Hermite 対称領域

阿部 紀行（北大理）

記号

- G：$\mathbb{R}$ 上の代数群 $\Rightarrow$ $G(\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 値点のなす Lie 群，$G(\mathbb{R})^+$：$G(\mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分．
- $\mathrm{Is}(X)$：Riemann 多様体 X の等長変換全体．
- $\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$．
- $1_n = n$ 次単位行列，$1_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$．
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{g : n \times n \text{ 実行列} \mid \det(g) \neq 0\}$，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ も同様．
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ も同様．
- $\mathrm{GO}(p,q) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g 1_{p,q} g \in \mathbb{R}^\times 1_{p,q}\}$．
- $\mathrm{O}(p,q) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g 1_{p,q} g = 1_{p,q}\}$．$\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n,0)$．
- $\mathrm{SO}(p,q) = \{g \in \mathrm{O}(p,q) \mid \det(g) = 1\}$．$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n,0) = \mathrm{O}(n)^+$．
- $\mathrm{GU}(p,q) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g} 1_{p,q} g \in \mathbb{C}^\times 1_{p,q}\}$．
- $\mathrm{U}(p,q) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g} 1_{p,q} g = 1_{p,q}\}$．
- $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}))$（$\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{R}$ 上の代数群と見なしたもの）．
- $F(n_1, \ldots, n_r) = \{0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = \mathbb{C}^n \mid \dim(V_i/V_{i-1}) = n_i\}$：旗多様体．

定義　X：多様体，g：$(T^*X)^{\otimes 2}$ の切断．g が **Riemann 計量** $\iff$ g は各点で接空間上の内積を与える．このとき組 (X, g) を **Riemann 多様体**と言う．

X が更に複素多様体（よって各接空間は $\mathbb{C}$ ベクトル空間）の時，Riemann 計量 g が **Hermite 計量** $\iff$ $g(\sqrt{-1}X, \sqrt{-1}Y) = g(X, Y)$．このとき組 (X, g) を **Hermite 多様体**と言う．

定義　X が **Riemann 対称空間** $\iff$ X は連結 Riemann 多様体であり，更に次の同値な条件を満たす．

(1) $X \neq \emptyset$，$\forall x \in X \exists s_x \in \mathrm{Is}(X)$ s.t. $s_x^2 = 1$，x は s_x の孤立固定点．
(2) ある $x \in X$ に対して (1) のような s_x が存在し，更に $\mathrm{Is}(X)$ は X に推移的に作用．

更に X が Hermite 空間であり s_x が正則の時 X を **Hermite 対称空間**と呼ぶ．

定理　Hermite 対称空間は「Euclid 型」「コンパクト型」「非コンパクト型」の積に分解される．

	Euclid 型	コンパクト型	非コンパクト型
典型例	$\mathbb{C}^n/\Lambda$　($\Lambda \subset \mathbb{C}^n$：離散部分群)	$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$	上半空間

非コンパクト型が重要． 非コンパクト型 Hermite 対称空間を **Hermite 対称領域**と呼ぶが，ここでは非コンパクト型 Hermite 対称空間で通すこととする．

定義　非コンパクト型 Hermite 対称空間 X が**既約** $\iff \#X \neq 1$，X は非コンパクト型 Hermite 対称空間の積に非自明に分かれない．

定義　連結 Lie 群（または連結アフィン代数群）G が**単純** $\iff G$ は非可換であり連結な正規部分群が $\{1\}$ と G のみ．（非連結な正規部分群はあり得る．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は単純だが $\{1_2, -1_2\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は正規部分群．）

更に単純 Lie 群（または連結単純代数群）G が**随伴型** $\iff$ G の中心が自明．

定理　X：既約非コンパクト型 Hermite 対称空間 $\Rightarrow \mathrm{Is}(X)^+$ は実 Lie 群の構造を持ち，単純かつ随伴型．また $x \in X$ に対して $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)}(x)$ はコンパクト．

定理　X：既約非コンパクト型 Hermite 対称空間 $\Rightarrow \exists G$：$\mathbb{R}$ 上の単純代数群 s.t. 随伴型かつ $G(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Is}(X)^+$.

$x \in X$ を固定する．$\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(x)$ はコンパクトで $X \simeq G(\mathbb{R})^+ / \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(x)$.
s_x に対する群上の概念が次の Cartan 対合.

