_1, \ldots, a_n\}$, $E_i = f^{-1}(\{a_i\})$ とおく。以下が成立する。
(1) $E_i \in \mathcal{F}$. $i \neq j$ ならば $E_i \cap E_j = \emptyset$ かつ $\cup_{i=1}^n E_i = X$.
(2) $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i I_{E_i}(x)$.

上の (2) で $a_i = 0$ となるとき、$a_i I_{E_i}(x) = 0$ だからこの項は加えても加えなくても同じだが、入れて書いていることに注意せよ。(2) のような表示を単関数 $f(x)$ の標準形と呼ぶ。

補題 5.4 $f(x)$ が単関数であるための必要十分条件はある実数 α_i $(i = 1, \ldots, n)$ と $E_i \in \mathcal{F}$ が存在して $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{E_i}(x)$.

上で標準形と呼んだのは単関数を定義関数の定数倍の和の形で書く書き方はいろいろありえるからである。

定義 5.5 非負単関数 f の標準形が $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i I_{E_i}(x)$ のとき、

$$\int_X f(x)dm(x) = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i). \tag{5.2}$$

ただし、$0 \cdot \infty = 0$ と約束する。

命題 5.6 以下の関数は非負の単関数とする。
(1) 任意の $\alpha, \beta \geq 0$ に対して

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x))dm(x) = \alpha \int_X f(x)dm(x) + \beta \int_X g(x)dm(x). \tag{5.3}$$

(2) $f(x) = \sum_{i=1}^l \alpha_i I_{A_i}(x)$ $(\alpha_i \geq 0$ $1 \leq i \leq n$, 標準形とは限らない !) のとき $\int_X fdm = \sum_{i=1}^l \alpha_i m(A_i)$.
(3) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ のとき

$$\int_X fdm \leq \int_X gdm. \tag{5.4}$$

証明 (1) $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i I_{E_i}(x)$, $g(x) = \sum_{j=1}^m b_j I_{F_j}(x)$ を標準形とする。$\alpha f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha a_i I_{E_i}(x)$ は標準形だから $\int_X \alpha f dm = \alpha \int_X f dm$. ゆえに $\alpha = \beta = 1$ のときに証明すればよい。$E_i \cap F_j \neq \emptyset$ となる i, j に対する $a_i + b_j$ 全体を $\{c_l\}_{l=1}^N$ とする。もちろん、$\{c_l\}$ はすべて相異なる数の集合である。$S_l = \{(i,j) \mid a_i + b_j = c_l, E_i \cap F_j \neq \emptyset\}$ とおく。$X_l = \cup_{(i,j)\in S_l} E_i \cap F_j$ と定める。次に注意する：

1. $l \neq k$ ならば $S_l \cap S_k = \emptyset$

2. $\cup_{l=1}^N X_l = X$

3. $l \neq k$ ならば $X_l \cap X_k = \emptyset$

4. $\sum_{l=1}^N c_l I_{X_l}(x)$ は $f+g$ の標準形である。

したがって、$\int_X (f+g)dm = \sum_{l=1}^N c_l m(X_l)$. これと上の 1,2 を用い、

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g)dm &= \sum_{l=1}^N c_l m(X_l) \\
&= \sum_{l=1}^N c_l m\left(\cup_{(i,j)\in S_l} E_i \cap F_j\right) \\
&= \sum_{l=1}^N \sum_{(i,j)\in S_l} (a_i + b_j) m\left(E_i \cap F_j\right) \\
&= \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} (a_i + b_j) m(E_i \cap F_j) \qquad (5.5) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i m(E_i) + \sum_{j=1}^m b_j m(F_j) = \int_X f dm + \int_X g dm \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

(5.5) から (5.6) への変形では $\sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} a_i m(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i)$ などを用いた。
(2) $\int_X \alpha_i I_{A_i} dm = \alpha_i m(A_i)$ と (1) の結果より容易に従う。
(3) (1) で用いた f, g の標準形を用いる。$f(x) = \sum_{(i,j)\in\cup_{l=1}^N S_l} a_i I_{E_i \cap F_j}(x)$, $g(x) = \sum_{(i,j)\in\cup_{l=1}^N S_l} b_j I_{E_i \cap F_j}(x)$ に注意する。すべての x について $f(x) \leq g(x)$ だから $(i,j) \in \cup_l S_l$ について $a_i \leq b_j$. 従って、

$$\begin{aligned}
\int_X f dm &= \sum_{(i,j)\in\cup_{l=1}^N S_l} a_i m\left(E_i \cap F_j\right) \\
&\leq \sum_{(i,j)\in\cup_{l=1}^N S_l} b_j m\left(E_i \cap F_j\right) \\
&= \int_X g dm. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

□

5.2 非負可測関数の積分と単調収束定理

定義 5.7 $[0, \infty]$ 上の関数 $\varphi_N(t)$ を次のように定める。ただし、$N \in \mathbb{N}$.

$$\varphi_N(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2^N} \text{ のとき} \\ \frac{k}{2^N} & \frac{k}{2^N} < t \leq \frac{k+1}{2^N},\ 0 < k \leq 2^N N - 1 \text{ のとき} \\ N & t > N \text{ のとき} \end{cases} \qquad (5.8)$$

補題 5.8 $f(x), g(x)$ を $[0,+\infty]$ 値可測関数とする。このとき、次が成立する。
(1)

$$\varphi_N(f(x)) = \sum_{k=0}^{2^N \cdot N} \frac{k}{2^N} I_{E_{N,k}}(x), \tag{5.9}$$

ここで $E_{N,k} = f^{-1}\left(\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right]\right)\quad (0 \leq k \leq 2^N N - 1)$, $E_{N,2^N N} = f^{-1}\left((N,\infty]\right)$. 特に $\varphi_N(f(x))$ は単関数である。
(2) 任意の $N \in \mathbb{N}$, $x \in X$ について $\varphi_N(f(x)) \leq \varphi_{N+1}(f(x))$.
(3) 任意の $x \in X$ について $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(f(x)) = f(x)$.
(4) $f(x) \leq g(x)$ ならば $\varphi_N(f(x)) \leq \varphi_N(g(x))$.

上記 Lemma より $\varphi_N(f(x))$ は $f(x)$ に下から収束する単関数であることがわかる。$\varphi_N(f(x))$ の積分は既に定義されている。さらに補題 5.8 (2) と補題 5.6 (3) より $0 \leq \int_X \varphi_N(f(x))dm(x) \leq \int_X \varphi_{N+1}(f(x))dm(x)$ がわかる。したがって次に定義する $I(f)$ は $f(x)$ の積分の候補になるであろう。なお、多くの本にのっている $f(x)$ の近似関数列

$$\begin{aligned}
f_N(x) &= \sum_{k=0}^{2^N \cdot N} \frac{k}{2^N} I_{E'_{N,k}}(x) && (5.10)\\
E'_{N,k} &:= f^{-1}\left([\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N})\right) \quad (0 \leq k \leq 2^N N - 1) && (5.11)\\
E'_{N,2^N N} &:= f^{-1}\left([N,\infty]\right). && (5.12)
\end{aligned}$$

とは微妙に違うことに注意せよ。

定義 5.9 $[0,+\infty]$ 値可測関数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned}
I_N(f) &= \int_X \varphi_N(f(x))dm(x) && (5.13)\\
I(f) &= \lim_{N\to\infty} I_N(f). && (5.14)
\end{aligned}$$

とおく。

このとき、次が言える。

補題 5.10 $f(x)$ を $(X, \mathcal{F}, m)$ 上の非負単関数とする。このとき、$I(f) = \int_X f(x)dm(x)$.

