Abel 多様体の基礎

石塚裕大　（京都大学）

2015 年 8 月 17 日

概要

Abel 多様体の基礎的な事項を具体例に基づいて解説する。とりわけ講義では触れられない部分や複雑な定義などはこちらに書いてある。また Hodge 構造周辺の §2 には演習問題も含めてある。

後半には Abel スキームについても必要な事項だけをまとめておく。なお講演とは微妙に順番が異なることがあるので、参照の際には注意されたい。

1　Abel 多様体の定義と基本的な性質 ([Mum70],[Mil86] など)

以下では Abel 多様体の基本的な性質を復習していく。群多様体についての知識は付録を参照のこと。

1.1　Abel 多様体の定義と可換性

定義 1　体 k 上の **Abel 多様体 (Abelian variety)** とは、体 k 上で定義された、幾何的に連結で、固有かつ滑らかな群多様体のことを指す。

例 2（楕円曲線の例）　k 上で有理点をもつ滑らかな平面 3 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ は 1 次元の Abel 多様体の例を与える。1 次元の Abel 多様体は**楕円曲線 (elliptic curve)** と呼ばれる。楕円曲線はすべて平面 3 次曲線としての表示を持つ。詳細は [Sil09] 参照。

例 3（**Jacobi** 多様体）　k 上で定義され、k-有理点を持つ滑らかな曲線から、標準的に **Jacobi 多様体 (Jacobian variety)** と呼ばれる Abel 多様体を付随させることができる。この Abel 多様体は C 上の次数 0 の直線束をパラメータ付けすることで特徴づけられ、C の種数と同じ次元を持ち、k 上で定義される。詳細は [Mil86Jac] 参照。

準同型と平行移動は群スキームの場合と同様に定められる (付録参照)。Abel 多様体の特殊な性質として、次が挙げられる。

命題 4　Abel 多様体 A, B の間の多様体としての射 $f\colon A \to B$ は、準同型と平行移動の合成 $t_{f(0_A)} \circ g$ として表される。

特に、原点を原点に送る射は自動的に準同型である。これから直ちに得られる帰結として、次の重要な性質がある[*1]。

[*1] **剛性補題 (rigidity lemma)** の結果である。類似の補題は群スキームの場合でも成立し、そこから可換性が出る。

系 5　Abel 多様体は可換である。

この系は、逆元を取る写像が群準同型であることから従う。以下では群演算を $+$ や $-$ で表すことにする。

1.2　同種写像

準同型の中でも、今後中心的な役割を果たすものが同種写像である。下準備として、核と像について性質を挙げておく。

補題 6（核と像）　Abel 多様体 A, B の間の準同型 $f\colon A \to B$ について、

- f の (スキーム論的) 像は Abel 多様体である。
- f の核の単位元を含む連結成分は Abel 多様体である。

定義 7　Abel 多様体の間の準同型で、全射、かつ核が ($\mathrm{Spec}(k)$ 上のスキームとして) 有限なものを**同種写像 (isogeny)** という。また同種写像 $f\colon A \to B$ について、$\mathrm{Ker}(f)$ の (スキームとしての) 位数を f **の次数 (degree)** と呼び、$\deg(f)$ で表す。

同種写像がある Abel 多様体は同じ次元を持つことに注意する。以下に重要な同種写像の例を挙げておく。

例 8　Abel 多様体は可換である (系 5) ので、正整数 n について同じ元を n 回足す写像

$$[n]_A\colon A \longrightarrow A \quad ; \quad a \mapsto a + a + \cdots + a$$

は群準同型である。さらに

$$\begin{aligned} [0]_A\colon A \longrightarrow A \quad &; \quad a \mapsto 0_A, \\ [-1]_A\colon A \longrightarrow A \quad &; \quad a \mapsto -a, \\ [-n]_A\colon A \longrightarrow A \quad &; \quad a \mapsto -[n]_A(a) \end{aligned}$$

で定めておく。

命題 9　体 k の標数を p とする。A を k 上の Abel 多様体、g を A の次元とし、$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を正整数とする。この時次が成立する。

- $[n]_A$ は同種写像で、$\deg[n]_A = n^{2g}$ である。また n が標数 p と素なら $[n]_A$ はエタール射である。
- B を別の k 上の Abel 多様体、$f\colon A \to B$ を次数が n の同種写像とすると、逆方向の同種写像 $g\colon B \to A$ で次を満たすものが存在する:
$$g \circ f = [n]_A, \quad f \circ g = [n]_B.$$

二つの Abel 多様体 A, B の間に同種写像 $f\colon A \to B$ が存在するとき、A, B は**同種 (isogeneous)** であると呼ぶ。同種性は明らかに反射律、推移律を満たし、また上の命題 9 の最後の主張から対称律を満たすことがわかる。したがって、

系 10　同種性は Abel 多様体の間に同値関係を定める。

さて、Abel 多様体 A, B 間の準同型のなす Abel 群を $\mathrm{Hom}(A, B)$ と表し[*2]、

$$\mathrm{Hom}_0(A, B) := \mathrm{Hom}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \mathrm{End}_0(A) := \mathrm{Hom}_0(A, A)$$

で定めると[*3]、同種写像 $f\colon A \to B$ はこの $\mathrm{Hom}_0(B, A)$ に逆射をもつ射であるということと同値である。ここから $\mathrm{Hom}_0(A, B)$ で逆射を持つ元を **$\mathbb{Q}$-同種 ($\mathbb{Q}$-isogeny)** と呼ぶ。また、次の重要な定理が知られている:

定理 11（Poincaré の完全可約性定理 (Poincaré's complete reducibility theorem); cf. [Mum70, 19. Theorem 4](*k* が閉体の場合)） 体 k 上の Abel 多様体 A とその部分 Abel 多様体 B について、ある A の部分 Abel 多様体 C が存在し、A は $B \times C$ と同種である。

