志村多様体の基礎

梅崎直也

2015 年 8 月 16 日

$\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{Q}$ の代数閉包とする。

1　準備

代数群に関する言葉や記号についてまとめる。

簡約群は連結とする。

代数群 G の中心を $Z(G)$ とかく。$\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ とする。$\nu : G \to T$ を最大可換商とし、これの核を G の導来群と呼び G^{der} とかく。$G^{\mathrm{ad}} = G/Z(G)$ とする。（標数 0 の体上の）半単純代数群 G が単連結とは非自明な同種 $G' \to G$ をもたないこと。

例えば $G = \mathrm{GSp}_{2g}$ のとき、$\nu : \mathrm{GSp}_{2g} \to \mathbb{G}_m$ であり $G^{\mathrm{der}} = \mathrm{Sp}_{2g}$ となる。Sp_{2g} は単連結である。$G^{\mathrm{ad}} = \mathrm{Sp}_{2g}/\pm 1$ となる。

$G(\mathbb{R})_+$ を $G(\mathbb{R}) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ による単位元成分 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ の引き戻しとする。また $G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{R})_+ \cap G(\mathbb{Q})$ とする。

定理 1　強近似定理

G を $\mathbb{Q}$ 上の代数群で、半単純単連結、非コンパクト型とする。このとき $G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{A}_f)$ は稠密。

定理 2　実近似定理

G を $\mathbb{Q}$ 上の連結代数群とする。このとき $G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{R})$ は稠密。

$h \otimes \mathbb{C} : \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ と $\mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{S}_{\mathbb{C}}; z \mapsto (z, 1)$ の合成を μ_h とかく。

2　複素数体上の志村多様体

定義 3　G を $\mathbb{Q}$ 上の簡約群とする。$h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ を代数群の射とし、X を h の $G(\mathbb{R})$ 共役類とする。(G, X) が**志村データ**であるとは次の三条件をみたすことをいう。

1. 任意の $h \in X$ から随伴作用で $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{R}}$ に定まる Hodge 構造は $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$ 型
2. $\mathrm{int}(h(i))$ は $G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ の Cartan 対合
3. G^{ad} は $\mathbb{Q}$ 上の因子 G' であって $G'(\mathbb{R})$ がコンパクトであるものをもたない

定義 4　(G,X) を志村データとし $K\subset G(\mathbb{A}_f)$ を開コンパクト部分群とする。

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)=G(\mathbb{Q})\backslash X\times(G(\mathbb{A}_f)/K)$$

とする。これを **（レベル K の）志村多様体** とよぶ。

$g\in G(\mathbb{A}_f)$ にたいし、$T(g):\mathrm{Sh}_K(G,X)\to\mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}(G,X)$ を $[x,a]\mapsto[x,ag]$ で定義する。

$$\mathrm{Sh}(G,X)=\varprojlim_K\mathrm{Sh}_K(G,X)$$

とかく。これには $G(\mathbb{A}_f)$ の作用が定まる。

志村データの射 $u:(G,X)\to(G',X')$ とは準同型 $u:G\to G'$ であって $u(X)\subset X'$ なるものとする。これは $u:\mathrm{Sh}(G,X)\to\mathrm{Sh}(G',X')$ を定める。

定理 5　$G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ の完全代表系 C をとる。これは有限集合となる。

X^+ を X の連結成分とし、$\Gamma_g\subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})_+$ を $gKg^{-1}\cap G(\mathbb{Q})_+\subset G(\mathbb{Q})_+$ の像とする。

$$\coprod_{g\in C}\Gamma_g\backslash X^+\to\mathrm{Sh}_K(G,X)$$

は同相。

とくに G^{der} が単連結のとき、$\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の連結成分の集合は $T(\mathbb{Q})_+\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K)$ と一致する。ここで $T=G/G^{\mathrm{der}}$ とした。

このことと Baily-Borel の定理から、志村多様体および $G(\mathbb{A}_f)$ の作用は複素数体上の代数多様体（の射影系）およびその間の射としての構造をもつことがわかる。

3　正準モデル

T を $\mathbb{Q}$ 上定義された G の極大トーラスとし $W=N_G(T(\mathbb{C}))/T(\mathbb{C})$ を Weyl 群とする。同型 $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m,T_{\overline{\mathbb{Q}}})/W\to\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m,G_{\mathbb{C}})/G(\mathbb{C})$ をとおして $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m,G_{\mathbb{C}})/G(\mathbb{C})$ への $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ 作用が定まる。

定義 6　志村データ (G,X) の **reflex 体**とは、$h\in X$ にたいし $\mu_h\in\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m,G_{\mathbb{C}})/G(\mathbb{C})$ を固定する $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の部分群に対応する代数体 $E(G,X)\subset\mathbb{C}$ のこと。