証明 $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i I_{E_i}(x)$ と標準形で表されているとする。このとき、$\varphi_N(f(x)) = \sum_{i=1}^n \varphi_N(a_i) I_{E_i}(x)$. ゆえに $I_N(f) = \int_X \varphi_N(f(x))dm(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_N(a_i)m(E_i)$. ここで $\lim_{N\to\infty}\varphi_N(a_i) = a_i$ だから $I(f) = \lim_{N\to\infty} I_N(f) = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i) = \int_X f(x)dm(x)$. □

したがって、f が非負単関数のとき、$I(f)$ はすでに定義した積分の値と一致している。したがって、$I(f)$ はより一般の $[0,+\infty]$ 値可測関数について積分を定義しているものと言えるので、これを積分とよぶことにする。

定義 5.11 $[0,+\infty]$ 値可測関数 $f(x)$ に対して

$$\int_X f(x)dm(x) := I(f). \tag{5.15}$$

従って、$[0,+\infty]$ 値可測関数ならば(∞ になってしまう可能性もあるが) 常に積分が定義されることになる。

補題 5.12 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(\forall x \in X)$ ならば $\int_X f(x)dm(x) \le \int_X g(x)dm(x)$.

証明 $f(x) \le g(x)$ ならば $\varphi_N(f(x)) \le \varphi_N(g(x))$ だから単関数の積分の性質から $\int_X \varphi_N(f(x))dm(x) \le \int_X \varphi_N(g(x))dm(x)$. $N \to \infty$ とすれば結論が得られる。 □

定理 5.13 (単調収束定理 (Monotone convergence theorem,MCT と略す)) $f(x)$ を $[0,+\infty]$ 値可測関数とする。やはり $[0,+\infty]$ 値可測関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ で次を満たすものを考える。
(1) $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots$
(2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
　このとき、$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x) = \int_X f(x)dm(x)$

証明 まず、補題 5.12 より、$\int_X f_n(x)dm(x)$ は単調増加で $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x) \le \int_X f(x)dm(x)$ が成り立つことを注意する。$I_N(f_n), I_N(f)$ を実際に書いてみると

$$I_N(f_n) = \sum_{k=1}^{2^N \cdot N} \frac{k}{2^N} m\left(E_{N,k}^{(n)}\right) \tag{5.16}$$

$$I_N(f) = \sum_{k=1}^{2^N \cdot N} \frac{k}{2^N} m\left(E_{N,k}\right). \tag{5.17}$$

ここで

$$E_{N,k}^{(n)} = \left\{x \in X \mid \frac{k}{2^N} < f_n(x) \le \frac{k+1}{2^N}\right\} \quad (1 \le k \le 2^N N - 1) \tag{5.18}$$

$$E_{N,2^N\cdot N}^{(n)} = \{x \in X \mid f_n(x) > N\} \tag{5.19}$$

$$E_{N,k} = \left\{x \in X \mid \frac{k}{2^N} < f(x) \le \frac{k+1}{2^N}\right\} \quad (1 \le k \le 2^N N - 1) \tag{5.20}$$

$$E_{N,2^N N} = \{x \in X \mid f(x) > N\}. \tag{5.21}$$

$f_n(x)$ は単調に増加しかつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ だから演習問題 3.18 の結果より $\lim_{n\to\infty} E_{N,k}^{(n)} = E_{N,k}$. 従って、命題 3.14 (2) より $m(E_{N,k}) \le \liminf_{n\to\infty} m(E_{N,k}^{(n)})$. ゆえに、

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x) \ge \liminf_{n\to\infty} I_N(f_n) \ge I_N(f). \tag{5.22}$$

したがって、$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x) \ge \lim_{N\to\infty} I_N(f) = \int_X f(x)dm(x)$. これが示すべきことであった。 □

　上の定義 5.11 だと非常に特殊な $f(x)$ を近似する関数列を取り、積分を定義したように見えるが実はそうではないことが上の MCT からわかる。さらに次も自明であろう。

演習問題 5.14 f を $[0,+\infty]$ 値可測関数とすると

$$\int_X f(x)dm(x) = \sup\left\{\int_X g(x)dm(x) \mid g \text{ は非負の単関数ですべての } x \text{ で } 0 \le g(x) \le f(x)\right\}. \tag{5.23}$$

(5.23) の右辺を $[0,+\infty]$ 値可測関数 f の積分の定義として議論を始める本も多いことを注意しておく。

注 5.15 補題 3.13 (3) に出てくる集合 $\{A_n\}$, A に対して、$f_n(x) = I_{A_n}(x), f(x) = I_A(x)$ と定めると MCT から $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$ が得られる。したがって、MCT は補題 3.13 (3) の拡張である。

5.3 一般の関数に対する積分の定義とその性質

$f(x)$ が非負とは限らない可測関数のとき、次のように積分を定義する。

定義 5.16 (1) $f(x)$ を $(X,\mathcal{F},m)$ 上の可測関数とする。$f_+(x) := \max(f(x),0)$, $f_-(x) := \max(-f(x),0)$ とおく。

$$\int_X f_+(x)dm(x) < \infty \text{ かつ } \int_X f_-(x)dm(x) < \infty \tag{5.24}$$

のとき $f(x)$ は可積分であると言い、

$$\int_X f(x)dm(x) := \int_X f_+(x)dm(x) - \int_X f_-(x)dm(x) \tag{5.25}$$

と定義する。
(2) $A \in \mathcal{F}$ とする。$f(x)$ は A 上で定義された可測関数とし、$f(x)$ が A 上に制限して得られる測度空間 $(A, \mathcal{F}|_A, m|_A)$ 上でルベーグ積分可能のとき、積分値を $\int_A f(x)dm(x)$ と書く。ただし、$\mathcal{F}|_A = \{B \in \mathcal{F} \mid B \subset A\}$, $m|_A(B) = m(B)$ である。

注 5.17 定義をやや拡張して $\int_X f_+(x)dm(x) = \infty$ かつ $\int_X f_-(x)dm(x) < \infty$ のとき、$\int_X f(x)dm(x) = +\infty$. $\int_X f_+(x)dm(x) < \infty$ かつ $\int_X f_-(x)dm(x) = \infty$ のとき、$\int_X f(x)dm(x) = -\infty$. と定義しても不合理な事は起こらないだろう。

補題 5.18 次の (1), (2) は同値。
(1) f が (5.24) を満たす。
(2) $\int_X |f(x)|dm(x) < \infty$.

証明 $\varphi_N(|f(x)|) = \varphi_N(f_+(x)) + \varphi_N(f_-(x))$ だから定義から自明。 $\square$

定義 5.19 補題 *5.18* の同値な性質をみたす f 全体 (すなわち可積分な関数全体) を $L^1(X,\mathcal{F},m)$ と書く。また、積分値 $\int_X |f(x)|dm(x)$ を $\|f\|_{L^1(X,\mathcal{F},m)}$, $\|f\|_{L^1}$ などと書き f の L^1-ノルムとよぶ。ノルムになることは後で示す。

命題 5.20 以下の関数はすべて可測関数とする。
(1) すべての x について $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ とする。任意の $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ に対して

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) dm(x) = \alpha \int_X f(x) dm(x) + \beta \int_X g(x) dm(x). \tag{5.26}$$

(2) すべての x について $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ かつ $f, g \in L^1$ ならば $h(x) := f(x) - g(x) \in L^1$ かつ

$$\int_X h(x) dm(x) = \int_X f(x) dm(x) - \int_X g(x) dm(x). \tag{5.27}$$

(3) $f, g \in L^1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば $\alpha f(x) + \beta g(x) \in L^1$ かつ

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) dm(x) = \alpha \int_X f(x) dm(x) + \beta \int_X g(x) dm(x). \tag{5.28}$$

証明 (1) $f_n(x), g_n(x)$ をそれぞれ単調に増加して $f(x), g(x)$ に収束する非負可測関数とすると $\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)$ は非負可測で単調に増加し $\alpha f(x) + \beta g(x)$ に収束するから

$$\begin{aligned}
\int_X (\alpha f + \beta g) dm &= \lim_{n \to \infty} \int_X (\alpha f_n + \beta g_n) dm \\
&= \lim_{n \to \infty} \left\{ \alpha \int_X f_n dm + \beta \int_X g_n dm \right\} \\
&= \alpha \int_X f dm + \beta \int_X g dm. \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