これから Abel 多様体は部分 Abel 多様体を持たない**単純 (simple)** な Abel 多様体の積と同種である。(絶対) 単純な Abel 多様体などの話題に進むことができるが、今回は次の定理を述べるにとどめておく (津嶋氏の講演を参照)。

系 12 体 k 上の Abel 多様体 A について、$\mathrm{End}_0(A)$ は半単純な $\mathbb{Q}$-代数である。

後々のために、ここで一つ記号を導入しておく。

定義 13 正整数 n について、同種写像 $[n]_A$ の核を $A[n]$ と表す。命題 9 より、これは次数 n^{2g} の有限群スキームである。

2 複素数体上の Abel 多様体と複素トーラス ([Ros86, BL09] など)

2.1 複素トーラス

まず有限次元実ベクトル空間 $V \cong \mathbb{R}^d$ の **$\mathbb{Z}$-格子 (lattice)** とは、離散部分群 Λ で商 V/Λ がコンパクトになるもののことを指すとしよう[*4]。これから必然的に $\Lambda \cong \mathbb{Z}^d$ である。V が有限次元複素ベクトル空間の場合は、V を複素構造付きの実ベクトル空間だと思ったときの $\mathbb{Z}$-格子だとする。このとき、複素ベクトル空間 $V \cong \mathbb{C}^g$ をその中の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda \subset V$ で割った V/Λ は、コンパクトで連結な複素 Lie 群の構造を持っている。

定義 14 **複素トーラス (complex torus)** X とは、上のようにして作ったコンパクトで連結な複素 Lie 群 V/Λ と同型な複素 Lie 群と定める。

より簡潔な言い換えとして次の定理がある。

定理 15（[Mum70, §1]） コンパクトで連結な複素 Lie 群は複素トーラスである。

特に $\mathbb{C}$ 上定義された Abel 多様体の $\mathbb{C}$-値点は複素トーラスに同型である。

さらにいくつかの性質をまとめておく。$X = V/\Lambda$ を複素トーラスとすると、自然な全射 $\pi_X\colon V \to X$ がある。原点 $0 \in V$ の X における像を 0_X と書く。さらに 0_X での X の接空間 $T_{0_X}X$ を $\mathrm{Lie}X$ と書く。通常の

[*2] この予稿では使わないが、k 上で定義されていることを強調して $\mathrm{Hom}_k(A, B)$ と表すことが多い。cf. 津嶋氏の講演。

[*3] $\mathrm{End}^0(A), \mathrm{End}^\circ(A), \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ などの書き方もある。津嶋氏の講演では $\mathrm{End}_{M(k)}(A)$ を用いる。

[*4] 分野や文献によっては商がコンパクトである条件を外していることがある。一方、曲面論などの分野では二次形式をデータとして付加したものに対象を絞っている場合がある。また束 (lattice) とも別語である。

複素 Lie 群と同様に Lie$X$ には複素 Lie 環の構造が入るが、今の場合、可換なので Bracket 積は自明な準同型である。

補題 16　上の設定の下で、自然な同型 Lie$X \to V$ があり、π_X とこの同型の合成は指数写像 $\exp\colon \mathrm{Lie}X \to X$ に一致する。

以降 Lie$X$ と V を同一視する。
π_X は X の普遍被覆を与えており、したがって

$$\pi_1(X, 0_X) \cong \Lambda \tag{1}$$

である。Λ は可換であるから結局

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \Lambda, \quad H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z}) \tag{2}$$

である。
g 次元複素トーラスは実 Lie 群として $\mathrm{U}(1)^{2g}$ に同型である (**演習問題 2.2**)。$U(1)$ は円周 S^1 に同型であるから、結局 Künneth の公式より、正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について

$$H^n(X, \mathbb{Z}) \cong \bigwedge^n \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z}) \tag{3}$$

が従う。右辺は Λ の、$\mathbb{Z}$-値 n 変数交代形式の空間に一致することに注意されたい。

2.2　直線束、Riemann 形式、偏極

Pic(X) を複素トーラス X 上の直線束の同型類のなす集合とする。これは積が直線束のテンソル、0 元が自明束であるような群構造を持ち、群構造を含めて標準的に $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ に同型である。以降この二つの群を自然に同一視する。
いま層の短完全列

$$0 \longrightarrow 2\pi i\,\mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 1 \tag{4}$$

から、次のような対象が定まる:

定義 17　記号や状況は上に基づく。

- 自然な同型と連結準同型の合成
$$c_1\colon \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_X)$$
の合成を c_1 と書き、直線束 $\mathcal{L}$ についてその像 $c_1(\mathcal{L})$ を $\mathcal{L}$ の**第一 Chern 類 (first Chern class)** と呼ぶ。
- c_1 の像のことを X の **Néron-Severi 群 (Néron-Severi group)** といい、NS(X) で表す。

$c_1(\mathcal{L})$ に対応する Λ 上の交代形式を $E_{\mathcal{L}}$ と書くことにする。さらに、次が成立する。

命題 18　c_1 の核、あるいは (4) から誘導される長完全列における

$$H^1(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

の余核は複素トーラスの構造を持つ。

実際、前 (2) でみたように

$$H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$$

であるし、また少々の調査によって

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$$

が示される ($\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}$ は $\mathbb{C}$-反線形写像を指す。詳しくは [BL09, 2.4] 参照)。

定義 19　命題 18 で現れる複素トーラスを X の**双対トーラス (dual torus)** といい、$\widehat{X}$ で書き表す。

複素トーラスの間の準同型 $f\colon X \to Y$ が与えられると、同時に直線束の引き戻しによって ${}^t f\colon \widehat{Y} \to \widehat{X}$ が得られることに注意しておく。

複素トーラス X の直線束 $\mathcal{L}$ を選ぶごとに、双対トーラス $\widehat{X}$ への準同型

$$\phi_{\mathcal{L}}\colon X \longrightarrow \widehat{X} \quad x \mapsto t_x^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

