志村多様体を用いたGalois表現の構成

三枝 洋一（東大数理）

1 講演中で用いる記号

F を標数 0 の体とし，Γ_F をその絶対 Galois 群とする．G を F 上の代数群とするとき，その Galois コホモロジー $H^1(\Gamma_F, G(\overline{F}))$ を $H^1(F,G)$ と書く．

F が代数体（この講演では $\mathbb{Q}$）のとき，$H^1(F,G) \to \bigoplus_v H^1(F_v,G)$ の核を $\ker^1(F,G)$ と書く．ここで，v は F の素点を動き，F_v は F の v における完備化を表す．また，$\bigoplus_v H^1(F_v,G) \subset \prod_v H^1(F_v,G)$ は有限個を除く成分が 1 であるような元全体のなす部分集合である．

有限群 H の Pontryagin 双対 $\mathrm{Hom}(H,\mathbb{C}^\times)$ を H^D と書く．群 H の中心を $Z(H)$ と書く．

2 PEL 型志村多様体のエタールコホモロジー

2.1 設定と目標

$(B,*,V,(\ ,\ ),h,\mathcal{O}_B,\Lambda)$ を A 型または C 型の（整）PEL データとし[注1]，それから定まる志村データを (G,X) とする．(G,X) に伴う志村多様体を Sh_K とし，レフレックス体を E と書く．素数 ℓ および $\mathbb{C}$ と $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の同型を固定する．ξ を G の $\mathbb{C}=\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の既約代数的表現とし，それに伴う Sh_K 上の ℓ 進層を $\mathcal{F}$ と書く．エタールコホモロジー $H^i(\mathrm{Sh}_\infty,\mathcal{F}) = \varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K \otimes_E \overline{E},\mathcal{F})$ には $G(\mathbb{A}_f)\times\Gamma_E$ が作用する．この表現を理解することがこの講演の前半部の目標である．

伊藤さんの講演で解説された予想を再度述べておく．ここでは，交叉コホモロジーを避けるため，志村多様体がコンパクトである場合を考えることにする．

予想 2.1

Sh_K が E 上固有であると仮定する．このとき，次が成り立つ：

$$\sum_i (-1)^i H^i(\mathrm{Sh}_\infty,\mathcal{F}) = \bigoplus_{(\psi,\nu)} \pm m(\pi)(\pi_f \otimes V(\psi,\nu)).$$

ここで，記号は以下の通りである．$\psi\colon \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ は A パラメータを動き，ν は $Z_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\psi)$ の有限次元既約表現（で適切な条件を満たすもの）を動く．Arthur 予想により (ψ,ν) でパラメータ付けられる保型表現を π とし，その離散スペクトラムにおける重複度を $m(\pi)$ と書く．志村データ (G,X) より定まる準同型 $r_{(G,X)}\colon \widehat{G}\rtimes W_E \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ と $\psi|_{\mathcal{L}_E\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ との合成を $Z_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\psi)$ の作用で既約分解し，ν 部分をとったものを $V(\psi,\nu)$ とする．

講演で使う記号の導入も兼ねて，$m(\pi)$ を記述する公式（Arthur の重複度公式）も書いておく．$S_\psi = Z_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\psi)$，$\mathcal{S}_\psi = \pi_0(S_\psi/Z(\widehat{G}))$ とおく．ψ による $(1,\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right))$ の像を s_ψ と書く（これは S_ψ の元）．$\varepsilon_\psi\colon \mathcal{S}_\psi \to \{\pm1\}$ をルートナンバー等を用いて定義される指標とする（省略）．このとき，

$$m(\pi) = |\mathcal{S}_\psi|^{-1}\sum_{x\in\mathcal{S}_\psi}\varepsilon_\psi(s_\psi x)\nu(s_\psi x).$$

[注1] この講演では PEL データが出てくる話はほとんどしないので，詳しく思い出さなくてもよい．

2.2 Lefschetz 数

$p \neq \ell$ を PEL データに関して不分岐な素数とする．すなわち，以下が成立するとする：

- $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の不分岐拡大上の行列環であり，$\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ はその極大整環である．
- $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ は $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ の自己双対的な $\mathbb{Z}_p$ 格子である．

このとき，p は $E/\mathbb{Q}$ において不分岐である．p の上にある E の素点 $\mathfrak{p}$ を固定し，$\mathcal{S}_{K^p}$ を $\mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$ 上の PEL モジュライ空間とする（K^p は $G(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群）．$\{\mathcal{S}_{K^p}\}$ は $\{\mathrm{Sh}_{K^pG(\mathbb{Z}_p)}\}$ の整正準モデルの $|\ker^1(\mathbb{Q}, G)|$ 個の直和であった（清水さんの講演を参照）．

