Siegel モジュラー多様体

越川　皓永（シカゴ大学）

2015 年 8 月 13 日

概要

Siegel モジュラー多様体を算術商として導入し、主偏極アーベル多様体のモジュライ空間として理解できることを説明します。これはモジュラー曲線の自然な高次元な類似であり、志村多様体の中でも特に重要なものです。また、志村・谷山の虚数乗法論の帰結についても紹介します。

1　記号

g: 正の整数, I_g: g 次単位行列, $M_g(R)$: 環 R 係数（成分が R の元）の g 次正方行列全体の集合.
$\mathrm{GL}_{2g}(R)$: R 係数の $2g$ 次可逆行列全体.

Siegel 上半空間, 下半空間, および双空間:

$$\mathfrak{H}_g^+ = \bigl\{ \tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid \tau\text{: 対称, 虚部が正定値} \bigr\}, \quad \mathfrak{H}_g^- = -\mathfrak{H}_g^+, \quad \mathfrak{H}_g^\pm = \mathfrak{H}_g^+ \sqcup \mathfrak{H}_g^-.$$

$\mathrm{Sp}_{2g}(R)$: R 係数の斜交群. すなわち,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Sp}_{2g}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2g}(R) \;\middle|\; {}^t\!\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = J \right\}.$$

ここで t は転置行列を表す. $\mathbb{Z}^{2g}$ 上の双線形形式を $\bigl(\langle e_i, e_j \rangle\bigr)_{1\le i,j\le 2g} = J$ で定めると, Sp_{2g} は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を保つ行列全体のなす群.

一般斜交群: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定数倍のずれを許して保つ;

$$\mathrm{GSp}_{2g}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2g}(R) \;\middle|\; R^\times \text{ の元 } \nu \text{ が唯一つ存在し } {}^t\!\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \nu \cdot J \right\}.$$

$\nu\colon \mathrm{GSp}_{2g} \to \mathbb{G}_m$ は代数群の射として全射で, 核は Sp_{2g}.

$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}_g^+$ に推移的に左から作用:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}.$$

同様にして, $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}_g^\pm$ に推移的に左から作用.

主合同部分群: $K_N = \mathrm{Ker}\bigl(\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\bigr)$.

環 R に対し, $\mathcal{A}_g(R)$: アフィンスキーム $\operatorname{Spec} R$ 上の主偏極付相対 g 次元アーベルスキームの同型類全体の集合.

$\mathbb{Q}$ の有限アデールの環 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$ を単に $\mathbb{A}_f$ と書く. 代数閉体 k 上のアーベル多様体 A に対し, $T_f A = \varprojlim A[N](k)$, $V_f A = T_f A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$: $\mathbb{A}_f$ 係数の Tate 加群.

以下では, 実質的に k は $\mathbb{C}$ か $\bar{\mathbb{Q}}$ ($\mathbb{Q}$ の $\mathbb{C}$ での代数閉包).

2 モジュライ解釈 1

命題 1 $\mathfrak{H}_g^+$ の各点は $(\mathbb{Z}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上の重さ -1(あるいは 1) の主偏極付 Hodge 構造と対応する.

次はいわゆる Riemann の定理.

定理 2 周期写像は全単射 $\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ を導く.

定義 3（粗モジュライ） F を環の圏から集合の圏への関手とする. スキーム S と F から S への関手としての射の組が, そのような組のうち普遍的 (そのような組のなす圏で始対象) であり, かつ写像 $F(k) \to S(k)$ が任意の代数閉体 k に対し全単射であるとき, S を F の粗モジュライスキームという.

事実 4 $\mathcal{A}_g$ は粗モジュライスキームを持つ. 特に, $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ は代数多様体の構造を持つ.

Mumford が GIT を用いて最初に示した. $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ が代数多様体になることはそれ以前にも知られていた.

$\mathcal{A}_g$ や $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ を **Siegel モジュラー多様体**と呼ぶ.