定義　G：$\mathbb{R}$ 上の代数群，対合 $\theta\colon G \to G$（$\theta^2 = 1$ となる自己同型）が **Cartan 対合** $\iff$ $\{g \in G(\mathbb{C}) \mid \theta(\bar{g}) = g\}$ がコンパクト．（$\bar{g}$ は複素共役．）

$G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ かつ $g \in G \Rightarrow {}^t\bar{g} \in G$ の時，$\theta(g) = {}^t\bar{g}^{-1}$ は Cartan 対合．（$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の時 $\{g \in G(\mathbb{C}) \mid \theta(\bar{g}) = g\}$ は $\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$ と同型になる．）
G が Cartan 対合を持つ $\iff G$ は**簡約**である．（これを簡約群の定義としてもよい．）

定理　(1) 単純代数群は共役を除きただ一つの Cartan 対合を持つ．
(2) $K = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid \theta(g) = g\} \subset G(\mathbb{R})$ は極大コンパクト部分群.
(3) X：既約非コンパクト型 Hermite 対称空間，$x \in X$，G：代数群 s.t. $G(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Is}(X)^+$，$\theta(g) = s_x g s_x^{-1}$ $(g \in \mathrm{Is}(X)^+ = G(\mathbb{R})^+)$．このとき θ は G の Cartan 対合 θ にのび，$G(\mathbb{R})/K \simeq G(\mathbb{R})^+/(G(\mathbb{R})^+ \cap K) \simeq X$.

X：既約非コンパクト型 Hermite 対称空間．$x \in X$ を固定し，G と G の Cartan 対合 θ を上のように取り，$K = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid \theta(g) = g\}$ とおく．$z \in \mathrm{U}(1)$ に対して z 倍は $T_x(X)$ の等長変換.

定理　z 倍は $u(z) \in \mathrm{Is}(X)$ にのび，準同型 $u\colon \mathrm{U}(1) \to Z(K)$ を与える．（$Z(K)$ は K の中心．）

よって特に $\dim Z(K) \geq 1$ である．実は単純代数群 G に対して $\dim Z(K) \geq 1 \iff \dim Z(K) = 1$ であり，この対応により：

定理　既約非コンパクト型 Hermite 対称空間 $\xleftrightarrow{1:1} \dim Z(K) = 1$ となる随伴型単純代数群.

これを満たす G は分類でき，X は次のどれか：$\mathrm{U}(p,q)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$，$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$（Siegel 上半空間），$\mathrm{O}(2,n)/(\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(n))$，$\mathrm{SO}^*(2n)/\mathrm{U}(n)$（定義は略），例外型 $\times 2$.

Hodge 構造

定義 V：$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間．V の **Hodge 構造**とは，分解 $V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}}V^{p,q}$ s.t. $\overline{V^{p,q}}=V^{q,p}$ のこと．

$\mathbb{C}$ 上の平滑固有な代数多様体 X のコホモロジー $H^*(X,\mathbb{R})$ の Hodge 分解がその典型的な例．

例 $\mathbb{R}(n)=(2\pi\sqrt{-1})^n\mathbb{R}$（ベクトル空間として），$\mathbb{R}(n)^{(-n,-n)}=\mathbb{C}$（そのほかは 0）．

- V_1,V_2 に Hodge 構造が定まっていると，$V_1\otimes V_2$，$V_1\oplus V_2$ にも自然に Hodge 構造が定まる．
- $\mathbb{S}=\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}))$ とおく．V：Hodge 分解の与えられたベクトル空間に対して，$V^{p,q}$ 上 $h(z)=z^{-p}\bar{z}^{-q}$ により $h\colon\mathbb{S}\to\mathrm{GL}(V)$ を定める．この対応で：$\{\text{Hodge 構造}\}\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\{\mathbb{S}\text{ の表現}\}$．
- $n\in\mathbb{Z}$，$\bigoplus_{p+q=n}V^{p,q}=\exists V^n\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ と書ける．$V=\bigoplus_n V^n$：**ウェイト分解**．$V=V^n$ の時ウェイト n という．
- $F^r=\bigoplus_{p\geq r}V^{p,q}$：$V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ のフィルトレーション．**Hodge フィルトレーション**と言う．$V^{p,q}=F^p\cap\overline{F^q}$ なので Hodge フィルトレーションから Hodge 分解は復元できる．
- V：ウェイト n とする．**polarization** とは，$\Psi\colon V\otimes V\to\mathbb{R}$：$\mathbb{S}$ 同変，$(x,y)\mapsto(2\pi\sqrt{-1})^n\Phi(x\otimes h(\sqrt{-1})y)$ は内積．