定義 2.2

$j > 0$ を整数とし，$f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p)//K^p)$（両側 K^p 不変な $G(\mathbb{A}_f^p)$ 上の関数）とする．このとき，

$$T(j, f^p) = \sum_{x' \in \mathrm{Fix}(\Phi_\mathfrak{p}^j \circ f^p)} \mathrm{Tr}(\Phi_\mathfrak{p}^j \circ f^p; \mathcal{F}_x)$$

とおく（Lefschetz 数）．ただし，x は x' の $\mathcal{S}_{K^p}$ における像である．

定理 2.3（Kottwitz [Kot92]）

$$T(j, f^p) = |\ker^1(\mathbb{Q}, G)| \sum_{\substack{(\gamma_0;\gamma,\delta) \\ \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1}} c(\gamma_0; \gamma, \delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\phi_j) \operatorname{Tr} \xi(\gamma_0).$$

$\sum$ の中身は基本的に GL_2 のときと同様である．$c(\gamma_0; \gamma, \delta)$ はおおむね体積因子である (後述)．$O_\gamma(f^p)$, $TO_\delta(\phi_j)$ は軌道積分，捻られた軌道積分を表す．詳細は省略する．

$(\gamma_0; \gamma, \delta)$ は以下のような 3 つ組であり，Kottwitz triple と呼ばれる（以下 $(\gamma_0; \gamma, \delta) \in \mathrm{KT}$ と書く）．

- γ_0 は $G(\mathbb{Q})$ の半単純元で，$G(\mathbb{R})$ 内で楕円的[注 2]なもの．安定共役（$= G(\overline{\mathbb{Q}})$ 共役）なものを同一視する．
- γ は $G(\mathbb{A}_f^p)$ の元で γ_0 と安定共役なもの．$G(\mathbb{A}_f^p)$ 共役なものを同一視する．
- δ は $G(L_j)$ の元（L_j は $F_\mathfrak{p}$ の不分岐 j 次拡大）で $N\delta$ が γ_0 と安定共役なもの．ここで，$N\delta$ は $\delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{j[F_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_p]-1}(\delta)$ と共役な $G(\mathbb{Q}_p)$ の元である（σ は L_j 上の Frobenius 自己同型）．σ 共役なものを同一視する．

$\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta)$ は $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ から定まるある種の障害類であり，有限群 $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ 上の指標である．なお，$I_0 = Z_G(\gamma_0)$ であり，$\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ は $\pi_0((Z(\widehat{I_0})/Z(\widehat{G}))^{\Gamma_\mathbb{Q}}) \to H^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{G}))$ による $\ker^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{G}))$ の逆像である．本講演では $G = \mathrm{GSp}_{2n}$ の場合を考えるが，このとき $Z(\widehat{G})$ は連結かつ $\Gamma_\mathbb{Q}$ が自明に作用するので，$\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) = \pi_0(Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_\mathbb{Q}})$ となる．

$c(\gamma_0; \gamma, \delta) = \mathrm{vol}(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)) \cdot |\mathrm{Ker}(\ker^1(\mathbb{Q}, I_0) \to \ker^1(\mathbb{Q}, G))|$ である．ここで，I は I_0 の内部形式で $I \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{A}_f^p \cong I_0 \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{A}_f^p$ かつ $I(\mathbb{R})$ が中心を法としてコンパクトなもの．後に，$(\gamma_0, \gamma, \delta)$ に対応する構造付きアーベル多様体の自己同種写像の群となる．測度の正規化については省略．

GL_2 の場合の結果と定理 2.3 との違いは以下の 2 点である：

- 3 つ組 $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ が出てくる．これは一般の G において共役と安定共役が一致しないためである．
- 障害類 $\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta)$ が現れる．これはモジュライ問題における偏極の存在に由来する．

講演では，Siegel case ($G = \mathrm{GSp}_{2n}$) かつ $f^p = 1$ の場合に絞り，以下の 2 点を解説する．

[注 2] 中心を法としてコンパクトな極大トーラスに含まれることをいう．

- 偏極付き n 次元アーベル多様体 (A,λ) の同種類から Kottwitz triple を構成する方法.
- 障害類 $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ が現れる理由.

$\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ の正確な定義を与える時間はないので，興味のある方は [Kot90] をご覧いただきたい.

