志村多様体の整モデル

清水　康司

1　Siegel モジュラー多様体の整モデル

この講演では局所ネータースキームのなす圏を $\mathrm{Sch}_{/\mathbb{Z}}$ であらわす．

定義 1　Siegel モジュラー多様体のモジュライ関手 $\mathcal{A}_{n,N}\colon \mathrm{Sch}_{/\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ をスキーム S に対し組 (A, λ, η) の同型類を対応させるものとする．ただし，

- $A \to S$：相対次元 n のアーベルスキーム．
- $\lambda\colon A \to \widehat{A}$：$A$ の主偏極．
- $\eta\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_S \to A[N]$：$A$ の（シンプレクティック）レベル N 構造，すなわち η は有限平坦群スキームの同型射であって，ある同型 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S \cong \mu_{N,S}$ のもとで $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_S$ の標準的なシンプレクティック構造を $A[N]$ の Weil ペアリングから定まるシンプレクティック構造にうつすもの．

定理 2　$N \geq 3$ のとき $\mathcal{A}_{n,N}$ は滑らかな準射影的スキームで表現される．[*1][*2]

講演では幾何学的不変式論および Grothendieck-Messing 理論を用いた定理の証明の概略を紹介する．

2　志村多様体の整正準モデル

(G, X) を志村データとし，$E = E(G, X)$ をそのレフレックス体とする．p を素数とし，p の上にある E の素点 v を 1 つとる．また $G(\mathbb{Q}_p)$ のコンパクト開部分群 K_p を 1 つとり，

$$\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X) = \mathrm{Sh}(G, X)/K_p = \varprojlim_{K^p} \mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G, X)$$

とおく．$\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ は $G(\mathbb{A}^p_f)$ の連続作用を持つ E 上のスキームである．

---

*1 証明からわかるように $N = 1, 2$ のときも $\mathcal{A}_{n,N}$ は粗モジュライスキームを持つ．

*2 越川さんの講演で扱われたように関手 $\mathcal{A}_{n,N}$ は同種類を用いたアデール解釈を持つ．アデール解釈を使うと p と素な自然数 d，コンパクト開部分群 $K_p = \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ および $K^p \subset \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}^p_f)$ に対してレベル K_pK^p 構造付き d 次偏極アーベルスキームからなるモジュライ問題 $\mathcal{A}_{n,d,K_pK^p}$ を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上で考えることができる．さらに K^p が十分小さいとき $\mathcal{A}_{n,d,K_pK^p}$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上滑らかな準射影的スキームで表現されることがわかる．

この講演では簡単のため $G_{\mathbb{Q}_p}$ が不分岐[*3] であるとする．このとき v は不分岐素点となる．

定義 3 $\mathcal{O}$ で局所環 $\mathcal{O}_{E,(v)}$ をあらわすことにする．

1. $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の $\mathcal{O}$ 上の**整モデル**とは，$G(\mathbb{A}_f^p)$ の連続作用付きの忠実平坦 $\mathcal{O}$ スキーム $\mathscr{S}$ であって，$G(\mathbb{A}_f^p)$ 同変な同型 $\mathscr{S}_E \cong \mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ をもつもののことである[*4]．
2. $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の $\mathcal{O}$ 上の整モデルが**滑らか**（または**正規**）であるとは，$G(\mathbb{A}_f^p)$ のあるコンパクト開部分群 K_0^p が存在して，任意のコンパクト開部分群 $K_1^p \subset K_2^p \subset K_0^p$ に対して $\mathscr{S}/K_1^p$ が滑らかな（または正規）$\mathcal{O}$ スキームであり，$\mathscr{S}/K_1^p \longrightarrow \mathscr{S}/K_2^p$ がエタール射となることをいう．
3. $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の $\mathcal{O}$ 上の整モデルが**拡張条件**を満たすとは，任意の $\mathcal{O}$ 上形式的滑らかな正則スキーム T [*5]に対して射 $T_E \to \mathscr{S}_E$ が $\mathcal{O}$ 上の射 $T \to \mathscr{S}$ に一意的に延長されることをいう．
4. 拡張条件を満たす滑らかな整モデルを**整正準モデル**という．

整正準モデルは $\mathcal{O}$ 上形式的滑らかな正則スキームとなることがわかるので，整正準モデルは存在すれば一意的である．

$G = \mathrm{GSp}_{2n}$ および $X = \mathfrak{H}_n^{\pm}$ のときを考える．G の超特殊部分群 $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ を K_p とおく．