定義 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$n_1+\cdots+n_r=n$．$F(n_1,\ldots,n_r)=\{0=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_r=\mathbb{C}^n\mid\dim(V_i/V_{i-1})=n_i\}$ を**一般旗多様体**と言う．（平滑かつ固有な代数多様体の構造が入る．）

命題 $(V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_r)$ での接空間は $\{(\varphi_i)\in\bigoplus_i\mathrm{Hom}(V_i,\mathbb{C}^n/V_i)\mid\varphi_i|_{V^{i+1}}=\varphi_{i+1}\ (\mathrm{mod}\ V_{i+1})\}$ と同一視される．

V が Hodge 構造を持てば，Hodge フィルトレーションは（適当な $\{n_i\}$ に対して）旗多様体の元を定める．

定義 S：複素多様体，V：$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間．各 $s\in S$ に対して $h_s\colon\mathbb{S}\to\mathrm{GL}(V)$ が定まっており（よって各 $s\in S$ は V 上の Hodge 構造を定める）

(1) $\dim V^{p,q}$ は s によらない．
(2) 写像 $S\ni s\mapsto h_s$ の Hodge フィルトレーション $\in$ 一般旗多様体 は正則．
(3) $s\in S$．上の射の微分 $T_sS\to\{(\varphi_i)\in\bigoplus_i\mathrm{Hom}(F^i,\mathbb{C}^n/F^i)\mid\varphi_i|_{F^{i+1}}=\varphi_{i+1}\ (\mathrm{mod}\ F^{i+1})\}$ の像は $\varphi_i(F^i)\subset F^{i-1}/F^i$ を満たす（横断性）．

を満たす時，これを **variation of Hodge structure** と言う．

次の状況を考える（条件付き Hodge 構造）：

- G：$\mathbb{R}$ 上の連結代数群.
- $X \subset \mathrm{Hom}_{代数群}(\mathbb{S}, G)$：連結成分（$G(\mathbb{R})^+$ 軌道).
- V：$\mathbb{R}$ 上の G の表現.

$h \in X$ は V の Hodge 分解を与える．更に次の条件を考える．

(α) $h \in X$ によるウェイト分解は h に依らない.
(β) $X \to (V$ の Hodge 構造$)$ は Hodge 構造の variation of Hodge structure.
(γ) $\exists \Psi_n \colon V^n \otimes V^n \to \mathbb{R}$ s.t. $\forall h \in X$ に対して polarization.

定理　(α)(β)(γ) を仮定すると，X は非コンパクト型 Hermite 対称空間.（対応する単純代数群は上の G よりも小さい可能性がある.）

■例 1　$\langle (z_1, \ldots, z_{p+q}), (z'_1, \ldots, z'_{p+q}) \rangle_{p,q} = z_1 \overline{z'_1} + \cdots + z_p \overline{z'_p} - (z_{p+1} \overline{z'_{p+1}} + \cdots + z_{p+q} \overline{z'_{p+q}})$ とおく．$\varphi \mapsto \{v + \varphi(v) \mid v \in \mathbb{C}^p\}$ により

$$\{\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q) \mid 1 - \varphi^* \varphi \text{ は正定値 }\} \simeq \{V \subset \mathbb{C}^{p+q} \mid \dim V = p,\ V|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}} \text{ は正定値 }\}$$

で，$\mathrm{U}(p,q)$ が自然に作用し $\mathrm{U}(p,q)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ と同型となる．$V \in$ (右辺) とすると $\mathbb{C}^{p+q} = V \oplus V^{\perp}$ で，この分解に応じて $(v_1, v_2) \mapsto (v_1, -v_2)$ により V における s_V が誘導される．対応する Cartan 対合は $g \mapsto {}^t\overline{g}^{-1}$.

■例 2

$$\{[z] \in \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \mid z \in \mathbb{C}^{n+2},\ \langle z, z \rangle_{2,n} = 0,\ \langle z, \bar{z} \rangle_{2,n} > 0\}$$

には $\mathrm{O}(2,n)$ が自然に作用し $\mathrm{O}(2,n)/(\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(n))$ と同型．また $[x + \sqrt{-1}y] \mapsto \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ により

$$\{V \subset \mathbb{R}^{n+2} \mid \dim V = 2,\ V|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,n}} \text{ は正定値 }\}$$

と同型．s_V は先ほどと同様に定義される．