(2) $h(x) = h_+(x) - h_-(x) = f(x) - g(x)$ より $h_+(x) + g(x) = f(x) + h_-(x)$. ゆえに $h_+(x) \leq f(x)$ かつ $h_-(x) \leq g(x)$. ゆえに $h_+, h_- \in L^1$. したがって $f - g \in L^1$. (1) の結果より

$$\int_X h_+ dm + \int_X g dm = \int_X f dm + \int_X h_- dm. \tag{5.30}$$

したがって

$$\int_X h dm = \int_X h_+ dm - \int_X h_- dm = \int_X f dm - \int_X g dm. \tag{5.31}$$

(3) $f \in L^1$ ならば定義から $\int_X (-f) dm = -\int_X f dm$. したがって、(3) を $\alpha, \beta \geq 0$ のときに示せばよい。$\alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f_+(x) + \beta g_+(x)) - (\alpha f_-(x) + \beta g_-(x))$. $\alpha f_+ + \beta g_+, \alpha f_- + \beta g_- \in L^1$ だから (2) の結果より $\alpha f + \beta g \in L^1$ かつ

$$\begin{aligned}
\int_X (\alpha f + \beta g) dm &= \int_X (\alpha f_+ + \beta g_+) dm - \int_X (\alpha f_- + \beta g_-) dm \\
&= \alpha \left(\int_X f_+ - \int_X f_- dm \right) + \beta \left(\int_X f_+ dm - \int_X f_- dm \right) \\
&= \alpha \int_X f dm + \beta \int_X g dm. \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

□

系 5.21 (1) すべての x について $|f(x)| \leq g(x)$ かつ $g \in L^1$ ならば

$$\left| \int_X f dm \right| \leq \int_X |f(x)| dm(x) \leq \int_X g(x) dm(x). \tag{5.33}$$

特に $f, |f| \in L^1$.
(2) $f, g \in L^1$ かつすべての x について $f(x) \leq g(x)$ ならば $\int f dm \leq \int g dm$.

証明 (1) 補題 5.12, 補題 5.18 と定義から、

$$\left| \int_X f dm \right| = \left| \int_X f_+ dm - \int_X f_- dm \right| \leq \left| \int_X |f| dm \right| \leq \int_X g dm.$$

(2) すでに $0 \leq f(x) \leq g(x)$ のときは補題 5.12 で示している。これはその一般の場合への拡張である。命題 5.20 (3) より $\int_X g dm - \int_X f dm = \int_X (g - f) dm \geq 0$ だから (4) が示された。 □

定義 5.22 $f(x), g(x)$ を可測関数とする。$m(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ はほとんどすべての x で等しいと言い

$$f(x) = g(x) \qquad m - a.e.\ x. \tag{5.34}$$

と書く。$a.e.\ x$, $m - a.s.\ x$, $a.s.\ x$, $a.a.\ x$ などのようにも書く。

補題 5.23 二つの非負単関数 $f(x), g(x)$ が $f(x) = g(x)$ $a.e.\ x$ をみたせば

$$\int_X f dm = \int_X g dm. \tag{5.35}$$

証明 f の標準形を $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{E_i}(x)$ とする。これに対して、$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 以外の $g(x)$ の取る値を $\beta_1, \ldots, \beta_m$ として、$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{F_i}(x) + \sum_{l=1}^m \beta_l I_{G_l}(x)$ とかける。ここで、$F_i, G_l \in \mathcal{F}$ で $G_l \cap F_i = \emptyset$ $(\forall i, l)$ である。

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = (\cup_{i \neq j}(E_i \cap F_j)) \cup (\cup_{i,l}(E_i \cap G_l))$$

に注意する。したがって、すべての l, i, j について $m(G_l) = 0$、$m(E_i \triangle F_i) = 0$. 特に、$m(E_i) = m(F_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. ゆえに $\int_X f dm = \int_X g dm$. □

命題 5.24 (1) f, g を非負可測関数とし、$f = g$ $a.e.x$ とすると $\int_X f dm = \int_X g dm$.
(2) $f \in L^1$ かつ $f = g$ $a.e.\ x$ ならば $g \in L^1$ かつ $\int_X g dm = \int_X f dm$.
(3) f を非負可測関数とすると $f = 0$ $a.e.\ x$ と $\int_X f dm = 0$ は同値。

証明 (1) $N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ とおく。$m(N) = 0$ である。非負単関数 f_n で単調に増加し f に収束するものを取る。MCT より

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n dm = \int_X f dm.$$

$\tilde{f}_n(x) = f_n(x)I_{N^c}(x)$ とおく。すると $\tilde{f}_n$ は単関数で単調に増加して $f(x)I_{N^c}(x)$ に収束する。ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \tilde{f}_n dm = \int_X f I_{N^c} dm.$$

また補題 5.23 より $\int_X f_n dm = \int_X \tilde{f}_n dm.$ 従って、

$$\int_X f dm = \int_X f I_{N^c} dm.$$

同様に $\int_X g dm = \int_X g I_{N^c} dm.$ すべての x について $f(x)I_{N^c}(x) = g(x)I_{N^c}(x)$ だから $\int_X f dm = \int_X g dm.$

(2) $f = g$ $a.e.$ x ならば $f_+ = g_+$ $a.e.$ x かつ $f_- = g_-$ $a.e.$ $x.$ 従って、$\int_X f_\pm dm = \int_X g_\pm dm.$ ゆえに証明終わり。

(3) $f = 0$ $a.e.$ $x \Longrightarrow \int_X f dm = 0$ は (1) から従う。逆を示す。$A = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ とおく。$m(A) = 0$ を示せばよい。$A_n = \{x \in X \mid f(x) > 1/n\}$ とおくと $A_n \subset A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $A = \cup_{n=1}^\infty A_n.$ ゆえに測度の連続性から $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$ $m(A) > 0$ を仮定するとある n で $m(A_n) > 0.$ 従って、

$$\int_X f dm \geq \int_X f I_{A_n} dm \geq \frac{1}{n}\int_X I_{A_n} dm = \frac{m(A_n)}{n} > 0.$$

これは矛盾である。ゆえに $m(A) = 0$ □

注 5.25 (1) $f(x)$ を $[a, b]$ 上の非負値連続関数とすると $\int_a^b f(x)dx = 0$ と $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$ は同値である。この結果と上の (3) との違いに注意せよ。

(2) 測度ゼロの集合 $N \in \mathcal{F}$ が存在して N^c で定義された関数をほとんどすべての点で定義された関数と言う (このような関数は応用上よく現れる。)。ルベーグ積分の値は測度ゼロの集合上の値を変えても変わらないからこのような関数については積分を $\int_{N^c} f(x)dm(x)$ ではなく $\int_X f(x)dm(x)$ と書くことが多い (*Fubini* の定理　定理 8.2 (3) の (ii) にも出てくるので注意せよ。)。

6　リーマン積分とルベーグ積分の関係

$\mathbb{R}$ 上の積分を考える。この章のみ、わかりやすくするため、リーマン積分は $R\text{-}\displaystyle\int_A f(x)dx$, ルベーグ積分は $L\text{-}\displaystyle\int_A f(x)dx$ などのように書く。次のようなリーマン積分可能な関数はルベーグ積分可能で積分の値は一致することがわかる。ただし、広義積分はリーマン積分のときは条件収束 (とくに 1 次元のとき, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ などの積分) を許して考えるときもあり、ルベーグ積分は絶対収束の場合のみを考えていることに当たるので，状況は異なる。

定理 6.1 $f(x)$ を区間 $I = [0, 1]$ 上のリーマン積分可能な関数とすると $f(x)$ はルベーグ積分可能であり、$L\text{-}\displaystyle\int_I f(x)dx = R\text{-}\int_I f(x)dx.$