が定まる[*5]。これは $\mathcal{L}$ の第一 Chern 類 $c_1(\mathcal{L}) \in \mathrm{NS}(X)$ にのみ依存することがわかる。

複素トーラスについての同種写像は Abel 多様体と同様、全射で核が有限な準同型のこととする。次が本節のメインである。

命題 20　複素トーラス X について、次が成立する。

- 直線束 $\mathcal{L}$ が豊富なら $\phi_{\mathcal{L}}$ は同種写像になる。
- 豊富直線束が存在することと、複素トーラス X が Abel 多様体の構造を持つことは同値である。

後者の証明には Riemann 形式や theta 関数を用いて良い因子を作り、その因子を用いて埋め込みを構成するという手法である。概説は [Ros86, §3]、詳説は [BL09, §1〜§4] を見よ。

定義 21（偏極と主偏極）

- 複素 Abel 多様体 A について、豊富直線束 $\mathcal{L}$ から定まる同種写像 $\phi_{\mathcal{L}}\colon A \to \widehat{A}$ を A の**偏極 (polarization)** と呼ぶ。
- $\mathrm{Hom}_0(X, Y)$ のなかである偏極 $\phi_{\mathcal{L}}$ の正の有理数倍になっている元を **$\mathbb{Q}$-偏極 ($\mathbb{Q}$-polarization)** という。
- 偏極との組 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ を**偏極付き Abel 多様体 (polarized Abelian variety)** と呼ぶ。
- 同型である偏極を**主偏極 (principal polarization)** と呼び、主偏極との組 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ を**主偏極付き Abel 多様体 (principally polarized Abelian variety, p.p.AV)** と呼ぶ。

偏極に該当するデータを $\mathbb{Z}$-格子 Λ の言葉で言い換えることができる。これは次小節、特に例 32 参照のこと。具体例は次小節の最後に譲る。

今まで考えてきた対象の圏論的な整備をしておく。

定義 22　以下のようにして四つの圏を定義する。

複素トーラスの圏 (CTor)

　　対象:　複素トーラス、

[*5] 準同型になることは**正方形定理 (Theorem of Square)** の帰結である。

X から Y への射: X から Y への複素トーラスとしての準同型。

複素トーラスの同種圏 (ICTor)

対象: 複素トーラス、

X **から** Y **への射**: $\mathrm{Hom}_0(X, Y)$。

偏極付き Abel 多様体の圏 (PAV)

対象: 偏極付き Abel 多様体、

$(A, \phi_{\mathcal{L}})$ **から** $(B, \phi_{\mathcal{M}})$ **への射**: Abel 多様体の射 $f\colon A \to B$ であって、${}^t f \circ \phi_{\mathcal{M}} \circ f = \phi_{\mathcal{L}}$ を満たすもの。

偏極付き Abel 多様体の同種圏 (IPAV)

対象: 偏極付き Abel 多様体、

$(A, \phi_{\mathcal{L}})$ **から** $(B, \phi_{\mathcal{M}})$ **への射**: $f \in \mathrm{Hom}_0(A, B)$ であって、${}^t f \circ \phi_{\mathcal{M}} \circ f = \phi_{\mathcal{L}}$ を満たすもの。

これらの性質は以下のようにまとめられる。

- (CTor) は準同型の核が非連結になるなどして Abel 圏にならない。
- (ICTor) は Abel 圏になる。
- (PAV) は Abel 圏でない。
- (IPAV) は半単純 Abel 圏になる。

2.3 Hodge 構造と複素トーラス

先ほども述べたように、偏極は複素トーラスの Lie 環 $\mathrm{Lie}X = V$ やその $\mathbb{Z}$-格子 Λ の言葉で言い換えることができる。それを見るために、Hodge 構造の言葉を導入し、段階的にデータの同値性を見ていくことにする (cf. [Del71b], 阿部氏の講演)。

定義 23（Hodge 構造） 整数 n について、重さ n の **(純)(整)Hodge 構造 ((pure) (integral) Hodge structure)** とは、次の二つのデータ $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n})$ のことである。

- $H_{\mathbb{Z}}$: 有限生成 Abel 群。
- $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ の $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての直和分解 $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$ で、$\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$ を満たすもの。

また上の定義で $H_{\mathbb{Z}}$ を有限次元 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $H_{\mathbb{Q}}$ と取り替えたものを重さ n の **(純)$\mathbb{Q}$-Hodge 構造 ((pure) $\mathbb{Q}$-Hodge structure)** と呼ぶ。

注 24 **Deligne トーラス (Deligne torus)** $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ を用いた同値な言い換えがある (cf. [Del71b, §2.1], 阿部氏、梅崎氏の講演)。

注 25 重さ -1 の Hodge 構造で $(H_{\mathbb{Z}}, H^{-1,0}, H^{0,-1})$ というものを考えることは、実ベクトル空間 $V = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \cong H^{-1,0}$ に整構造 $H_{\mathbb{Z}}$ と複素構造 $J\colon V \to V$ を入れることに同値である。実際、$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ のうち、$H^{-1,0}$ は $J \otimes 1$ が $\sqrt{-1}$ 倍で作用する部分、$H^{0,-1}$ は $J \otimes 1$ が $-\sqrt{-1}$ 倍で作用する部分と考えられる。

双対的に、重さ 1 の Hodge 構造で $(H_{\mathbb{Z}}, H^{1,0}, H^{0,1})$ という形のものを考えるときもまったく同様の理解ができる。このことは上述した Deligne トーラスの作用による Hodge 構造の言いかえを使うと理解しやすいかもしれない。

例 26（Tate ひねり） 次のように置く:

- $H_{\mathbb{Z}} = (2\pi i)^n\mathbb{Z}$.
- $H^{-n,-n} = H_{\mathbb{C}}$.