2.3 安定跡公式の利用

ここでは G が $\mathbb{Q}$ 上非等方的であると仮定する．このとき，Sh_K は E 上固有となる.

定理 2.3 を指標の直交関係に注目して書き直すと，$T(j,f^p)$ は次のようになる：

$$|\ker^1(\mathbb{Q},G)|\tau(G)\sum_{\gamma_0}\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})}\sum_{(\gamma,\delta)}\langle\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta),\kappa\rangle e(\gamma,\delta)O_\gamma(f^p)TO_\delta(\phi_j)\operatorname{Tr}\xi(\gamma_0)\operatorname{vol}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash I(\mathbb{R}))^{-1}.$$

$\tau(G)$ は G の玉河数，$e(\gamma,\delta)$ は Kottwitz 符号（詳細は略).

この式の (γ_0,κ) についての和を，G のエンドスコピー群についての和で書き換える．(γ_0,κ) が与えられると，以下の 2 つができる：

- エンドスコピー群 (H,s,η)．ここで H は $\mathbb{Q}$ 上準分裂的な連結簡約代数群であり，s は $Z(\widehat{H})$ の元．$\eta\colon\widehat{H}\xrightarrow{\cong}\widehat{G}_\kappa$ は s を κ にうつす同型（$\widehat{G}_\kappa$ は $Z_{\widehat{G}}(\kappa)$ の連結成分).
- γ と対応する $\gamma_H\in H(\mathbb{Q})$ の安定共役類．これは (G,H) 正則な楕円半単純元である.

この対応により，$\sum_{\gamma_0}\sum_\kappa=\sum_H\sum_{\gamma_H}$ という書き換えができる．さらに，基本補題 (fundamental lemma) および移送予想 (transfer conjecture) を用いると，$\sum_H\sum_{\gamma_H}$ の項は相対玉河数 $\iota(G,H)$ と

$$ST_e^*(h)=\sum_{\gamma_H}|(H_{\gamma_H}/H_{\gamma_H}^0)(\mathbb{Q})|^{-1}\tau(H)SO_{\gamma_H}(h)$$

の積になる．ここで，$SO_{\gamma_H}(h)=\sum_{\gamma\overset{\mathrm{st}}{\sim}\gamma_H}O_\gamma(h)$ は安定軌道積分を表す．また，$H(\mathbb{A})$ 上の関数 h は $h^ph_ph_\infty$ という積の形になっており，h^p, h_p はそれぞれ f^p, ϕ_j の移送である．h_∞ は適切な擬係数の和であるが，詳細は略.

$ST_e^*(h)$ は安定跡公式の幾何側の主要項である．安定跡公式を使うことで，これを H の保型表現の指標と結び付けることができる．さらに，H の保型表現と G の保型表現の指標関係 (endoscopic character relation) により，$T(j,f^p)$ を G の保型表現の指標を用いて書くことができる.

以上の議論と Lefschetz 跡公式から，

$$\operatorname{Tr}(\Phi_\mathfrak{p}^j\circ f^p;H^*(\mathrm{Sh}_\infty,\mathcal{F}))=|\ker^1(\mathbb{Q},G)|^{-1}T(j,f^p)=(G\text{ の保型表現の指標の式})$$

となり，$G(\mathbb{A}_f)\times\Gamma_E$ の表現 $H^*(\mathrm{Sh}_\infty,\mathcal{F})$ を調べることが可能になる.

予想 2.1 の証明のためには，特に無限素点においてさらに精密な分析を行う必要があるが，この講演で述べることはできない.

3 GL_n の保型表現に伴う Galois 表現の構成

F を総実体または CM 体とする [注 3]．素数 ℓ および同型 $\mathbb{C}\cong\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を固定する．本節では，以下の定理についての解説を行う.

定理 3.1（Harris-Taylor, Shin, Chenevier-Harris, Harris-Lan-Taylor-Thorne）
Π を正則 C 代数的な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現とする．このとき，Γ_F の n 次元半単純 ℓ 進表現 R_Π で Π と大域ラングランズ対応で対応するものが一意的に存在する.

[注 3] この両者を合わせて CM 体と呼ぶこともある．これらの代数体は，複素共役が well-defined であるという特徴を共有する.