証明 $f(x)$ がリーマン積分可能ならば $f_+(x), f_-(x)$ もリーマン積分可能である。これは $*=+,-$ のとき、任意の分割 Δ に対して $S(f_*,\Delta)-s(f_*,\Delta)\le S(f,\Delta)-s(f,\Delta)$ と Darboux の定理から従う。リーマン積分とルベーグ積分の線形性から、$f(x)\ge 0 \quad \forall x\in[0,1]$ の場合のみを考えてよい。また、$f(x)$ はリーマン積分可能性から有界関数であることに注意する。

$$\begin{aligned}
\overline{f}_N(x) &:= \sum_{k=0}^{2^N-1}\sup\{f(x)\mid \frac{k}{2^N}\le x\le\frac{k+1}{2^N}\}I_{F_{N,k}}(x)\\
\underline{f}_N(x) &:= \sum_{k=0}^{2^N-1}\inf\{f(x)\mid \frac{k}{2^N}\le x\le\frac{k+1}{2^N}\}I_{F_{N,k}}(x)\\
F_{N,k} &= \Big[\frac{k}{2^N},\frac{k+1}{2^N}\Big) \quad (\text{ただし } k=2^N-1 \text{ のときは右端も含める})
\end{aligned}$$

とおくと次の性質が成り立つ：

(1) $\overline{f}_N(x),\underline{f}_N(x)$ はリーマン積分可能かつルベーグ積分可能であり、両者の積分は一致する。

(2) すべての N について、$\underline{f}_N(x)\le\underline{f}_{N+1}(x)\le\overline{f}_{N+1}(x)\le\overline{f}_N(x)$.

(3) (Darboux の定理)

$$\lim_{N\to\infty}R-\int_I\underline{f}_N(x)dx=\lim_{N\to\infty}R-\int_I\overline{f}_N(x)dx=R-\int_I f(x)dx. \tag{6.1}$$

$\underline{f}_N(x)$ の単調増加極限を $\overline{f}(x)$ と書く。$\overline{f}_N(x)$ の単調減少極限を $\underline{f}(x)$ と書く。単調収束定理から ($\overline{f}_N$ は単調減少列だが単調収束定理が使える。なぜか？)、

$$L-\int_I\underline{f}(x)dx=L-\int_I\overline{f}(x)dx=R-\int_I f(x)dx. \tag{6.2}$$

定義からすべての $x\in I$ について

$$\underline{f}(x)\le f(x)\le\overline{f}(x).$$

かつ (6.2) より命題 5.24 (3) より

$$\underline{f}(x)=f(x)=\overline{f}(x)\quad a.e.\ x\in I.$$

$\underline{f}(x),\overline{f}(x)$ はともにボレル可測関数であるので、定理 10.3 より $f(x)$ はルベーグ可測かつルベーグ積分可能である。また命題 5.24 より

$$L-\int_I\underline{f}(x)dx=L-\int_I f(x)dx=L-\int_I\overline{f}(x)dx$$

となりルベーグ積分の値とリーマン積分の値が一致することがわかる。 □

演習問題 6.2 上の証明で $\underline{f}(x)=f(x)=\overline{f}(x)\ a.e.\ x\in I$ が示されたわけだが、これは $f(x)$ がほとんどすべての x で連続であることを示している。なぜか？また、逆に関数の不連続点全体の集合のルベーグ測度がゼロならばリーマン積分可能であることもわかる。これを証明してみよ。

7　収束定理

7.1　収束定理

補題 7.1 (Fatou の補題) 非負の可測関数 $f_n(x)$ について、

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dm(x) \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x). \tag{7.1}$$

証明 $g_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x)$ とおくとすべての x について $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ かつ $g_1(x) \le g_2(x) \le \cdots g_n(x) \le$. したがって、単調収束定理より

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dm(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)dm(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)dm(x).$$

$\int_X g_n(x)dm(x) \le \int_X f_n(x)dm(x)$ だから補題が証明された。 $\square$

演習問題 7.2 可測関数 $f_n(x)$ がすべての x で $f(x)$ に収束するとする。$\sup_n \|f_n\|_{L^1} < \infty$ ならば $f \in L^1$ で $\|f\|_{L^1} \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^1}$.

定理 7.3 (ルベーグの優収束定理 (Lebesgue's dominated convergence theorem)) $\{f_n(x)\}$ が可測で次の (1), (2) をみたすとする。

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in X)$

(2) ある $g \in L^1(X,m)$ が存在して $|f_n(x)| \le g(x)$ $(x \in X)$.

　このとき、

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x) = \int_X f(x)dx.$$

証明　まず、仮定 (2) より、$f_n \in L^1(X,m)$ に注意する。また、(1),(2) を合わせれば、$|f(x)| \le g(x)$ $(\forall x \in X)$ だから $f \in L^1(X,m)$ でもある。$h_n(x) = g(x) + f_n(x)$ とおくと $h_n(x) \ge 0$ $(\forall x \in X)$ かつ $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = g(x) + f(x)$. したがって、Fatou の補題より

$$\begin{aligned}\int_X (g(x) + f(x))\, dm(x) &\le \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n(x)dm(x) \\ &= \int_X g(x)dm(x) + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x). \end{aligned} \tag{7.2}$$

よって、

$$\int_X f(x)dm(x) \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x). \tag{7.3}$$

f_n, f をそれぞれ $-f_n, -f$ に対して同じ議論をすれば、

$$-\int_X f(x)dm(x) \le -\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x).$$

すなわち、

$$\int_X f(x)dm(x) \ge \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x). \tag{7.4}$$

(7.3), (7.4) を合わせれば証明終り。 $\square$

注 7.4 単調収束定理が命題 3.13 (3) の拡張であると述べたが、ルベーグの収束定理は命題 3.13 (5) の拡張と見ることができる。

次の問題は一見、積分は関係なさそうだが、ルベーグの優収束定理を用いて証明できる。

演習問題 7.5 $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ を実数列とする。任意の $t \in [0, 1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{-1}tx_n} = 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

演習問題 7.6 $f(x)$ を $[a, b]$ 上のルベーグ積分可能な関数とする。$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)dm_L(t)$ とおくと $F(x)$ は x の連続関数であることを示せ。

以下の系は定理 7.3 から直ちに証明できる。

系 7.7 可測関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して可積分関数 $g(x)$ が存在して $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \le g(x)$ $(x \in X)$ が成立すれば $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は可積分で

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)dm(x).$$

以下の問題は上の系に含まれる結果と言える (ただし、直接証明しても難しくは無い)。

演習問題 7.8 系 *7.7*を用いて、以下を示せ。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $a_n \ge 0$ $(\forall n)$ とする。$f(t, n)$ $(t \ge 0, n \in \mathbb{N})$ が次の (1), (2) を満たすとする。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f(t, n) = \alpha_n$.

(2) 任意の t, n に対して $|f(t, n)| \le a_n$.

このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} f(t, n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ は収束し、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(t, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

演習問題 7.9 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $a_n \ge 0$ $(\forall n)$ とする。$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n t) = 0$ を示せ。

定理 7.10 (微分と積分の順序交換定理) $f(t, x)$ $(a \le t \le b, x \in X)$ とし、次を仮定する。

(1) $f(t, x)$ は t の C^1 関数。

(2) 任意の t に対して $f(t, \cdot) \in L^1(X, m)$.

(3) $g \in L^1(X, m)$ が存在して、すべての (t, x) について、$\displaystyle\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t, x)\right| \le g(x)$.

このとき、$F(t) = \int_X f(t, x)dm(x)$ は t の C^1 関数で、$\displaystyle F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)dm(x)$.