定義 7　$x\in\mathrm{Sh}(G,X)$ もしくは $x\in\mathrm{Sh}_K(G,X)$ が**特殊点**とは x の代表元 $(h,g)\in X\times G(\mathbb{A}_f)$ としたとき $h:\mathbb{S}\to G_{\mathbb{R}}$ が $\mathbb{Q}$ 上定義されたトーラス $T\subset G$ を経由すること。

(T,h) をトーラスの志村データとする。$\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(\mu_h):\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)\to\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(T_E)$ とノルム $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(T_E)\to T$ の合成から定まる射 $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times\to T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A})$ の連結成分をとり、Artin 写像 $\pi_0(E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times)\to\Gamma_E^{\mathrm{ab}}$ の逆を合成することで $\Gamma_E^{\mathrm{ab}}\to\pi_0(T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}))$ を定義する。これにより 0 次元多様体 $\mathrm{Sh}_K(T,h)$ に Γ_E が作用し、$Sh(T,h)$ の $E=E(T,h)$ 上のモデル $\mathrm{Sh}(T,h)_E$ を定める。

定義 8　$\mathrm{Sh}(G,X)$ の $E=E(G,X)$ 上の $G(\mathbb{A}_f)$ 作用つきのモデル $\mathrm{Sh}(G,X)_E$ が**正準モデル**とは、任意のトーラスの志村データからの射 $(T,h)\to(G,X)$ から定まる射 $\mathrm{Sh}(T,h)\to\mathrm{Sh}(G,X)$ が $E(T,h)$ 上の射 $\mathrm{Sh}(T,h)_{E(T,h)}\to Sh(G,X)_E\otimes E(T,h)$ からくること。

定理 9　志村多様体の正準モデルは一意的に存在する。

一意性の証明には次の Hilbert 既約性定理を使う。

定理 10　$F(X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_s)\in\mathbb{Q}[X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_s]$ を既約多項式とする。このとき $\{(a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{Q}^r \mid F(a_1,\dots,a_r,Y_1,\dots,Y_s)\in\mathbb{Q}[Y_1,\dots,Y_s]$ が既約 $\}\subset\mathbb{Q}^r$ は Zariski 位相で稠密。

4　保型ベクトル束

ここでは G に $Z(G)^0$ が CM 体上分裂するという条件を加える。このとき $Z_s(G)$ を $Z(G)$ の $\mathbb{R}$ 上分裂する部分トーラスで、$\mathbb{Q}$ 上分裂する部分トーラスをもたないもののうち最大なものとする。$G^c=G/Z_s(G)$ と定める。

命題 11　G の（有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間への代数的な）表現 (V,ξ) で G^c を経由するものとする。これにたいし、$\mathrm{Sh}_K(G,X)$ 上の $\mathbb{Q}$ 局所系 L_ξ およびエタール $\mathbb{Q}_\ell$ 局所系 $L_{\xi,\ell}$ が定まる。また $L_\xi\otimes\mathbb{Q}_\ell\cong L_{\xi,\ell}$ となる。

$h\in X$ にたいして随伴表現 $G\to GL(\mathrm{Lie}(G))$ から定まる Hodge フィルトレーションを F_h とかく。$P_h\subset G_{\mathbb{C}}$ を $F_h^0(\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}})=\mathrm{Lie}(P_h)$ なるものとする。$\check{X}=G_{\mathbb{C}}/P_h$ とするとこれは射影多様体になる。P_h の表現と $\check{X}$ 上の $G_{\mathbb{C}}$ 同変ベクトル束は圏同値。

定義 12　$G(\mathbb{R})/K_\infty\to G(\mathbb{C})/P_h$ から定まる射を **Borel 埋め込み**と呼び、$\beta: X\to\check{X}$ とかく。これは $G(\mathbb{R})$ 同変な開うめこみ。

$\check{X}$ 上の $G_{\mathbb{C}}$ 同変ベクトル束 $\mathcal{V}$ をとる。その引き戻し $\beta^{-1}(\mathcal{V})\to X$ は $G(\mathbb{R})$ 同変ベクトル束となる。

定義 13

$$\mathcal{V}^\sharp=G(\mathbb{Q})\backslash\beta^{-1}(\mathcal{V})\times(G(\mathbb{A}_f)/K)\to\mathrm{Sh}_K(G,X)$$

を**保型ベクトル束**とよぶ。これは代数的なベクトル束となる。

このことから G の表現 ξ に対応する保型ベクトル束 $\mathcal{V}_\xi^\sharp$ を定義でき、前に構成した局所系との比較 $\mathcal{V}_\xi^\sharp\cong L_\xi\otimes_{\mathbb{Q}}\mathcal{O}_{\mathrm{Sh}_K}$ がある。

保型ベクトル束の切断として保型形式がでてくる。