この組は重み $-2n$ の Hodge 構造を与える。これを簡単に $\mathbb{Z}(n)$ と書き、**Tate ひねり (Tate twist)** という。

例 27 複素トーラス X について、そのコホモロジーには **Hodge 分解 (Hodge decomposition)** がある。今必要な場所にだけ述べておくと、

$$H^1(X,\mathbb{C}) = H^1(X,\mathcal{O}_X) \oplus H^0(X,\Omega_X)$$

である。これから次のような重さ 1 の Hodge 構造が定まる:

- $H_{\mathbb{Z}} = H^1(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Lambda,\mathbb{Z})$.
- $H^{1,0} = H^0(X,\Omega_X)$, $H^{0,1} = H^1(X,\mathcal{O}_X)$.

しかし X にこの Hodge 構造を対応させるのは反変的な函手になる。これを共変的にするには次のようにおけばよい:

- $H_{\mathbb{Z}} = H_1(X,\mathbb{Z}) = \Lambda$.
- $H^{-1,0} = (H^{1,0})^* \cong V$, $H^{0,-1} = (H^{0,1})^* \cong \overline{V}$.

ただし $(\cdot)^*$ は複素ベクトル空間の双対を表す。また $\overline{V}$ は $\alpha \in \mathbb{C}$ によるスカラー倍を V における $\overline{\alpha}$ 倍で定義した複素ベクトル空間であり、標準的に

$$V \oplus \overline{V} \cong V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

である (☡ $V = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ に注意せよ; 注 25 も参照)。この Hodge 構造は重さ -1 である。

逆に重さ -1 で、$H^{-1,0}, H^{0,-1}$ 以外は 0 であるような Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=-1})$ が与えられたとする。$\mathrm{pr}_{-1,0}\colon H_{\mathbb{C}} \to H^{-1,0}$ を標準的な射影としたとき、

$$X := H^{-1,0}/\mathrm{pr}_{-1,0}(H_{\mathbb{Z}})$$

は複素トーラスになる。これらの構成は互いに擬逆になっており、結果として次の定理が言える:

定理 28 上の二つの構成は函手的であり、圏同値

$$(\mathrm{CTor}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{重さ } -1 \text{ の} \\ \text{Hodge 構造} \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad (\mathrm{ICTor}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{重さ } -1 \text{ の} \\ \mathbb{Q}\text{-Hodge 構造} \end{pmatrix}$$

を導く。

定義 29（偏極付き Hodge 構造） 重さ n の Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n})$ について、**偏極 (polarization)** とは次のような双線形写像 $Q\colon H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ のこと: $Q_{\mathbb{C}}$ を Q の $H_{\mathbb{C}}$ への $\mathbb{C}$-双線形な延長としたとき、

1. $Q_{\mathbb{C}}(\phi,\psi) = (-1)^n Q_{\mathbb{C}}(\psi,\phi)$.

2. $\phi \in H^{p,q}$ について $Q_{\mathbb{C}}(\phi, \psi) \neq 0$ なら $\psi \in H^{q,p}$.
3. 同じく $\phi \in H^{p,q}$ について $i^{p-q} Q_{\mathbb{C}}(\phi, \overline{\phi}) > 0$.

また $\mathbb{Q}$-Hodge 構造にも同様に偏極を定義することができる。

注 30 偏極の定義を、適切な定義を満たす双線形写像 $Q\colon H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}(-n)$ としたほうが整合的である (cf. [Del71b, §2.1], 阿部氏の講演)。

例 31 Tate ひねりには、$Q((2\pi i)^n, (2\pi i)^n) = 1$ とおいて線形に延長することで、偏極を入れることができる。

例 32 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ を偏極付きの複素 Abel 多様体とする。

$\phi_{\mathcal{L}}$ を与える豊富直線束 $\mathcal{L}$ を自由にとって、それに対応する交代形式 $E_{\mathcal{L}}$ を考える (これは $\mathcal{L}$ のとり方によらない)。$E_{\mathcal{L}}\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ は A に対応する重さ -1 の Hodge 構造に偏極を与えていることが確かめられる。

実際 $E_{\mathcal{L}}$ を $V = \Lambda \otimes \mathbb{R}$ に実線形に拡張したものを E と書くと、E は以下の一連の **Riemann の関係式 (Riemann relation)** と呼ばれる性質を満たす:

補題 33（Riemann の関係式*6） $u, v \in V$ とし、V の複素構造を J として、

1. E は Λ 上整数値である。
2. $E(u, v) = -E(v, u)$. つまり交代的である。
3. $E(Ju, Jv) = E(u, v)$.
4. $E(Ju, v)$ は正定値対称形式である。

さて、複素トーラス $A(\mathbb{C})$ から例 27 のようにして重さ -1 の Hodge 構造 $(\Lambda, V, \overline{V})$ が定まった。これらの性質は、$E_{\mathcal{L}}$ が Hodge 構造 $(\Lambda, V, \overline{V})$ に偏極を定めることと同値である。

演習問題 1 $E_{\mathcal{L}}$ が Hodge 構造 $(\Lambda, V, \overline{V})$ に偏極を定めていることを確かめよ (ヒント:$i^{-1} Q_{\mathbb{C}}(u, \overline{v}) = E(Ju, v) + iE(u, v)$ と関係づければよい)。

例の途中だが、ここで定義をしておこう:

定義 34（Riemann 形式*7） 整構造 Λ をもつ複素ベクトル空間 V 上の実双線形形式 $E\colon V \times V \to \mathbb{R}$ で、Riemann 関係式を満たすものを **Riemann 形式 (Riemann form)** と呼ぶ。

さらに、Riemann 形式の Gram 行列の行列式が ± 1 になることと $\phi_{\mathcal{L}}$ が主偏極であることが同値である。結果的に次の定理を得る:

定理 35 定理 28 の圏同値と同様にして、圏同値

$$(\mathrm{PAV}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{偏極付き} \\ \text{重さ } -1 \text{ の} \\ \text{Hodge 構造} \end{array} \right) \quad \text{および} \quad (\mathrm{IPAV}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{偏極付き} \\ \text{重さ } -1 \text{ の} \\ \mathbb{Q}\text{-Hodge 構造} \end{array} \right)$$

が得られる。

---

*6 周期行列についての関係式を Riemann の関係式と呼ぶこともある。

*7 この言葉にもいくつかの流儀がある。たとえば E の代わりに $E_{\mathcal{L}}$ を Riemann 形式と呼ぶもの、あるいは E を交代 Riemann 形式と呼んで、上記の Hermite 形式 $E(Ju, v)$ を Riemann 形式と呼ぶものなどである。

演習問題 2　偏極を持たない重さ -1 の Hodge 構造の例を挙げよ。これは Abel 多様体でない複素トーラスの例を挙げることに同値である。

例 36　1 次元複素トーラスは常に偏極を持つ。実際、$\mathbb{C}$ 中の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$ について、交代 Riemann 形式 E を $\mathbb{Z}$ 上の交代テンソルを用いて

$$z \wedge w = E(z,w)\lambda_1 \wedge \lambda_2$$

で定めると、これは行列式が -1 の Riemann 形式であることがわかる。したがって Hodge 構造 $(\Lambda, V, \overline{V})$ に主偏極が定まることが確かめられる。特に V/Λ は Abel 多様体の構造を持つ。

演習問題 3　E が行列式 -1 の Riemann 形式であることを確かめよ。

演習問題 4　Jacobi 多様体の主偏極について調べてみよ。

例 37（CM type から決まる Abel 多様体; [Ros86, §3, Theorem A の後], [Shi98, §6]; cf. 越川氏の講演） 先に用語を整えておく。**CM 体**は総実体の総虚な二次拡大とし、**CM 代数**は CM 体の直積と定義する。

L を $2g$ 次元の CM 代数とすると、代数としての準同型 $\mathrm{Hom}_0(L,\mathbb{C})$ は $2d$ 元ある。一方この集合には複素共役 c が (左から) 作用する。$\mathrm{Hom}_0(L,\mathbb{C})$ の c による作用の代表系 Φ と CM 代数 L の組 (L,Φ) を **CM type** という[*8]。

CM 代数 L の CM type $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_d\}$ を一つ固定すると、準同型

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_d) \colon L \hookrightarrow \mathbb{C}^d$$

は埋め込みを与え、さらに $\mathbb{R}$-代数 $V = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ と $\mathbb{C}^d$ の同型に拡張される。

$\mathcal{O}_L$ を L の整環、$\mathfrak{a}$ を L の分数イデアルとする[*9]。すると $\Phi(\mathfrak{a})$ は $\mathbb{C}^d$ の $\mathbb{Z}$-格子となり、$(\Lambda = \mathfrak{a}, V = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \overline{V})$ は Hodge 構造を与える。

偏極を与えるために、次のような $\xi \in L$ を取る。

- すべての i について $\phi_i(\xi)$ は正の虚部を持つ純虚数。
- すべての $a, b \in \mathfrak{a}$ について
$$\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\xi \widetilde{a} b) \in \mathbb{Z}.$$

ここで $\widetilde{a} \in L$ は a の複素共役である。すると、交代形式

$$E \colon V \times V \to \mathbb{R}$$
$$E((z_i)_i, (w_i)_i) := \sum_i \phi_i(\xi)(\overline{z}_i w_i - z_i \overline{w}_i)$$

は Riemann 形式になっているので、偏極を定めることがわかる。特に $A = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\mathfrak{a}$ は Abel 多様体である。

演習問題 5　E が Riemann 形式であることを確かめよ。

実はこのようにして定める Abel 多様体は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義され、その同種類は整環 $\mathcal{O}_L$ や $\mathfrak{a}$ に依らないことがわかっている ([Shi98, §6.1])。さらに構成から $\mathrm{End}_0(A)$ は L を部分代数として含む (**虚数乗法**をもつ Abel 多様体)。逆に g 次元 Abel 多様体 B について $\mathrm{End}_0(B)$ が L を部分代数として含む場合、適切に整環や $\mathfrak{a}$ や CM type を選ぶと、上記のように構成した Abel 多様体と同種になることが知られている。

[*8] Φ のみを指して CM type と言い、(L,Φ) の組を **CM pair** と呼ぶことがある。

[*9] 定義は、L の各直積成分へ射影した時に (0 でない) 分数イデアルとなっていることである。

3 Abel 多様体再び ([Mum70, Mil86])

この節では前節にて、複素数体上で解析的に導入した偏極を一般の体 k 上の設定で議論していく。また複素トーラスを扱ううえで中心的であった $\mathbb{Z}$-格子 Λ の類似概念を定義し、それについて少しだけ性質を述べる。

3.1 双対 Abel 多様体、偏極

定理 38 任意の Abel 多様体 A 上には豊富直線束が存在する。すなわち Abel 多様体は射影的である。

注 39 さらにすべての豊富直線束 $\mathcal{L}$ について、$\mathcal{L}^{\otimes 3}$ が非常に豊富であることを示すことができる (**Lefschetz の埋め込み定理**, [Mum70, §17])。たとえば楕円曲線 E とその有理点 P について、$\mathcal{O}(3P)$ は射影平面への埋め込みを与える。これは冒頭の例の平面 3 次曲線を与えている。

これを用いて偏極を定義したいところであるが、まず双対 Abel 多様体を定義しなければいけない。ここでは簡単のため、k を代数閉体として話を進める。

$\mathrm{Pic}(A)$ を A 上の直線束の同型類とする。$\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A)$ について、前と同様の写像

$$\phi_{\mathcal{L}} \colon A(k) \to \mathrm{Pic}(A) \quad ; \quad x \mapsto t_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