定理 4 $p > 2$ のとき $\varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,N} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ は $\mathrm{Sh}_{K_p}(\mathrm{GSp}_{2n}, \mathfrak{H}_n^{\pm})$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の整正準モデルである．

3 不分岐 PEL 型の志村多様体の整正準モデル

この節では不分岐 PEL 型の志村多様体の整正準モデルを構成する．以下のような PEL データ $(B, *, V, \langle\, ,\, \rangle, h)$ およびそれに伴うデータを考える：[*6]

◎ B：有限次元単純 $\mathbb{Q}$ 代数．
F：B の中心．
$\mathcal{O}_B$：B の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 整環であって，$\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ が $B_{\mathbb{Q}_p}$ の極大整環となるもの．

◎ $*$：$\mathcal{O}_B$ を保つ B 上の正な[*7]対合．
F_0：$*$ に関する F の不変部分体．総実体となる．

◎ V：0 でない有限生成左 B 加群．

[*3] 非アルキメデス的局所体 F 上の簡約群 G が**不分岐**であるとは，G が F 上準分裂であり，かつ F のある不分岐拡大上で分裂することをいう．G が不分岐であることと，G を一般ファイバーとしてもつ $\mathcal{O}_F$ 上の簡約群 $G_{\mathcal{O}_F}$ が存在することは同値である．このとき $K = G_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F)$ は G（の F 値点のなす群）の極大コンパクト開部分群になる．このようにして得られる G の極大コンパクト開部分群を**超特殊部分群** (hyperspecial subgroup) という．

[*4] $\mathscr{S}_E := \mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}} E$ とおいた．以下ではスキームや加群の係数拡大に関するこのような略記を断りなく用いる．

[*5] より一般の状況では，拡張条件の定義に用いる試験スキームのクラスを修正する必要がある．

[*6] 以下では区別がしやすいように PEL データは ◎ で，それ以外のデータは ● であらわす．

[*7] 任意の 0 でない $B_{\mathbb{R}}$ の元 x について $\mathrm{tr}_{B_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}}(xx^*) > 0$ となること．

◎ $\langle\,,\,\rangle$：V 上の $\mathbb{Q}$ 値非退化交代形式であって，任意の $b \in B$ および $v, w \in V$ に対して $\langle bv, w\rangle = \langle v, b^*w\rangle$ となるもの．

- $C := \mathrm{End}_B(V)$．これは中心が F となる単純 $\mathbb{Q}$ 代数で，$\langle\,,\,\rangle$ により定まる対合をもつ．この対合も $*$ とかく．
  G：$\mathbb{Q}$ 上の代数群で R 値点が以下で与えられるもの．
  $$G(R) = \{x \in C_R \,|\, x\,x^* \in R^\times\}.$$
  G_0：F_0 上の代数群で R' 値点が $G_0(R') = \{x \in C \otimes_{F_0} R' \,|\, x\,x^* = 1\}$ で与えられるもの．
  $G_1 := \mathrm{Res}_{F_0/\mathbb{Q}}\, G_0$．これは $\mathbb{Q}$ 上の代数群で R 値点は $G_1(R) = \{x \in C_R \,|\, x\,x^* = 1\}$ となる．

◎ $h\colon \mathbb{C} \to C_{\mathbb{R}}$：$*$ 準同型であって，$\langle v, h(i)w\rangle$ が正定値となるもの．
X：h^{-1} の $G(\mathbb{R})$ 共役類のなす集合．このとき組 (G, X) は志村データとなる．

- $E := E(G, X)$：(G, X) のレフレックス体．これは次のようにして定義することができる：$B_{\mathbb{C}}$ 加群としての分解 $V_{\mathbb{C}} = V_1 \oplus V_2$ を，$h(z)$ が V_1 および V_2 にそれぞれ z および $\overline{z}$ で作用するものとして定める（$h(z)$ は B の作用と可換なので V_1 および V_2 は $V_{\mathbb{C}}$ の $B_{\mathbb{C}}$ 部分加群となる）．このとき $E \subset \mathbb{C}$ は B の複素表現 V_1 の同型類の定義体である．
- $m := [F : F_0](\dim_F C)^{1/2}$．$h$ が存在することから m は偶数，すなわち $m = 2n$ とかける．