証明 次に注意する。

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_X \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} dm(x) \tag{7.5}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) \tag{7.6}$$

$$\left|\frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t + \theta h, x)\right| \le g(x). \tag{7.7}$$

したがって、ルベーグの優収束定理より、$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dm(x)$. $F'(t)$ の連続性もルベーグの優収束定理から従う。 $\square$

7.2 測度 0 の集合についての注意

以上の収束定理では「すべての x について $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(\forall x \in X)$」など、各点収束を仮定してきた。しかし、これを「ほとんどすべての x について $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$」と緩めても同様に定理が成立する。なお、「ほとんどすべての x について $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$」が成立する時、$f_n(x)$ は $f(x)$ に概収束すると言う。きちんと定義しよう。

定義 7.11 (1) 測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ 上の可測関数 $f_n(x)$ が可測関数 $f(x)$ に「概収束する」「ほとんどすべての点で収束する」とは

$$m\left(\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0$$

のときに言う。集合 $N = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$ は可測集合になることに注意せよ。
(2) $m\left(\{x \in X \mid f(x) > g(x)\}\right) = 0$ のとき $f(x) \leq g(x)$ $a.e.$ x と書く。

ルベーグの収束定理は次のような形で成立する。この定理の内容は定理 7.3 に帰着できるが、どのように帰着させるかも述べよう。

定理 7.12 (ルベーグの優収束定理 (ほとんどすべてのバージョン)) $\{f_n(x)\}$ が可測で次の (1), (2) をみたすとする。
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad a.e.\ x \in X.$
(2) ある $g \in L^1(X, m)$ が存在して $|f_n(x)| \leq g(x)$ $a.e.$ $x \in X$.
このとき、

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dm(x) = \int_X f(x)dx.$$

証明 次のような集合を考える。

$$\begin{aligned} N &= \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\} \\ N_k &= \{x \in X \mid |f_k(x)| > g(x)\} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

定義から $m(N) = m(N_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. $\tilde{N} = N \cup (\cup_{k=1}^{\infty} N_k)$ とおくと $m(\tilde{N}) = 0$(なぜでしょうか!). $\tilde{f}_n(x) = f_n(x) I_{\tilde{N}^c}(x)$, $\tilde{f}(x) = f(x) I_{\tilde{N}^c}(x)$ と定義する。すると $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x)$ $(\forall x \in X)$ かつ $|\tilde{f}_n(x)| \leq g(x)$ $(\forall x \in X)$. したがって、定理 7.3 を適用して

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \tilde{f}_n(x)dm(x) = \int_X \tilde{f}(x)dm(x). \tag{7.8}$$

$f_n(x) = \tilde{f}_n(x)$ $a.e.$ x, $f(x) = \tilde{f}(x)$ $a.e.$ x だから命題 5.24 (2) より $\int_X f_n(x)dm(x) = \int_X \tilde{f}_n(x)dm(x)$, $\int_X f(x)dm(x) = \int_x \tilde{f}(x)dm(x)$. したがって、(7.8) は定理の主張を示している。 $\square$

収束定理とは関係ないが $a.e.$ に慣れるために次の問題をあげる。

演習問題 7.13 以下を示せ。
(1) $f(x) = g(x)$ *a.e.* x かつ $g(x) = h(x)$ *a.e.* x ならば $f(x) = h(x)$ *a.e.* x.
(2) $f_1(x) = g_1(x)$ *a.e.* x かつ $f_2(x) = g_2(x)$ *a.e.* x のとき $f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)$ *a.e.* x.

8 ユークリッド空間上のフビニの定理

$\mathbb{R}^{n+m}$ の点 z を $z = (x, y)$ $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ のように最初の n 次元の点を x、後の m 次元の点を y と書くことにする。$f(z) = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^{n+m}$ 上のルベーグ積分可能な関数として、累次積分

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx \right) dy$$

は可能であろうか？この問題を解決しているのが Fubini(フビニ) の定理である。
ここでは、次の順番で定理を証明する：
(1) ボレル可測関数に対する Fubini の定理
(2) ルベーグ可測関数に対する Fubini の定理
以下の記号を使う。

定義 8.1 $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ に対して

$$\begin{aligned} A_x &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in A\} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \\ A^y &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in A\} \quad (y \in \mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

以下で $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n+m}$ 上の 3 つのルベーグ測度が出てくるがいずれも m_L と書くことにする。

8.1 ボレル可測関数に対する Fubini の定理

次がボレル可測関数に対する Fubini の定理である。

定理 8.2 $f(z)$ $(z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m)$ はボレル可測関数とする。
(1) $y \in \mathbb{R}^m$ を固定する。関数 $x(\in \mathbb{R}^n) \to f(x, y)$ は $\mathbb{R}^n$ 上のボレル可測関数である。$x \in \mathbb{R}^n$ を固定して得られる $\mathbb{R}^m$ 上の関数 $y \to f(x, y)$ もボレル可測である。
(2) (非負値関数のとき) すべての $z = (x, y)$ について $f(x, y) \geq 0$ とする。このとき、x, y の関数

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y), \\ G(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dm_L(x) \end{aligned} \tag{8.1}$$

は ($+\infty$ の値を取るかも知れない) ボレル可測関数である。更に次の等式が成立する：

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dm_L(z) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)dm_L(x) = \int_{\mathbb{R}^m} G(y)dm_L(y) \tag{8.2}$$

(3) (一般の場合)　$f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}, m_L)$ とする。このとき、以下が成立する。

(i) $m_L(N_1)=0$ $(N_1 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ が存在して、$x \notin N_1$ に対して $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m, m_L)$. 同様に $m_L(N_2)=0$ $(N_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m))$ が存在して、$y \notin N_2$ に対して $f(\cdot,y) \in L^1(\mathbb{R}^n, m_L)$.

(ii) 関数 $F(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y)$ $(x \in N_1^c)$, $G(y)=\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(x)$ $(y \in N_2^c)$ はそれぞれボレル可測かつ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 上のルベーグ積分可能な関数で次の等式が成立する。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dm_L(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x)dm_L(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} G(y)dm_L(y). \qquad (8.3)\end{aligned}$$

注 8.3 上記の (ii) の *statement* に関しては、注 *5.25* (2) に注意せよ。すなわち、関数 $F(x), G(y)$ は測度 0 の集合の上で値が決まっていないがそこでどのような値をとろうが積分の値は変わらないので、$\int_{N_1^c} F(x)dm_L(x)$ ではなく $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dm_L(x)$ と書いている。

上の Fubini の定理を

1. $f(x,y)$ が定義関数のとき (補題 8.4)
2. $f(x,y)$ が非負単関数のとき (補題 8.8)
3. $f(x,y)$ が一般のボレル可測関数のとき (定理 8.2)

のように順番に証明して行く。1 の証明がもっとも本質的である。

補題 8.4 (定義関数に対する Fubini の定理) $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ とする。
(1) $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ のとき任意の x, y に対して $A_x \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, $A^y \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. かつ $x(\in \mathbb{R}^n) \to m_L(A_x)$, $y(\in \mathbb{R}^m) \to m_L(A^y)$ はボレル可測関数である。
(2)

$$m_L(A) = \int_{\mathbb{R}^n} m_L(A_x) dm_L(x) = \int_{\mathbb{R}^m} m_L(A^y) dm_L(y). \tag{8.4}$$

注 8.5 $f(x,y) = I_A(x,y)$ とすると

(1) $f(x,y) = I_{A_x}(y) = I_{A^y}(x)$,

(2) $\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm_L(y) = m_L(A_x)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) dm_L(x) = m_L(A^y)$, $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dm_L(z) = m_L(A)$

であるからこの補題は $f(x,y) = I_A(x,y)$ について *Theorem* 8.2 (1), (2) が成立すると言っているのと同じである。

この補題の証明のため、次の単調族定理 (Monotone class theorem) を用いる。この Monotone class theorem はよく使われる定理である。この講義では、これを認めて使うことにする。

定義 8.6 集合族 $\mathcal{C}$ が単調族とは、次の二つが成立するときに言う：

(1) $A_i \in \mathcal{C}$, $A_i \subset A_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ のとき $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$.

(2) $A_i \in \mathcal{C}$, $A_{i+1} \subset A_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ のとき $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$.

定理 8.7 (Monotone class theorem) $\mathcal{A}$ が有限加法族、$\mathcal{C}$ が単調族で $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ をみたすならば、$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$.