注意 3.2
ここでの「大域ラングランズ対応で対応する」とは，ほとんど全ての不分岐素点における Frobenius 固有値と佐武パラメータが合致することを表す．伊藤さんの講演や [三枝] を参照．
一般の素点における，いわゆる局所大域整合性についても部分的な結果はあるが，ここでは述べない．

$n=2$ かつ F が総実体の場合，定理 3.1 は Hilbert モジュラー形式に対応する Galois 表現の存在を主張している．この場合（のほとんど）は，志村曲線のエタールコホモロジーを用いて構成ができる．
一方，$n \geq 3$ の場合は，GL_n（およびその内部形式）の志村多様体が存在しないため，同様の方針は使えない．以下の 2 つのステップで構成が行われる．
(CSD case) $\Pi^\vee \cong \Pi^c$（c は複素共役）の場合，ユニタリ志村多様体のエタールコホモロジーを用いる．
(general case) 保型形式の合同を用いて CSD case に帰着させる．
講演では F が CM 体の場合に限って構成を行い，必要に応じて F にさらなる仮定を課す．いわゆる Galois 表現の patching により，これらの仮定すべては最終的には不要となる．

3.1 CSD case

$m \geq 1$ を整数とする．V を F 上の m 次元ベクトル空間とし，Φ を V 上の Hermite 形式とする．G を (V,Φ) から定まるユニタリ群とする．これは $F^+ = F^{c=1}$ 上の代数群であり，$G \otimes_{F^+} F \cong \mathrm{GL}_m$ を満たす．
Arthur 予想が示唆するように，$G(\mathbb{A}_{F^+})$ の保型表現 π に対して $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $BC(\pi)$ を構成することができる（ベースチェンジリフト）．$BC(\pi)$ は自己共役双対的 (CSD) となる．さらに，G が全ての有限素点で準分裂的なときには，正則 C 代数的かつ CSD な $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 Π は $BC(\pi)$（π は $G(\mathbb{A}_{F^+})$ の尖点的保型表現）という形であることも分かる．
$\Pi = BC(\pi)$ ならば，G[注 4] に伴う志村多様体 Sh のエタールコホモロジーの π_f 部分をとることで Galois 表現を構成することができる．これが m 次元表現となるためには，$G(\mathbb{R})$ の符号が $(1,m-1)\times(0,m)\times\cdots\times(0,m)$ とならねばならない．
問題は，

- 全ての有限素点で準分裂的
- $G(\mathbb{R})$ の符号が $(1,m-1)\times(0,m)\times\cdots\times(0,m)$

となる G が存在するかどうかということである．m が奇数ならばこのようなユニタリ群は必ず存在することが証明できるが，m が偶数ならばそうではない．そこで，定理 3.1 中の整数 n の偶奇で場合分けを行う．

- n が奇数のとき，$m=n$ として上のような G を使う．
- n が偶数のとき，$m=n+1$ として上のような G を使う．

3.2 General case

ここでは気分を出すために $p=\ell$ とおく．
Π を定理 3.1 の通りとし，$\Pi^* = (\Pi^c)^\vee$ とする．$\Pi \boxplus \Pi^*$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ の自己双対的な保型表現であるが，尖点的ではないのでこれに定理 3.1 を用いることはできない．
アイデアは，$\Pi \boxplus \Pi^*$ に「p 進的に近い（合同な）」$\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現がたくさん存在することを証明し，それらに対応する Galois 表現を「貼り合わせて」$\Pi \boxplus \Pi^*$ に対応する Galois 表現を構成するというものである．この議論の正当化は，擬指標 (pseudo character) あるいは Chenevier の determinant という道具立てを用いて行われる．

[注 4] 正確にはユニタリ群ではなく unitary similitude 群を考える必要があるが，煩雑になるのでこれらを混同して説明を行う．

実際は GL_{2n} ではなくユニタリ群 $U(n,n)$ を用いて議論を行う．GL_n が $U(n,n)$ の Levi 部分群となることに注目すると，Π から $U(n,n)$ の保型表現 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_n}^{U(n,n)}\Pi$ が得られる（これを GL_{2n} に持ち上げると $\Pi \boxplus \Pi^*$ となる）．$\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_n}^{U(n,n)}\Pi$ に合同な $U(n,n)$ の尖点的保型表現を探すことが目標となる．これにはいくつかの方法が知られているが，いずれも $U(n,n)$ の志村多様体のコンパクト化の境界が GL_n の対称空間の数論的商（$n \geq 3$ のときこれは志村多様体ではない！）と関係することを用いる．講演では，Harris-Lan-Taylor-Thorne の方法と Scholze の方法についての概要を紹介する．

参考文献

[Kot90] R. E. Kottwitz, *Shimura varieties and λ-adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 161–209.

[Kot92] ———, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 373–444.

[三枝] 三枝洋一，GL(n) の局所ラングランズ対応，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2014.