このとき G は次の 3 つの型に分類されることが知られている：

A 型：$[F : F_0] = 2$ のとき．このとき $C_{\mathbb{R}} \cong M_n(\mathbb{C})^{[F_0\,:\,\mathbb{Q}]}$ となり，$G_1(\mathbb{R})$ は不定値ユニタリ群となる．
C 型：$F = F_0$ かつ $G_1(\mathbb{R})$ が斜交群のとき．このとき $C_{\mathbb{R}} \cong M_{2n}(\mathbb{R})^{[F_0\,:\,\mathbb{Q}]}$ となる．
D 型：$F = F_0$ かつ $G_1(\mathbb{R})$ が四元数直交群のとき．このとき $C_{\mathbb{R}} \cong M_n(\mathbb{H})^{[F_0\,:\,\mathbb{Q}]}$ となる．

A 型および C 型において G は（連結）簡約群になる．D 型の場合，G は $2^{[F_0:\mathbb{Q}]}$ 個の連結成分を持つ．この講演では A 型および C 型のみを考える．

$G_{\mathbb{Q}_p}$ が不分岐かつ K_p が超特殊部分群である状況を考えるために次を仮定する：

1. $B_{\mathbb{Q}_p}$ は $\mathbb{Q}_p$ のある不分岐拡大上で行列環の直積に分解する．
2. $V_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Z}_p$ 格子 Λ_p であって，$\langle,\rangle$ について自己双対かつ $\mathcal{O}_B$ 作用で安定なものが存在する．[*8]

- K_p：Λ_p の固定部分群として得られる $G(\mathbb{Q}_p)$ の超特殊部分群．
- $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$：コンパクト開部分群．
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$：$\mathcal{O}_B$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 基底．
  $\det_{V_1} := \det(t_1\alpha_1 + \cdots + t_r\alpha_r; V_1)$：これは $t_1, \ldots, t_r$ を変数とする次数 $\dim_{\mathbb{C}} V_1$ の複素斉

[*8] 講演では簡単のため V の $\mathbb{Z}$ 格子 Λ であって，$\langle,\rangle$ について自己双対かつ $\mathcal{O}_B$ 作用で安定なものが存在し，$\Lambda_p = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ となると仮定する．

次多項式．さらに係数は $\mathbb{C}$ の部分環 $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ に含まれることがわかる．

以上のデータから志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$ が考えられる．以下では $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上のモジュライ問題を定義し，$\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$ がその精モジュライの一般ファイバーの連結成分としてあらわれることをみる．

定義 5　関手 $\mathcal{S}_{K^p}\colon \mathrm{Sch}_{/\mathcal{O}_E\otimes\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ をスキーム S に対して Kottwitz の行列式条件を満たす 4 つ組 $(A,\lambda,i,\overline{\eta})$ の同値類のなす集合を対応させるものとして定める：

- $A \to S$：アーベルスキーム．
- $\lambda\colon A \to \widehat{A}$：主偏極に $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ の元をかけて得られる同種射．
- $i\colon \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A)$：$*$ 準同型．ただし $\mathrm{End}(A)$ については Rosati 対合を考える．
- $\overline{\eta}$：A のレベル K^p 構造．すなわち，S が連結のときは歪エルミート $B_{\mathbb{A}_f^p}$ 加群の同型 $\eta\colon V_{\mathbb{A}_f^p} \to H_1(A_s,\mathbb{A}_f^p)$ の K^p 軌道 $\overline{\eta}$ であって，$\pi_1(S,s)$ によって保たれるもの．ただし歪エルミート $B_{\mathbb{A}_f^p}$ 加群の同型は $(\mathbb{A}_f^p)^{\times}$ の元によるスカラー倍のずれを除いて考える．また s は S の幾何的点であり，$H_1(A_s,\mathbb{A}_f^p)$ は A_s の Tate $\mathbb{A}_f^p$ 加群を $\pi_1(S,s)$ 加群とみなしたもの．

同値関係 $(A,\lambda,i,\overline{\eta}) \sim (A',\lambda',i',\overline{\eta'})$ は $\mathcal{O}_B$ の作用と可換で p と素な同種射 $f\colon A \to A'$ であって，$\widehat{f}\circ\lambda'\circ f$ を λ の $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ の元によるスカラー倍にうつし，$\overline{\eta'} = H^1(f,\mathbb{A}_f^p)\circ\overline{\eta}$ となるものが存在するという条件で定める．