補題 8.4 の証明
$\mathcal{A}$ を $\prod_{i=1}^{n+m} (a_i, b_i]$ $(-\infty \le a_i \le b_i \le +\infty)$ の形の半開区間の有限個の和集合でかける集合全体とする。ただし、$b_i = +\infty$ のときは、$(a_i, +\infty]$ ではなく、$(a_i, +\infty)$ と解釈する。すると $\mathcal{A}$ は有限加法族であることがわかる。$E_N = (-N, N]^n$ と定める。

$$\mathcal{C} = \Big\{ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \mid \text{任意の } N \text{ に対して定まる集合 } A \cap E_N \text{ に対して補題の (1), (2) が成立する} \Big\}.$$

(i) $\mathcal{C}$ が単調族であること

(ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$

を示せば単調族定理から $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$ がわかる。したがって、任意の N について、$(A \cap E_N)_x, (A \cap E_N)^y$ はボレル可測集合で $x(\in \mathbb{R}^n) \to m_L((A \cap E_N)_x), y(\in \mathbb{R}^m) \to m_L((A \cap E_N)^y)$ はボレル可測関数である。$N \to \infty$ として (1) が示される。また、

$$m_L(A \cap E_N) = \int_{\mathbb{R}^n} m_L((A \cap E_N)_x) dm_L(x) = \int_{\mathbb{R}^m} m_L((A \cap E_N)^y) dm_L(y). \tag{8.5}$$

この式で $N \to \infty$ とすれば単調収束定理より、(2) が示される。よって、(i), (ii) を示そう。(i) は単調収束定理、ルベーグの優収束定理、命題 3.13 (3), (5) から容易にわかる。$\mathcal{A}$ の元は、お互いに共通部分を持たない $\prod_{i=1}^{n+m}(a_i, b_i]$ の形の集合の有限和で書けるから、(ii) を示すためには、$A = \prod_{i=1}^{n+m}(a_i, b_i]$ のときに示せばよい。

$x = (x_1, \dots, x_n)$ のとき、

$$A_x = \begin{cases} \prod_{j=n+1}^{n+m}(a_j, b_j] & (a_i < x_i \leq b_i \ 1 \leq n \leq n \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{そのほかのとき}) \end{cases} \tag{8.6}$$

$y = (y_1, \dots, y_m)$ のとき、

$$A^y = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i] & (a_{n+j} < y_j \leq b_{n+j} \ \ 1 \leq j \leq m \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{そのほかのとき}) \end{cases} \tag{8.7}$$

だから $a_i < x_i \leq b_i$ $(1 \leq n \leq n)$ のとき、$m_L(A_x) = \prod_{j=1}^{m}(b_{n+j} - a_{n+j})$, $a_{n+j} < y_j \leq b_{n+j}$ $(1 \leq j \leq m)$ のとき、$m_L(A^y) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$. したがって、明らかに (1),(2) が成立する。これで証明が終わった。 $\square$

次の非負単関数にたいする定理 8.2 は補題 8.4 から容易に従う。

補題 8.8 (単関数に対する Fubini の定理)

$\mathbb{R}^{n+m}$ 上のボレル可測な単関数が $f(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i}(x,y)$ と書けているとする。ここで、$A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ である。次が成立する。

(1)

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{(A_i)_x}(y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{(A_i)^y}(x) \tag{8.8}$$

である。特に x, y を固定して得られる関数 $y \to f(x,y)$, $x \to f(x,y)$ はボレル可測である。

(2) $\alpha_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq k)$ とする。$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) dm_L(y)$, $G(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm_L(x)$ とおく。

次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_L((A_i)_x) & (8.9) \\ G(y) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_L((A_i)^y) & (8.10) \\ \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dm_L(x) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m(A_i) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dm_L(z) & (8.11) \\ \int_{\mathbb{R}^m} G(y) dm_L(y) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m(A_i) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dm_L(z) & (8.12) \end{aligned}$$

定理 8.2 の証明 (1) $f_N^+(x,y)$ を非負ボレル可測単関数で単調に増加して $f(x)$ の正部分 $f^+(x,y)$ に収束する関数列とする。同様に負部分 $f^-(x,y)$ に収束する関数列 $f_N^-(x,y)$ を取る。$f_N(x,y) = f_N^+(x,y) - f_N^-(x,y)$ とおくと $f_N(x,y)$ はボレル可測な単関数で

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

$x \to f_n(x,y)$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-可測だからその極限の $x \to f(x,y)$ も $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-可測。$y \to f(x,y)$ も同様に $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$-可測である。

(2) (1) で作った単関数 $f_N(x,y)$ を用いる。今の場合、$f_N(x,y) \geq 0$ に注意する。

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} f_N(x,y) dm_L(y) \\ G_N(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_N(x,y) dm_L(x) \end{aligned}$$

とおく。単調収束定理よりすべての x, y について $\lim_{N\to\infty} F_N(x) = F(x)$, $\lim_{N\to\infty} G_N(y) = G(y)$ である。次に

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dm_L(z) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dm_L(x) \tag{8.13}$$

を示す。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dm_L(z) &= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_N(z) dm_L(z) \quad (\text{単調収束定理より}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F_N(x) dm_L(x) \quad (\text{単関数に対する Fubini の定理より}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F(x) dm_L(x) \quad (\text{単調収束定理より}). & (8.14) \end{aligned}$$

$G(y)$ の方も同様である。

(3) (1) で作った $f_N^{\pm}(x,y), f_N(x,y)$ を用いる。$G(y)$ に対する statement の証明は $F(x)$ の方と同様なので、$F(x)$ の方のみ示す。

$$\begin{aligned} F_{N,1}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} f_N^+(x,y) dm_L(y) & (8.15) \\ F_{N,2}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} f_N^-(x,y) dm_L(y) & (8.16) \end{aligned}$$

と $F_{N,1}, F_{N,2}$ を定める。$N \to \infty$ とすると単調収束定理より $F_1(x) = \lim_{N\to\infty} F_{N,1}(x), F_2(x) = \lim_{N\to\infty} F_{N,2}(x)$ が収束し (+∞ に発散するのもこめて収束すると言っている!)

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} f^+(x,y)dm_L(y) && (8.17)\\
F_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} f^-(x,y)dm_L(y) && (8.18)
\end{aligned}
$$

がすべての x で成立する。非負の可測関数に対しての Fubini の定理の結果 (2) から

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} F_1(x)dm_L(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f^+(z)dm_L(z) < \infty && (8.19)\\
\int_{\mathbb{R}^n} F_2(x)dm_L(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f^-(z)dm_L(z) < \infty. && (8.20)
\end{aligned}
$$

ゆえに $K_1 = \{x \mid F_1(x) = +\infty\}, K_2 = \{x \mid F_2(x) = +\infty\}$ とおくと $m_L(K_1) = m_L(K_2) = 0$. $N_1 = K_1 \cup K_2$ とおくとやはり $m_L(N_1) = 0$ である。積分の定義とほとんどすべての点で等しい関数の積分は等しいことから

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)dm_L(z) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f^+(z)dm_L(z) - \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f^-(z)dm_L(z)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(F_1(x)I_{K^c}(x) - F_2(x)I_{K^c}(x)\right) dm_L(x) && (8.21)
\end{aligned}
$$

ここで、任意の $x \in N_1^c$ について $f(x,y)$ は y について可積分であり

$$
F_1(x) - F_2(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y) = F(x) \qquad (\forall x \in K^c)
$$

に注意すると (8.21) の右辺は $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dm_L(x)$ となる。 $\square$