は準同型になる。この $\phi_{\mathcal{L}}$ が 0 写像であるような $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A)$ の集合を $\mathrm{Pic}^0(A)$ と書く。

定理 40 任意の Abel 多様体 A について、次のような Abel 多様体 $\widehat{A}$ と $A \times \widehat{A}$ 上の直線束 $\mathcal{P}$ が存在する。

- $\mathcal{P}|_{\{0\}\times\widehat{A}}$ は自明直線束である。
- $a \in \widehat{A}(k)$ について、$\mathcal{P}|_{A\times\{a\}}$ は $\mathrm{Pic}^0(A)$ に属する A 上の直線束である。
- k-スキーム T と $A \times T$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ が次を満たしているとする。
  - $\mathcal{P}|_{\{0\}\times T}$ は自明直線束である。
  - $t \in T(k)$ について、$\mathcal{P}|_{A\times\{t\}}$ は $\mathrm{Pic}^0(A)$ に属する A 上の直線束である。

  このとき、ある k 上の射 $f \colon T \to \widehat{A}$ が存在して、$(1 \times f)^*\mathcal{P} = \mathcal{L}$ である。

一言でまとめると、前者二つの性質を持つスキーム T と直線束 $\mathcal{L}$ の組の中で普遍的な対象であるということである。特に各直線束 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(A)$ について対応する点 $\widehat{A}(k)$ が存在するので、$\widehat{A}$ は $\mathrm{Pic}^0(A)$ を対応付けていることがわかる。

定義 41 上記定理の $\widehat{A}$ を A の**双対 Abel 多様体 (dual Abelian variety)**, $\mathcal{P}$ を A の **Poincaré 束 (Poincaré bundle)** と呼ぶ。

もちろん体が代数閉でなくとも、定理 40 の主張を少々変えれば類似の主張が成立し、双対 Abel 多様体は k 上で存在することがわかる。詳細は [Mum70, §13] を参照。

以降では k を一般の体に戻す。複素数体上の時と同様に次が成立する。

命題 42 $\phi_{\mathcal{L}}$ は k 上定義された代数的な射 $A \to \widehat{A}$ になり、$\mathcal{L}$ が豊富直線束なら同種写像になる。

これをもとに、偏極、主偏極、偏極付き Abel 多様体を定義 21 とまったく同様に定義することができる。Poincaré の完全可約性定理から、偏極付き Abel 多様体の同種圏は以前と同様に半単純 Abel 圏になる。

複素数体上の時は述べなかったが、次の性質に注意しておく。

定理 43 偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ について、ある <u>主偏極</u> 付き Abel 多様体 $(B, \phi_{\mathcal{M}})$ と同種 $f\colon A \to B$ が存在し、

$$\phi_{\mathcal{L}} = {}^t f \circ \phi_{\mathcal{M}} \circ f$$

となる。

これから同種類の代表元としては主偏極つき Abel 多様体のみを考えればいいとわかる。なお主偏極を持たない Abel 多様体が存在することに注意しておく。

3.2 Tate 加群

Abel 多様体を調べるにあたって以下の概念は極めて重要である。

定義 44 A を体 k 上の Abel 多様体、$\overline{k}$ を k の代数閉包とする。

- m, n を正整数とし、全射 $A[mn](\overline{k}) \to A[n](\overline{k})$ による逆系の逆極限 $T_f A := \varprojlim_N A[N](\overline{k})$ を **adèlic Tate 加群 (adèlic Tate module)** と呼ぶ。$V_f A := T_f A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおくと、これは $\mathbb{Q}$ の有限 adèle 環 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$ 上の加群になっている。
- l を素数とする。$m > n$ を正整数とし、全射 $A[l^m](\overline{k}) \to A[l^n](\overline{k})$ による逆系の逆極限 $T_l A := \varprojlim_n A[l^n](\overline{k})$ を l 進 **Tate 加群 (l-adic Tate module)** と呼ぶ。$V_l A := T_l A \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ とおく。

補題 45 g 次元 Abel 多様体 A について、以下が成立する。

- $T_f A \cong \prod_l T_l A$ である。
- $\mathbb{Z}_l$-加群として $T_l A$ は自由加群であり、階数は l が k の標数と素なら $2g$, l が k の標数と一致するなら 0 以上 g 以下である。

次の二つの主張を冒頭の (1) や (3) と比べると、これらの Tate 加群が $\mathbb{Z}$-格子の類似であることが見て取れる。

命題 46 Abel 多様体 A について、以下が成立する。

- (**Serre-Lang の定理**, [Mum70, §18]) A のエタール基本群について、$\pi_1^{\text{ét}}(A \otimes_k \overline{k}) \cong T_f A$ である。
- A のエタールコホモロジーについて、

  $$H^i_{\text{ét}}(A \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Z}_l) \cong \bigwedge^i \mathrm{Hom}(T_l A, \mathbb{Z}_l)$$

  である。

さらに Tate 加群には Riemann 形式の対応物すら存在する。

ここでは詳細は述べないが、偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ と各正整数 N について **Weil ペアリング (Weil pairing)** [*10] と呼ばれる交代的な双線形写像

$$e_{\mathcal{L},N}\colon A[N](\overline{k}) \times A[N](\overline{k}) \to \mu_N(\overline{k})$$

[*10] Weil 対形式と呼ばれることがある。

が存在する ([Mum70, §20])。ここに μ_N は 1 の N 乗根のなす群スキームである。

Weil ペアリングの値域のほうも合わせて射影極限を取っておくと、これは Hodge 構造における Tate ひねりの類似になっている。

定義 47（Tate ひねり） $\overline{k}$ を k の代数閉包とする。

- l を素数とする。$m > n$ を正整数とし、全射 $\mu_{l^m}(\overline{k}) \to \mu_{l^n}(\overline{k})$ による逆系の逆極限 $\varprojlim_n \mu_{l^n}(\overline{k})$ を $\mathbb{Z}_l(1)$ と書き、**Tate ひねり (Tate twist)** と呼ぶ。$\mathbb{Z}_l$-加群としては $\mathbb{Z}_l$ に同型だが、通常自明でない Galois 作用が入っている。
- 正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について、

$$\mathbb{Z}_l(n) := \mathbb{Z}_l(1)^{\otimes n}$$
$$\mathbb{Z}_l(0) := \mathbb{Z}_l$$
$$\mathbb{Z}_l(-n) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(\mathbb{Z}_l(n), \mathbb{Z}_l)$$