3 アデールを用いた記述と一般斜交群への移行

命題 5 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{A}_f) = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})\,\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$.

これは強近似定理の非常に特別な場合とみなせる. 斜交群に対して強近似定理を最初に示したのは志村と思われる.

系 6 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+ \cong \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})\backslash\big(\mathfrak{H}_g^+ \times \big(\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})\big)\big)$.

$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})$ の作用は対角的.

ν の（強い意味での）全射性, $\nu^{-1}(\mathbb{R}_{>0}^\times) = \mathbb{R}^\times\,\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$(右辺の $\mathbb{R}^\times$ は対角行列とみなす) と $\mathbb{A}_f^\times = \mathbb{Q}_{>0}^\times \cdot \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ などを用いると, 次が得られる.

系 7 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+ \cong \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})\backslash\big(\mathfrak{H}_g^\pm \times \big(\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})\big)\big)$.

4　モジュライ解釈 2

A を標数 0 の代数閉体 k 上のアーベル多様体とする.

$\mathbb{Q}$ 係数の偏極: $\mathrm{Hom}(A, \widehat{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元 λ で, 偏極の正の有理数倍となるもの. e_λ を対応する $V_f A$ 上の (Tate 捻り $\mathbb{A}_f(1)$ に値を持つ）双線形形式とする.

レベル構造: K を $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群としたとき, K の右作用に関する同型 η: $(\mathbb{A}_f^{2g}, \mathbb{A}_f, \mathbb{A}_f^\times \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle) \xrightarrow{\cong} (V_f A, \mathbb{A}_f(1), \mathbb{A}_f^\times \cdot e_\lambda)$ の軌道 ηK (同型の両辺の 3 つ組の真ん中は双線形形式の値域).

3 つ組 $(A, \lambda, \eta K)$ 全体のなす集合に同種射により同値関係が入る. $\mathcal{A}_{g,K}(k)$ を k 上の同値類全体のなす集合とする.

命題 8　$\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}) \backslash \big(\mathfrak{H}_g^{\pm} \times \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/K \big)$

$\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \cong \mathcal{A}_{g, \mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})}(\mathbb{C})$ で, 上の同型はモジュライ解釈 1 で述べた同型と整合的である.

$\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ は一般に連結でないことに注意. 各連結成分は, $\Gamma \backslash \mathfrak{H}_g^+$ の形.

一般の $\mathbb{Q}$ 代数 R に対しても $\mathcal{A}_{g,K}(R)$ を適切に定義すると (大雑把には上の状況に Galois 群の作用が追加されて, それにより不変な ηK を考えればよい), 次が成立する:

事実 9　$\mathcal{A}_{g,K}$ は $\mathbb{Q}$ 上粗モジュライスキームを持つ.

定義 10（精モジュライ）　関手 F がスキーム S で表現される時, S を F の精モジュライスキームという.

K_N に対しては, 主偏極付アーベル多様体 A を用いれば, レベル構造は $A[N]$ を用いて書ける. すなわち, 同型 $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle) \xrightarrow{\cong} (A[N](k), \mu_N(k), (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cdot e_\lambda)$.

事実 11　N が 3 以上の時, $\mathcal{A}_{g,K_N}$ は $\mathbb{Q}$ 上精モジュライスキームを持つ.

5　虚数乗法論の帰結

絶対 Galois 群 $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ が $\mathcal{A}_{g,K}(\bar{\mathbb{Q}}) (\subset \mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C}))$ に作用している. このうち, 虚数乗法を持つ部分について絶対 Galois 群の作用を記述する.

定義 12（CM 型）　L を CM 体の有限直積とする. このとき, L には複素共役が定まっている. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(L, \bar{\mathbb{Q}})$ の部分集合 Φ とその複素共役 $\bar{\Phi}$ が $\Phi \sqcup \bar{\Phi} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(L, \bar{\mathbb{Q}})$ を満たすとき, (L, Φ) を CM 型という.

