レジュメ：志村多様体と K3 曲面：Tate 予想への応用

松本雄也

本講演に関するノート [松本 15]（講演より詳しい）を書きましたので，興味のある方はそちらもご参照ください.

講演アブストラクト

有限体上の滑らかな射影的代数多様体の Tate 予想とは，その多様体上のサイクルの存在に関する予想である．最近 Madapusi Pera [MP15] により，有限体上の任意の K3 曲面（ただし標数 2 を除く）について Tate 予想が成立することが，直交群の志村多様体の整モデルの構成の帰結として証明された.

本講演では，Tate 予想および K3 曲面について解説したのち，Madapusi Pera による証明を解説する.

レジュメ

1. **Tate 予想.**

定理 (アーベル多様体の Tate 予想)**.** k を有限生成体とし，A, B を k 上のアーベル多様体とする．$T_l(A) := \varprojlim_m A[l^m](\overline{k})$ を l 進 Tate 加群とする．このとき，自然な射 $\mathrm{Hom}_k(A,B) \otimes \mathbb{Z}_l \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_k}(T_l(A), T_l(B))$ は全単射である（少なくとも標数 $\neq 2$ では）．Γ_k は絶対ガロア群.

予想 (Tate 予想)**.** k を有限生成体とし，X を k 上の滑らかな射影的代数多様体とする．余次元 i のサイクルのなす加群を $Z^i(X)$ とおく．このとき，自然な射 $Z^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l \to H^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)(i)^{\Gamma_k}$ は全射である.

定理 ([MP15]，本講演の主定理)**.** 標数 ≥ 3 の有限生成体上の K3 曲面に対し Tate 予想が成り立つ.

2. **K3 曲面.** K3 曲面の <u>偏極</u> とは ample な線束の線形同値類（＝代数的同値類）．他の元の非自明な整数倍にならないとき原始的という.

M°_{2d} : 次数 $2d$ の原始的な偏極つき K3 曲面のモジュライ空間. ($\mathbb{Z}[1/2]$ 上で考える.)

<u>格子</u> (L, q) とは，有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群 L ＋対称双線形 $q\colon L \times L \to \mathbb{Z}$.

U : 双曲平面 : 階数 2，$e^2 = f^2 = 0$，$ef = 1$．符号 $(+1, -1)$.

$E_8(-1)$:E_8 ルート系の定める格子の q を -1 倍したもの．符号 $(+0, -8)$.

$L_{\mathrm{K3}} := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$: K3 曲面の H^2 はこの形．符号 $(+3, -19)$.

Date: 2015/08/11.

$L_{2d} := \langle e - df\rangle \oplus U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$：次数 $2d$ 偏極つき K3 曲面の PH^2 はこの形．符号 $(+2,-19)$.

3. $\mathrm{SO}(2,n)$ **の志村多様体，K3 曲面の周期写像.**

L：符号 $(+2,-n)$，$n \geq 1$，の格子.

$G_L := \mathrm{SO}(L_{\mathbb{Q}})$.

$X_L := \{$ 有向正定値 2 次元部分空間 $\subset L_{\mathbb{R}}\}$
$= \{\omega \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid \omega\cdot\omega = 0,\ \omega\cdot\bar{\omega} > 0\}$.

$\mathrm{Sh}(L) := \mathrm{Sh}(G_L, X_L)$：直交群の志村多様体．reflex 体は $\mathbb{Q}$.

$K_L := \{g \in \mathrm{SO}(L)(\hat{\mathbb{Z}}) \mid g \curvearrowright \check{L}/L \text{ trivial}\} \subset G_L(\mathbb{A}_f)$：コンパクト部分群．レベル．$\check{L} := \mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}) \supset L$.

$\mathrm{Sh}_{K_L}(L)(\mathbb{C}) = G_L(\mathbb{Q})\backslash(X_L \times G_L(\mathbb{A}_f)/K_L)$．$L$ が U を含むなら，strong approximation より $\mathrm{Sh}_{K_L}(L)(\mathbb{C}) \cong \Gamma_L\backslash X_L$．$L = L_{2d}$ ならば連結．ここで $\Gamma_L = \{g \in \mathrm{SO}(L)(\mathbb{Z}) \mid g \curvearrowright \check{L}/L \text{ trivial}\}$.

また，直交群 $\mathrm{SO}(L_{\mathbb{Q}})$ の代わりに Clifford 群 $\mathrm{GSpin}(L_{\mathbb{Q}})$（後述）についても同様の構成ができる．$\widetilde{\mathrm{Sh}}(L) = \mathrm{Sh}(\mathrm{GSpin}(L_{\mathbb{Q}}), X_L)$ と書く.

Kisin, Madapusi Pera [MP14]:$p > 2$ で，多くの L に対し $\mathrm{Sh}(L), \widetilde{\mathrm{Sh}}(L)$ の整正準モデル $\mathcal{S}(L), \widetilde{\mathcal{S}}(L)$ を構成（$L = L_{2d}$ の場合は OK）.