  と定める。ここで $\mathbb{Z}_l$ は自明な Galois 作用を入れている。
- さらに、任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ について $\mathbb{Q}_l(n) := \mathbb{Z}_l(n) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ とおく。
- **Adèlic Tate ひねり (adèlic Tate twist)** $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ は

$$\hat{\mathbb{Z}}(1) := \varprojlim_N \mu_N(\overline{k})$$

  として定義する。$\hat{\mathbb{Z}}(n)$ も同様である。
- 整数 n について、$\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}(n) := \hat{\mathbb{Z}}(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とする。

定理 48 偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ について、Weil ペアリングから非退化で交代的なペアリング

$$e_{\mathcal{L},l} \colon T_l A \times T_l A \to \mathbb{Z}_l(1)$$
$$e_{\mathcal{L},f} \colon T_f A \times T_f A \to \hat{\mathbb{Z}}(1)$$

が定まる。$e_{\mathcal{L},l}$ を l **進 Weil ペアリング (l-adic Weil pairing)** と呼び、$e_{\mathcal{L},f}$ を **adèlic Weil ペアリング (adèlic Weil pairing)** と呼ぶ。

これらを $\mathbb{Q}$-線形に拡張したものを

$$e_l \colon V_l A \times V_l A \to \mathbb{Q}_l(1) \tag{5}$$
$$e_f \colon V_f A \times V_f A \to \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}(1) \tag{6}$$

で書く。これらも (l-進、adèlic) Weil ペアリングと呼ぶ。

命題 49 二つの Abel 多様体 A, B について、自然な準同型

$$\mathrm{Hom}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_l A, T_l B)$$

は単射である。とくに $\mathrm{Hom}(A, B)$ は階数 $4 \dim A \dim B$ 以下の自由 Abel 群である。

注 50 上の写像の像は当然 Galois 不変になる。実は k が (標数 2 以外の) 素体上有限生成な体だと

$$\mathrm{Hom}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_l A, T_l B)^{\Gamma_k}$$

が同型になる (**Abel 多様体についての Tate の** $\mathrm{Hom}(A, B)$ **予想**：Tate, Faltings)。これは Abel 多様体の Tate 予想の一部に同値である (cf. 津嶋氏、松本氏の講演)。

3.3 Rosati 対合

複素トーラスと同様に、準同型 $f\colon A\to B$ について、${}^tf\colon \widehat{B}\to\widehat{A}$ が定まる。これを用いて, $\mathrm{End}_0(A)$ に次のような対合を定義する:

定義 51（[Mum70, §20]） 偏極付き Abel 多様体 $(A,\phi_{\mathcal{L}})$ について、

$$\cdot'\colon \mathrm{End}_0(A)\to\mathrm{End}_0(A)\quad;\quad f\mapsto f':=\phi_{\mathcal{L}}^{-1}\circ{}^tf\circ\phi_{\mathcal{L}}$$

で定まる反準同型を **Rosati 対合 (Rosati involution)** という*11。

実際、

$$(f+g)'=f'+g',\quad (fg)'=g'f',\quad [n]'_A=[n]_A,\quad (f')'=f$$

が成立する。また E を $(A,\phi_{\mathcal{L}})$ に付随する Riemann 形式、e_l,e_f を式 (5), (6) で定義した Weil ペアリングとすると、$f\in\mathrm{End}_0(A)$ と適切な空間の元 u,v について、

$$\begin{aligned}E(f(u),v)=&E(u,f'(v))\\ e_l(f(u),v)=&e_l(u,f'(v))\\ e_f(f(u),v)=&e_f(u,f'(v))\end{aligned}$$

が成立する。

定理 52 双線形形式

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_0(A)\times\mathrm{End}_0(A)\to&\mathbb{Q}\\ (f,g)\mapsto&\mathrm{Tr}(f\circ g')\end{aligned}$$

は正定値である。

例 53 A が単純な g 次元 Abel 多様体で、$2g$ 次 CM 体 K を $\mathrm{End}_0(A)$ に含むとすると、実は $\mathrm{End}_0(A)=K$ であり ([Shi98, §5.1, Proposition 6])、また Rosati 対合は K において複素共役になることが知られている。

系 54 $(A,\phi_{\mathcal{L}})$ を偏極付き Abel 多様体とする。

- $(A,\phi_{\mathcal{L}})$ の自己同型は有限群である。
- さらに、$(A,\phi_{\mathcal{L}})$ の自己同型がある 3 以上の整数 N について $A[N](\overline{k})$ に自明に作用すると仮定すると、自己同型は自明になる。

これがレベル構造と偏極を付けた Abel 多様体の粗モジュライ・精モジュライが存在する理由のひとつになっている (cf. 越川氏の講演)。

4 Abel スキーム ([Lan13])

この節ではあとで使う Abel スキームの基本概念を復習する (cf. 清水氏の講演)。

---

*11 f' の代わりに、ダガー † を用いて $f^\dagger$ で書く流儀もある。

定義 55　S をスキームとする。S 上の **Abel スキーム (Abelian scheme)** A とは、固有で滑らかな S 上の群スキームで、幾何的に連結なファイバーを持つものを指す。

注 56　Abel 多様体の場合と異なり、射影的でない Abel スキームが存在する。たとえば Raynaud は 1 次元被約完備 Noether 環のスペクトラム上や、Artin 環のスペクトラム上で射影的でない Abel スキームを構成している ([Ray70])。