また $(A,\lambda,i,\overline{\eta})$ が **Kottwitz の行列式条件**を満たすとは $\mathrm{Lie}(A)$ 上の $\mathcal{O}_S$ 線形写像 $t_1\alpha_1+\cdots+t_r\alpha_r$ の行列式が $\mathcal{O}_S$ 係数の斉次多項式として $\det_{V_1}$ に一致することをいう．

定理 6　十分小さい K^p に対し $\mathcal{S}_{K^p}$ は $\mathcal{O}_E\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の滑らかな準射影的スキームで表現される．

$\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})$ を $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)(\mathbb{C})$ と結びつけるために記号を 1 つ導入する．

- $\ker^1(\mathbb{Q},G) := \ker\bigl(H^1(\mathbb{Q},G) \to \prod_{v\le\infty} H^1(\mathbb{Q}_v,G)\bigr)$：これは $\mathbb{Q}$ 上の次元が $\dim_{\mathbb{Q}} V$ となる歪エルミート B 加群であって，$\mathbb{Q}$ の各素点 v について $\mathbb{Q}_v$ 上へ係数拡大すると $V_{\mathbb{Q}_v}$ と同型になるようなものを分類する．さらに次が知られている：
  - G が A 型かつ n が偶数であるとき，または G が C 型のとき $\ker^1(\mathbb{Q},G)$ は自明である．
  - G が A 型かつ n が奇数であるとき，$\ker^1(\mathbb{Q},G)$ は有限である．

定理 7　$\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})$ は $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)(\mathbb{C})$ を含む．さらに $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})$ は自然に $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)(\mathbb{C})$ を $\bigl|\ker^1(\mathbb{Q},G)\bigr|$ 個直和したものと同一視される．特に $\mathcal{S}_{K^p}$ の一般ファイバーは正準モデル $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$ を $\bigl|\ker^1(\mathbb{Q},G)\bigr|$ 個直和したものと同一視される．

$\mathcal{S}_{K^p}$ の連結成分で一般ファイバーが $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$ となるものを $\mathscr{S}_{K_pK^p}(G,X)$ とおく．

定理 8　$p>2$ のとき $\mathscr{S}_{K_p} = \varprojlim_{K^p} \mathscr{S}_{K_pK^p}(G,X)$ は $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の整正準モデルである．[*9]

[*9] 厳密には p の上にある E の素点で局所化した状況を考える．

4　アーベル型の志村多様体の整正準モデル

この節ではアーベル型の志村多様体の整正準モデルの存在について紹介する．

(G, X) を志村データとし，$E = E(G, X)$ をそのレフレックス体，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_E$ を E の整数環とする．p を素数とし，p の上にある E の素点 v を 1 つとる．G は p で不分岐であるとし，K_p を $G(\mathbb{Q}_p)$ の超特殊部分群とする．

定理 9　$p > 2$ かつ (G, X) がアーベル型のとき，$\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ は $\mathcal{O}_{(v)}$ 上の整正準モデルをもつ．

アーベル型の場合の証明は Hodge 型の場合の証明に帰着される．よって，以下では $p > 2$ かつ (G, X) を Hodge 型とし，志村データの埋め込み $i\colon (G, X) \hookrightarrow (\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})$ をとる（ただしある有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 V および V 上の非退化交代形式 ψ について $\mathrm{GSp} := \mathrm{GSp}(V, \psi)$ とおいた）．

V の $\mathbb{Z}$ 格子 $V_{\mathbb{Z}}$ をうまくとると，$\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}_{(p)}})$ における G の閉包として定まる $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の代数群 $G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ は一般ファイバーが G となる簡約群になり，さらに $K_p = G_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p)$ となるようにできる．$G(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群 K^p を十分小さくとると $K = K_p K^p$ は $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ を保つ．$K'_p \subset \mathrm{GSp}(\mathbb{Q}_p)$ を $V_{\mathbb{Z}_p}$ の固定化群とする．さらに $\mathrm{GSp}(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群 K'^p を十分小さくとり $K' = K'_p K'^p$ とおくと，閉埋め込み $\mathrm{Sh}_K(G, X) \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{K'}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})_{\mathcal{O}_{(v)}}$ が誘導され，K' は $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ を保つ．このとき適切な d に対し $\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm}) := \mathcal{A}_{(\dim V)/2, d, K'}$ は $\mathrm{Sh}_{K'}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の整モデルとなる．

$\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})_{\mathcal{O}_{(v)}}$ における $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ の閉包の正規化を $\mathscr{S}_K(G, X)$ とおき，$\mathscr{S}_{K_p} = \varprojlim_{K^p} \mathscr{S}_{K_p K^p}(G, X)$ とおく．