8.2 ルベーグ可測関数に対する Fubini の定理

この節では「10.1 ルベーグ測度の性質について」の結果を使う。

補題 8.9 $A \in \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^{n+m})$ とする。
(1) ルベーグ測度ゼロの集合 $N_1 \subset \mathbb{R}^n, N_2 \subset \mathbb{R}^m$ が存在して任意の $x \in N_1^c$, $y \in N_2^c$ に対して A_x, A^y はルベーグ可測集合である。さらに $x(\in N_1^c) \to m_L(A_x)$, $y(\in N_2^c) \to m_L(A^y)$ はルベーグ可測関数である。
(2)

$$
m_L(A) = \int_{\mathbb{R}^n} m_L(A_x)dm_L(x) = \int_{\mathbb{R}^m} m_L(A^y)dm_L(y). \tag{8.22}
$$

が成立する。

証明 系 10.2 よりボレル可測集合 B, C で $C \subset A \subset B$, $m_L(B \setminus C) = 0$ となるものが存在する。$D = B \setminus C$ は測度ゼロのボレル集合だから補題 8.4 (2) より

$$
\int_{\mathbb{R}^n} m_L(D_x)dm_L(x) = \int_{\mathbb{R}^m} m_L(D^y)dm_L(y) = 0.
$$

したがって、測度ゼロのボレル集合 $N_1 \subset \mathbb{R}^n, N_2 \subset \mathbb{R}^m$ が存在して任意の $x \in N_1^c, y \in N_2^c$ に対して $m_L(D_x) = 0, m_L(D^y) = 0$. したがって、この x, y に対して $m_L((B \setminus A)_x) = m_L((B \setminus A)^y) = 0$. B_x, B^y はボレル可測集合だからこの結果より、$x \in N_1^c, y \in N_2^c$ に対して A_x, A^y はルベーグ可測である。すべての $x \in N_1^c, y \in N_2^c$ に対して $m_L(A_x) = m_L(B_x)$, $m_L(A^y) = m_L(B^y)$ であり $x(\in \mathbb{R}^n) \to m_L(B_x)$, $y(\in \mathbb{R}^m) \to m_L(B^y)$ はボレル可測関数だから $x(\in N_1^c) \to m_L(A_x)$, $y(\in N_2^c) \to m_L(A^y)$ はルベーグ可測である。
(2) すべての $x \in N_1^c, y \in N_2^c$ に対して $m_L(A_x) = m_L(B_x)$, $m_L(A^y) = m_L(B^y)$ であるから、B に対する補題 8.4 から容易に従う。 □

定理 8.10 $f(z)$ $(z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m)$ はルベーグ可測関数とする。
(1) $y \in \mathbb{R}^m$ を固定する。ルベーグ測度ゼロの集合 $N_1 \subset \mathbb{R}^n, N_2 \subset \mathbb{R}^m$ が存在して次が成立する。$x \in N_1^c$ を固定して得られる関数 $y(\in \mathbb{R}^m) \to f(x, y)$, $y \in N_2^c$ を固定して得られる関数 $x(\in \mathbb{R}^n) \to f(x, y)$ はルベーグ可測である。
(2) (非負値関数のとき) すべての $z = (x, y)$ について $f(x, y) \geq 0$ とする。このとき、x, y の関数 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dm_L(y), \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dm_L(x)$ は ($+\infty$ の値を取るかも知れない) ルベーグ可測関数である。更に次の等式が成立する：

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dm_L(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dm_L(y) \right) dm_L(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dm_L(x) \right) dm_L(y) \tag{8.23}$$

(3) (一般の場合) $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}, m_L)$ とする。このとき、以下が成立する。

(i) $m_L(N_1) = 0$ $(N_1 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ が存在して、$x \notin N_1$ に対して $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m, m_L)$. 同様に $m_L(N_2) = 0$ $(N_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m))$ が存在して、$y \notin N_2$ に対して $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n, m_L)$.

(ii) 関数 $\displaystyle x(\notin N_1) \to \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dm_L(y), y(\notin N_2) \to \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dm_L(x)$ はそれぞれルベーグ可測かつ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 上のルベーグ積分可能な関数で次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dm_L(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dm_L(y) \right) dm_L(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dm_L(x) \right) dm_L(y). \end{aligned} \tag{8.24}$$

証明 (1) $f_+(z), f_-(z)$ のそれぞれについて証明すればよいので, $f(z) \geq 0$ と仮定してよい。$f(z)$ に収束する非負単関数の増大列 $f_n(z)$ が存在する。したがって、ルベーグ可測集合 A の定義関数 I_A について証明すれば十分である。$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\begin{aligned} \{y \in \mathbb{R}^m \mid I_A(x, y) = 1\} &= A_x \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid I_A(x, y) = 1\} &= A^y. \end{aligned}$$

したがって、補題 8.9 (1) の N_1, N_2 を取ればよい。
(2) $f(x, y)$ に対して非負ボレル可測関数 $\tilde{f}(x, y)$ で $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ $m_L - a.e.(x, y)$. すなわち $N = \{(x, y) \mid f(x, y) \neq \tilde{f}(x, y)\}$ とおくと $m_L(N) = 0$. この N に対して補題 8.9 (1) を適用して得

られる測度 0 の集合を $N_1 \subset \mathbb{R}^n, N_2 \subset \mathbb{R}^m$ とする。また、(2) の結果より $\int_{N_1^c} m_L(N_x)dm_L(x) = \int_{N_2^c} m_L(N^y)dm_L(y) = 0$. したがって、測度ゼロの集合 N_i' で $N_i \subset N_i'$ をみたすものが存在し、$m_L(N_x) = 0$ $(x \in N_1'^c)$, $m_L(N^y) = 0$ $(y \in N_2'^c)$. すなわち

$$
\begin{aligned}
\text{任意の } x \in N_1'^c \text{ に対して } f(x,y) &= \tilde{f}(x,y) \quad (m_L - a.e.\ y) \\
\text{任意の } y \in N_2'^c \text{ に対して } f(x,y) &= \tilde{f}(x,y) \quad (m_L - a.e.\ x)
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\text{任意の } x \in N_1'^c \text{ に対して } \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm_L(y) &= \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}(x,y)dm_L(y) \\
\text{任意の } y \in N_2'^c \text{ に対して } \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dm_L(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x,y)dm_L(y)
\end{aligned}
\tag{8.26}
$$

$\int_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}(x,y)dm_L(y), \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x,y)dm_L(y)$ はボレル可測関数だから定理 8.2 (2) から結論が従う。
(3) (2) と同じように定理 8.2 (3) を用いて証明すればよいので省略する。 □

注 8.11 (1) $f(x,y)$ がルベーグ可測で $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|dm_L(y) \right) dm_L(x)$ が有限ならば $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}, m_L)$ であることもわかる。
(2) $f(x,y)$ が $A \in \mathfrak{B}_L(\mathbb{R}^{n+m})$ 上のルベーグ可積分関数ならば以下のルベーグ積分はすべて *well-defined* で

$$
\begin{aligned}
\int_A f(z)dm_L(z) &= \int_{A^y} \left(\int_{A_x} f(x,y)dm_L(y) \right) dm_L(x) \\
&= \int_{A_x} \left(\int_{A^y} f(x,y)dm_L(x) \right) dm_L(y).
\end{aligned}
\tag{8.27}
$$

が成立する。

演習問題 8.12 I を $\mathbb{R}^n$ の直方体、J を $\mathbb{R}^m$ の直方体とし $f(x,y)$ が $I \times J$ でリーマン積分可能とする。
(1) m_L-*a.e.* $x \in I$ に対して関数 $y \to f(x,y)$, m_L-*a.e.* $y \in J$ に対して関数 $x \to f(x,y)$ はリーマン積分可能であることを示せ。
(2) J での有界関数 $F(y)$ に対して、リーマン上積分、下積分を $\overline{R}$-$\int_I F(y)dy$, $\underline{R}$-$\int_I F(y)dy$ と書く事にする。このとき、$\overline{R}$-$\int_J f(x,y)dy$, $\underline{R}$-$\int_J f(x,y)dy$ は I 上でリーマン積分可能で

$$
\int_I \left(\overline{R}\text{-}\int_J f(x,y)dy \right) dx = \int_I \left(\underline{R}\text{-}\int_J f(x,y)dy \right) dx = \int_{I \times J} f(x,y)dxdy
$$