Abel 多様体の場合と似た議論で、次が示される。

命題 57　Abel スキームは可換である。

定義 58　Abel スキーム間の**同種写像 (isogeny)** は、全射準同型で、核が S 上有限な群スキームになっているものを指す。

Abel 多様体の時と同様、双対 Abel スキームの定義には少しだけ準備がいる。双対 Abel スキームの定義をするためにいくつか概念を定義する。

定義 59　Abel スキーム $A \to S$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ について、**rigidification** を同型 $\xi\colon e^*\mathcal{L} \to \mathcal{O}_S$ で定める。ここに $e\colon S \to A$ は恒等切断である。

定義 60　S 上の Abel スキーム A について、函手 $\underline{\mathrm{Pic}^0_e}(A/S)\colon (\mathrm{Sch}/S) \to (\mathrm{Sets})$ を次のように定める。

$$T/S \longrightarrow \left(\begin{array}{l} A \times_S T \text{ 上の直線束 } \mathcal{L} \text{ と} \\ \text{rigidification の組の同型類で、} \\ \text{各 } t \in T \text{ 上 } \mathrm{Pic}^0(A_t) \text{ に属するもの} \end{array} \right)$$

定理 61　函手 $\underline{\mathrm{Pic}^0_e}(A/S)$ は S 上の Abel スキーム $\widehat{A}$ によって表現可能である。$\widehat{A}$ を A の**双対 Abel スキーム (dual Abelian scheme)** と呼ぶ。

注 62　Abel 多様体と同様、Poincaré 束を使った定義もできる。

$\widehat{\widehat{A}}$ は A と S 上自然に同型になる。射 $f\colon A \to \widehat{A}$ が**対称的 (symmetric)** とは、自然な同型と転置の合成

$$A \to \widehat{\widehat{A}} \xrightarrow{{}^t f} \widehat{A}$$

が f に等しくなることを指す。

定義 63　S 上の Abel スキーム A の**偏極 (polarization)** とは、対称な同種 $\phi\colon A \to \widehat{A}$ で、ファイバーごとには直線束からくる偏極 $\phi_{\mathcal{L}}$ の形をしているものを指す。

主偏極、偏極付き Abel スキームは以前と同様に定義する。

付録 A　群スキーム

定義 64　スキーム S 上の**群スキーム (group scheme)** (G, m, e, i) とは、

- S-スキーム $G \to S$,
- **積 (multiplication)** と呼ばれる S-射 $m\colon G \times G \to G$,

- **単位元 (unit element)** と呼ばれる切断 $e\colon S \to G$, および
- **逆元 (inverse)** と呼ばれる S-射 $G \to G$

からなる四つ組 (G, m, e, i) で、以下の図式をすべて可換にするものを指す。

結合性

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\ G \times_S G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

単元

$$\begin{tikzcd} G \times_S S \arrow[r, "\mathrm{id}\times e"] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cong"'] & G \\ S \times_S G \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] & G \times_S G \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

逆元

$$\begin{tikzcd} & G \times_S G \arrow[dr, "m"] & \\ G \arrow[ur, "(\mathrm{id},i)"] \arrow[r] \arrow[dr, "(i,\mathrm{id})"'] & S \arrow[r, "e"] & G \\ & G \times_S G \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

平たく言うと、S スキーム T ごとに T-値点 $G(T)$ を取る函手が群の圏への函手になっているスキームである。

特に混乱のない時は四つ組 (G, m, e, i) を単に G で表すことが多い。

定義 65 スキーム S 上の群スキーム $G = (G, m, e, i)$, $G' = (G', m', e', i')$ の間の**準同型 (homomorphism)** $f\colon G \to G'$ は、射 $f\colon G \to G'$ であって $m' \circ (f \times f) = f \circ m$ を満たすものを指す。このとき $i' \circ f = f \circ i, e' = f \circ e$ が自然に従う。

つまり S-スキーム T について、$G(T) \to G'(T)$ が群準同型になる射 $G \to G'$ である。

定義 66 スキーム S 上の群スキーム $G = (G, m, e, i)$ について、$g \in G(S)$ による**(左) 平行移動 ((left) translation)** $t_g\colon G \to G$ は、

$$G = S \times_S G \xrightarrow{g\times\mathrm{id}} G \times_S G \xrightarrow{m} G$$

の合成写像のことを指す。一言でいうと左から g を作用させる写像である。右平行移動を考えることもできるが、Abel スキームは可換なのでここでは左だけ定義しておく。

参考文献

[BL09] C. Birkenhake and H. Lange. *Complex Abelian Varieties.* Grundlehren der mathematischen Wissenchaften, **302**, Springer-Verlag, 2009.

[Del71b] P. Deligne. *Théorie de Hodge. II.* Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. (1971), no. 40, 557.

[Lan13] K. W. Lan. *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties.* London Mathematical Society Monographs, **36**, Princeton University Press, Princeton, 2013.

[Mil86] J. S. Milne. *Abelian Varieties.* in Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984); Springer, New York, 1986, pp. 103–150.

[Mil86Jac] J. S. Milne. *Jacobian Varieties.* in Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984); Springer, New York, 1986, pp. 167–212.

[Mum70] D. Mumford. *Abelian Varieties.* Oxford University Press; Oxford, 1970.

[Ray70] M. Raynaud. *Faisceaux Amples sur le Schèmas en Groupes et les Espace Homogénes.* Lecture Notes in Math.; **119**, Springer-Verlag: Heidelberg, 1970.

[Ros86] M. Rosen. *Abelian Varieties over* $\mathbb{C}$. in Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984); Springer, New York, 1986, pp. 79–101.

[Shi98] G. Shimura. *Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Forms.* **46**, Princeton University Press, 1998.

[Sil09] J. H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves.* Graduate Texts in Math., **106**, Springer-Verlag, 2009.