定理 10　$\mathscr{S}_K(G, X)$ は $\mathcal{O}_{(v)}$ 上滑らかになる．特に，$\mathscr{S}_{K_p}$ は $\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ の $\mathcal{O}_{(v)}$ 上の整正準モデルである．

証明のポイントは $\mathscr{S}_K(G, X)$ の各点での完備局所環を p 可除群の「G 構造付き」変形空間と結びつけることにある．講演ではこの部分に重点を置きながら，証明の概略について簡単に紹介する．

定義 11　$h \geq 0$ とし，S をスキームとする．S 上の高さ h の p **可除群**とは，次を満たす帰納系 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_\nu, i_\nu\colon \mathcal{G}_\nu \to \mathcal{G}_{\nu+1})_{\nu \geq 0}$ のことをいう：

1. $\mathcal{G}_\nu$ は S 上の階数が $p^{\nu h}$ となる有限局所自由可換群スキーム．
2. $0 \longrightarrow \mathcal{G}_\nu \xrightarrow{i_\nu} \mathcal{G}_{\nu+1} \xrightarrow{p^\nu} \mathcal{G}_{\nu+1}$ は完全．

p 可除群 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_\nu, i_\nu), \mathcal{H} = (\mathcal{H}_\nu, i_\nu)$ の間の射 $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ とは S 上の群スキームの射 $f_\nu\colon \mathcal{G}_\nu \to \mathcal{H}_\nu$ の系であって $i_\nu \circ f_\nu = f_{\nu+1} \circ i_\nu$ を満たすものをいう．

アーベルスキーム $A \to S$ に対して $A[p^\infty] = (A[p^\nu], i_\nu)$ は p 可除群になる．

最後に証明で重要となる Breuil-Kisin 加群のなす圏 $\mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ を導入しておく：

- k：標数 p の完全体．$W := W(k)$：k の Witt ベクトルのなす環．L_0：W の商体．
- L：L_0 の有限完全分岐拡大．$\Gamma_L := \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$：$L$ の絶対 Galois 群．$\varpi \in L$：L の素元．$E(u) \in W[u]$：ϖ の Eisenstein 多項式
- $\mathfrak{S} := W[[u]]$：$\mathfrak{S}$ 上の Frobenius 射 φ を W 上には通常の Frobenius 射であって，$\varphi(u) = u^p$ となるものとして定める．
- $\mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$：有限自由 $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{M}$ と Frobenius 半線形同型 $1 \otimes \varphi \colon \varphi^*(\mathfrak{M})[1/E(u)] \xrightarrow{\cong} \mathfrak{M}[1/E(u)]$ の組のなす圏．
- $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}\circ}_{\Gamma_L}$：$\Gamma_L$ の連続作用付き有限自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群 Λ で $\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p$ が crystalline 表現となるもののなす圏．ただし $\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p$ が crystalline 表現になるとは，

$$B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda \xrightarrow{\cong} B_{\mathrm{cris}} \otimes_{L_0} D_{\mathrm{cris}}(\Lambda)$$

  が成り立つことをいう．ここで B_{cris} は Fontaine が定義した周期環で，Frobenius 半線形作用を持つ．また $D_{\mathrm{cris}}(\Lambda) := \left(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda\right)^{\Gamma_L}$ とおいた．

定理 12　忠実充満テンソル関手 $\mathfrak{M} \colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}\circ}_{\Gamma_L} \longrightarrow \mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ で以下の性質を含む「よい性質」を満たすものが存在する：簡単のため $\mathfrak{M}(\Lambda)$ を $\mathfrak{M}$ と略記する．

1. Frobenius 作用を保つ自然な同型 $D_{\mathrm{cris}}(\Lambda) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{M}/u\mathfrak{M}[1/p]$ がある．
2. 自然な同型 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ がある．[*10]
3. A が $\mathcal{O}_L$ 上のアーベルスキームで，$\Lambda = H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(A_{\overline{L}}, \mathbb{Z}_p) = (T_p A_L)^*$ のとき φ 同変な同型 $\varphi^*(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}) \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathrm{cris}}(A_k/W)$ が存在する．また $\mathcal{O}_L$ 上の p 可除群についても同様の同型が存在する．

[*10] $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ は p 進 Hodge 理論にでてくる環で，$\mathfrak{S}_{(p)}$ を p 進完備化した環上忠実平坦かつ形式的エタールである．