を示せ。

注 8.13 上の演習問題で (2) を示すのに、(1) は使う必要は無い。ただし、(1) の結果から、ほとんどすべての x について $\overline{R}$-$\int_J f(x,y)dy = \underline{R}$-$\int_J f(x,y)dy$ が言えていることになる。

9　色々な関数の収束概念

10　補足

10.1　ルベーグ測度の性質について

この節では、

(1) ルベーグ可測集合とボレル可測集合がルベーグ測度ゼロの集合を除いて一致すること

(2) ルベーグ積分可能な関数が連続関数で L^p-ノルムの意味で近似できること

(3) ルベーグ測度の平行移動・回転不変性

(4) ルベーグ測度の完備性

を示す。

(1)

定理 10.1 任意の正数 ε と任意のルベーグ可測集合 A に対して、開集合 G と閉集合 F で $F \subset A \subset G$ かつ $m_L(G \setminus A) \le \varepsilon, m_L(A \setminus F) \le \varepsilon$ とできる。

証明　(1) A が有界集合のとき：　このとき、$m_L(A) < \infty$ である。ルベーグ測度の定義から、ある直方体の列 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ で $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} m_L(I_i) \le m_L(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ をみたすものが存在する。$I_i = \prod_{l=1}^{n} [a_l^{(i)}, b_l^{(i)}]$ の形をしているが、十分早く 0 に収束する正数列 $\{\varepsilon_l\}$ をとり、$J_i = \prod_{l=1}^{n} (a_l^{(i)} - \varepsilon_l, b_l^{(i)} + \varepsilon_l)$ とおくと $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} J_i$ かつ

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_L(J_i) \le m_L(A) + \varepsilon. \tag{10.1}$$

$G = \cup_{j=1}^{\infty} J_i$ とおけば G は開集合であり、

$$m_L(G \setminus A) = m_L(G) - m_L(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} m_L(J_i) - m_L(A) \le \varepsilon.$$

次に内側から近似する閉集合の存在を示す。$A \subset E$ となる直方体 E を取る。$B = E \setminus A$ とおく。B に対して開集合 G で $B \subset G$ かつ $m_L(G \setminus B) \le \varepsilon$ となるものが存在する。$F = E \cap G^c$ とおくと F は閉集合で $F \subset A$ かつ

$$\begin{aligned} m_L(A \setminus F) &= m_L(A) - m_L(F) = m_L(E) - m_L(B) - (m_L(E) - m_L(G \cap E)) \\ &= m_L(G \cap E) - m_L(B) \le m_L(G) - m_L(B) = m_L(G \setminus B) \le \varepsilon. \end{aligned} \tag{10.2}$$

(2) A が有界集合でないとき：　このときは、原点中心、半径 n の閉球を B_n とし、($B_0 = \emptyset$ とする)。$A_n = A \cap (B_n) \cap B_{n-1}^c$ とおくと A_n は有界な可測集合で互いに共通部分をもたない。かつ $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. おのおのの A_n に対して (1) を適用し開集合、閉集合を作りその和を考えればよい。(一般に閉集合の可算個の和集合は閉集合では無いが、今の場合は閉集合である。なぜか？)　□

この系として

系 10.2 任意のルベーグ可測集合 A に対してボレル可測集合 B, C で $C \subset A \subset B$ かつ $m_L(B\backslash A) = m_L(A \setminus C) = 0$ となるものがある。

この系を用いると

定理 10.3 (1) $f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ可測関数とするとボレル可測関数 $g(x)$ で次をみたすものがある：

$$f(x) = g(x) \qquad m_L - a.e.\ x. \tag{10.3}$$

(2) あるボレル可測関数とほとんどすべての点で等しい関数はルベーグ可測関数である。

証明 (1) $f(x)$ が非負値の場合のみ証明すれば十分である。このとき、

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{k=0}^{2^N N} \frac{k}{2^N} I_{E_{N,k}}(x) \\ E_{N,k} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{k}{2^N} < f(x) \le \frac{k+1}{2^N} \right\} \quad (0 \le k \le 2^N N - 1) \\ E_{N,2^N N} &= f^{-1}((N, +\infty)) \end{aligned}$$

と定義すると $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. $E_{N,k}$ はルベーグ可測集合だからボレル可測集合 $\tilde{E}_{N,k}$ で $\tilde{E}_{N,k} \subset E_{N,k}$ かつ $m_L(E_{N,k} \setminus \tilde{E}_{N,k}) = 0$ となるものがある。$\tilde{f}_N(x) = \sum_{k=0}^{2^N N} \frac{k}{2^N} I_{\tilde{E}_{N,k}}$ とおくと $\tilde{f}_N(x)$ はボレル可測で $\tilde{f}_N(x) = f_N(x)$ $m_L - a.e.\ x$. 測度ゼロの集合 $\cup_{N=1}^{\infty} \{\tilde{f}_N(x) \ne f_N(x)\}$ の外側では $f_N(x) = \tilde{f}_N(x)$ だから $\lim_{N\to\infty} \tilde{f}_N(x) = f(x)$ である。$\tilde{f}(x)$ を

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \limsup_{N\to\infty} \tilde{f}_N(x) & \limsup_{N\to\infty} \tilde{f}_N(x) < +\infty \text{ のとき} \\ 0 & \limsup_{N\to\infty} \tilde{f}_N(x) = +\infty \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.4}$$

と定めると Borel 可測で $f(x) = \tilde{f}(x)$ $m_L - a.e.\ x$ となる。
(2) 関数 $f(x)$ に対してあるボレル可測関数 $g(x)$ が存在して $m_L(\{f(x) \ne g(x)\}) = 0$ とする。$N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ne g(x)\}$ とおく。$a \in \mathbb{R}$ とすると

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\} &= (\{f(x) > a\} \cap N^c) \cup (\{f(x) > a\} \cap N) \\ &= (\{g(x) > a\} \setminus (\{g(x) > a\} \cap N)) \cup (\{f(x) > a\} \cap N). \end{aligned} \tag{10.5}$$

(10.5) の右辺の 3 つの集合はいずれもルベーグ可測だから $f(x)$ はルベーグ可測である。 □
(2) L^p 関数の連続関数による近似
以下の定理で次の関数の空間を用いる。

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f(x) \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上の連続関数で } \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ne 0\} \text{ は有界な集合である}\}. \tag{10.6}$$

定理 10.4 $f \in L^p(\mathbb{R}^n, m_L)$ $(p \ge 1)$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在して、$\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} \le \varepsilon$.

(3) ルベーグ測度の平行移動不変性・回転不変性とは次のことである。

定理 10.5 A が $\mathbb{R}^n$ のルベーグ可測集合ならば任意の $\mathbb{R}^n$ の元 v、$O(n)$ の元 T に対して、$A+v := \{x+v \mid x \in A\}$, $TA := \{Tx \mid x \in A\}$ もルベーグ可測集合で $m_L(A) = m_L(A+v)$, $m_L(TA) = m_L(A)$.

(4) ルベーグ測度の完備性を説明する。

定義 10.6 測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ が完備であるとは、次の性質が成立するときに言う：
$A \in \mathcal{F}$ が $m(A) = 0$ をみたすなら、A の任意の部分集合は $\mathcal{F}$ に属し、その測度は 0 である。

定理 10.7 ルベーグ測度は完備である。

これは、次の補題に注意すればよい。

補題 10.8 次は同値である。
(1) $\overline{m}_L(A) = 0$
(2) A はルベーグ可測で $m_L(A) = 0$.

証明 (2) $\to$ (1) は定義から自明。(1) $\to$ (2) を示す。B を $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合とする。$\overline{m}_L(A \cap B) + \overline{m}_L(A^c \cap B) \leq \overline{m}_L(B)$ を示せばよい。$\overline{m}_L(A \cap B) \leq \overline{m}_L(A) = 0$ だから明らかである。 □

10.2 Carathéodory による測度の構成法

10.3 直積測度と Fubini の定理