偏極つき K3 曲面の周期写像 $\iota_{\mathbb{C}}\colon \widetilde{M}^{\circ}_{2d,\mathbb{C}} \to \mathrm{Sh}(L_{2d})_{\mathbb{C}}$：大雑把にいうと，$(X,\xi)$ に対し「$H^{2,0} \subset PH^2((X,\xi),\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$」で $\Gamma_{L_{2d}}\backslash X_{L_{2d}}$ の点を定める．$\widetilde{M}^{\circ}_{2d} \to M^{\circ}_{2d}$ はとある 2 重被覆.

整正準モデルを用いて $\iota\colon \widetilde{M}_{2d,\mathbb{Z}[1/2]} \to \mathcal{S}(L)$ に伸ばす.

定理 (5.8)**.** この ι は étale.

$\mathbb{P}^2$：M°_{2d} 上のモチーフ（$\fallingdotseq l, \mathrm{dR}, \mathrm{B}$ の実現の集まり）．要するに K3 曲面の PH^2.

$\mathbb{L}$：$\mathrm{Sh}(L_{2d})$ 上のモチーフ．ι で引き戻すと $\mathbb{P}^2$ になる.

4. 久賀・佐武構成. $V = (V,q)$：（2 が可逆な可換環 R 上の）格子に対し，Clifford 代数 $C(V) := (\bigoplus_{m\geq 0} V^{\otimes m})/\langle v\otimes v - q(v) \mid v \in V\rangle$．記号 $\otimes$ は省略して書く.

Clifford 群 $\mathrm{GSpin}(V) := \{g \in C^+(V)^* \mid gVg^{-1} = V\}$．共役作用が射 $\mathrm{GSpin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$ を定める．R が体なら全射で核は $\mathbb{G}_m$．ここで $C^+(V)$ は偶数次部分.

久賀・佐武構成（$\mathbb{C}$ 上）：V を重さ 0 の Hodge 構造で，$h^{\pm1,\mp1} = 1$，$h^{0,0} = n$，他は 0，なるものとし，$-q\colon V\times V \to \mathbb{Z}$ が偏極だとする．例えば偏極つき K3 曲面の $PH^2((X,\xi),\mathbb{Z})(1)$．Hodge 構造を定める $\mathbb{S} \to \mathrm{SO}(V)$ が $\mathbb{S} \to \mathrm{GSpin}(V)$ に伸び，$\mathrm{GSpin}(V)$ の左作用により $C(V)$ に重さ 1 の偏極可能な Hodge 構造が定まる．対応するアーベル多様体 A^{KS} を V の（あるいは偏極つき K3 曲面の）久賀・佐武アーベル多様体という．構成より，Hodge 構造の埋め込み $V \subset \mathrm{End}\, H^1(A^{\mathrm{KS}},\mathbb{Z})$ がある.

志村多様体の整正準モデルを用いて，この $\mathbb{C}$ 上の構成を $\mathbb{Z}[1/2]$ 上まで拡張する．

A^{KS} の endomorphism は，その（l, crys の）実現 $\in \operatorname{End} H^1$ が PH^2 に入るとき special であるという．

定理 (5.17(4))**.** special endomorphism の空間 $L(A^{\mathrm{KS}})$ と $\langle \xi \rangle^{\perp} \subset \operatorname{Pic}(X)$ が同型になる．

5. special endomorphism の Tate 予想.

$\mathbb{L}: \mathcal{S}(L)$ 上の "モチーフ" : 各種（l, crys）実現の集まり．$\mathbb{V} := \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

$s \in \widetilde{\mathcal{S}}(L)(\overline{\mathbb{F}})$ とする．

定理 (6.4)**.** $L(A_s^{\mathrm{KS}}) \otimes \mathbb{Q}_l \to \varinjlim_m \mathbb{V}_{l,s}^{\mathrm{Fr}_m = 1}$ は同型．crys でも同様.

5.17(4) と 6.4 から，標数 ≥ 3 の有限体上の K3 曲面の Tate 予想が従い，有限生成体の場合もそこから簡単な議論で従う．

$I \subset \underline{\mathrm{Aut}}^{\circ}(A_s^{\mathrm{KS}})$: l, crys での実現が $\mathrm{GSpin}(\mathbb{V}_{?,s})$ に入る最大の閉部分代数群,

$I_l := \varinjlim_m (\text{commutant of } \mathrm{Fr}_m \text{ in } \mathrm{GSpin}(\mathbb{V}_{l,s}))$，とおくと，6.4 の証明は次に帰着される．

定理 (6.10 : 久賀・佐武アーベル多様体の special endomorphism の Tate 予想)**.** これこれの条件を満たす l（存在する）に対し，$I_{\mathbb{Q}_l} \to I_l$ は同型.

参考文献

[MP14] Keerthi Madapusi Pera, *Integral canonical models for spin Shimura varieties* (2014), available at `http://arxiv.org/abs/1212.1243v5`.

[MP15] ———, *The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic*, Invent. Math. **201** (2015), no. 2, 625–668.

[松本 15] 松本 雄也, ノート : 志村多様体と *K3* 曲面 : *Tate* 予想への応用 (2015), available at `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~ymatsu/k3tate_notes.pdf`.

東京大学大学院数理科学研究科

E-mail address: `ymatsu@ms.u-tokyo.ac.jp`