(L, Φ) を $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2g$ となる CM 型とする. $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \bar{\mathbb{Q}})$ に左から作用している.

定義 13（reflex 体）　(L, Φ) の reflex 体 E を, $\bar{\mathbb{Q}}$ の部分体であって, $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ に対し, $\sigma \in \Gamma_E =$

$\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$ が $\sigma\Phi = \Phi$ と同値になるものとして定義する.

reflex 体は CM 体である.

$(A, i\colon L \to \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ を CM 型が (L, Φ) の $\bar{\mathbb{Q}}$ 上の CM アーベル多様体とする. つまり, $\mathrm{Lie}\, A$ が $L \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$ 加群として, $\bigoplus_\Phi \bar{\mathbb{Q}}$ に同型. Φ の元は, 射影 $L \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}$ に対応し, 直和の各成分にはこれらの射影を経由して作用している. また, この $L \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$ 加群はある $L \otimes_{\mathbb{Q}} E$ 加群 t_Φ の係数拡大であることが分かる.

以下では $\mathbb{Q}$ 係数の偏極 $\lambda \in \mathrm{Hom}(A, \widehat{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は L 線形であるとする.

命題 14 $\sigma \in \Gamma_E$ に対し, (A, i) と $({}^\sigma A, {}^\sigma i)$ の間に虚数乗法（および偏極）と整合的な同種射 $\varphi_\sigma\colon {}^\sigma A \to A$ が, $L^\times$ による作用を除いて一意に存在する.

$\mathbb{A}_{L,f} = \mathbb{A}_f \otimes_{\mathbb{Q}} L$ として, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{A}_{L,f}}(V_f A) = \mathbb{A}_{L,f}^\times$ であることに注意する.

系 15 連続準同型 $\Gamma_E \to L^\times \backslash \mathbb{A}_{L,f}^\times; \sigma \mapsto [\varphi_\sigma \circ \sigma]$ が導かれる. 更に, この写像は Γ_E^{ab} を経由する.

$\mathrm{Art}_E\colon \mathbb{A}_{E,f}^\times = (\mathbb{A}_f \otimes_{\mathbb{Q}} E)^\times \to \Gamma_E^{\mathrm{ab}}$ を Artin 相互写像とする. ここでは幾何的 Frobenius 元の持ち上げが素元と対応するようにする. 上の準同型と Art_E との合成を考える.

$N_\Phi\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E \mathbb{G}_m \to \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^L \mathbb{G}_m$: reflex ノルムとする. ここで Res は Weil 制限. これは $L \otimes_{\mathbb{Q}} E$ 加群 t_Φ を用いれば定まる. 例えば, t_Φ は L 加群として自由であり, E の作用の行列式を取ることで $E^\times \to L^\times$ が定まる. 同様にして, $\mathbb{A}_{E,f}^\times \to \mathbb{A}_{L,f}^\times$ も定まる.

事実 16（志村-谷山） 合成写像 $\mathbb{A}_{E,f}^\times \to \Gamma_E^{\mathrm{ab}} \to L^\times \backslash \mathbb{A}_{L,f}^\times$ による $s \in \mathbb{A}_{E,f}^\times$ の像は, $N_\Phi(s)$ の類と一致する.

$\sigma \in \Gamma_E$ に対し, Γ_E^{ab} での像の $\mathbb{A}_{E,f}^\times$ への持ち上げ s を選ぶ. （s の取り方に依存する）剰余類 $N_\Phi(s)\eta K$ が定まることが示せる. すると, $[(A, \lambda, N_\Phi(s)\eta K)] \in \mathcal{A}_{g,K}(\bar{\mathbb{Q}})$ が s の取り方に依らずに定まる.

系 17 $\sigma \cdot [(A, \lambda, \eta K)] = [(A, \lambda, N_\Phi(s)\eta K)]$.

この等式は, 志村多様体の reflex 体上のよいモデル（正準モデルと呼ばれる）が満たすべき条件として解釈される.