

# 「 $p$ -進保型形式と志村多様体」のレジюме (不完全版, サマースクール期間中随時更新予定)

中村 健太郎

ABSTRACT. このレジюмеは, 講演「 $p$ -進保型形式と志村多様体」ではおそらく正確な定義を省略するであろう部分の解説を行うという目的で書き始めたものであるが, 書いているうちに報告集の原型のようなものになってしまった. §4 は現在執筆中.

## CONTENTS

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 1. 記号                         | 1  |
| 2. 論文 [AIP15] の主定理            | 2  |
| 2.1. Siegel 保型形式              | 2  |
| 2.2. 重さ空間                     | 3  |
| 2.3. 局所解析的過収束保型層              | 3  |
| 2.4. Hecke 環                  | 4  |
| 2.5. Siegel モジュラー固有多様体の存在定理   | 5  |
| 2.6. 過収束保型形式の古典性定理            | 5  |
| 3. Coleman の $p$ -進スペクトル理論    | 6  |
| 3.1. Banach 加群上のコンパクト作用素      | 6  |
| 3.2. Coleman の $p$ -進スペクトル理論  | 7  |
| 4. 局所解析的過収束保型形式の定義            | 8  |
| 4.1. 基本的なアイデア                 | 8  |
| 4.2. 標準的部分群                   | 9  |
| 5. 形式的 Banach 層と Banach 層     | 10 |
| 5.1. 形式的 Banach 層             | 10 |
| 5.2. Banach 層                 | 11 |
| 5.3. 形式的 Banach 層のリジッド生成ファイバー | 11 |
| References                    | 12 |

## 1. 記号

- $p \geq 3$ : 奇素数.  $K: \mathbb{Q}_p$  の有限次拡大体,  $\mathcal{O}_K: K$  の整数環.

- $\mathbb{C}_p := \widehat{K}$ :  $K$  の代数閉包  $\overline{K}$  の  $p$  進完備化,  $v: \mathbb{C}_p^\times \rightarrow \mathbb{Q}$ :  $v(p) = 1$  となる付値.  $|-|: |p| = 1/p$  となる  $\mathbb{C}_p$  上の絶対値.
- $g \geq 2, N \geq 3$ : 整数,  $(p, N) = 1$  と仮定.
- $Y_{\text{Iw}} \rightarrow Y (= Y_g(N))$ : Siegel モジュラー多様体 ( $Y$ : 主レベル  $N$  構造を持つ  $g$  次元主偏極アーベル多様体のモジュライ空間,  $Y_{\text{Iw}}$ : 主レベル  $N$  構造と岩堀レベル  $p$  構造を持つ  $g$  次元主偏極アーベル多様体のモジュライ空間, それぞれ  $\text{Spce}(\mathcal{O}_K)$  上定義されているとする).
- スキーム  $X$  に対して,  $\text{GL}_{g/X} \supset B/X$  (上半三角行列)  $\supset T/X$  (対角行列),  $U/X$  (べき単行列) ( $X$  上の代数群として考える).
- $X(T) := \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^g: \left[ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_g \end{pmatrix} \mapsto t_1^{k_1} \cdots t_g^{k_g} \right] \mapsto (k_1, \dots, k_g)$ .
- $X_+(T) (\subset X(T)) \xrightarrow{\sim} \{(k_1, \dots, k_g) \in \mathbb{Z}^g \mid k_1 \geq \dots \geq k_g\}$ .

## 2. 論文 [AIP15] の主定理

本講演の目的は, 論文 [AIP15] に従い, Siegel 保型形式を  $p$  進補間する Siegel モジュラー固有多様体の存在定理に関する解説を行うことである.

[AIP15] では, 以下で  $Y, Y_{\text{Iw}}(p)$  上の対象として定義されるものを, より一般に  $Y, Y_{\text{Iw}}(p)$  の  $\mathcal{O}_K$  上定義されたトロイダルコンパクト化  $X, X_{\text{Iw}}(p)$  上でも ( $Y, Y_{\text{Iw}}(p)$  上の対象の自然な一般化として) 定義している. 本講演では簡単のため  $Y, Y_{\text{Iw}}(p)$  上の定義のみを与えることにする.

**2.1. Siegel 保型形式.**  $G \rightarrow Y$  を  $Y$  上の普遍的アーベルスキームとし,  $e: Y \rightarrow G$  を単位元切断,  $\omega_G := e^*(\Omega_{G/Y}^1)$  を  $G$  の不変微分形式の層とする.  $\mathcal{T} := \text{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y^g, \omega_G)$  (つまり,  $\mathcal{T}$  は  $Y$  上のスキーム  $S$  に対して  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^g, \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_S)$  を対応させる関手を表現する  $Y$  上のスキーム),  $\mathcal{T}^\times := \text{Isom}_Y(\mathcal{O}_Y^g, \omega_G)$  とおく. これらは  $\text{GL}_{g/Y}$  の自然な右作用を持ち, 特に  $\mathcal{T}^\times$  は, この作用によって  $Y$  上の  $\text{GL}_g$ -torsor になる. 構造射を  $\pi: \mathcal{T} \rightarrow Y$  とおく.

$X(T)$  の対合 (involution)  $\kappa \mapsto \kappa'$  を, 同型  $X(T) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^g$  によって  $\mathbb{Z}^g$  上の対合  $(k_1, \dots, k_g) \mapsto (-k_g, \dots, -k_1)$  に対応するものとする.  $\kappa \in X_+(T)$  に対して,  $Y$  上の  $\mathcal{O}_Y$  加群層  $\omega^\kappa$  を

$$\omega^\kappa := (\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\times})[\kappa'] := \{\varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\times} \mid \varphi(fh) = \kappa'(h)\varphi(f), \forall f \in \mathcal{T}^\times, \forall h \in B/Y\}$$

(つまり,  $Y$  上局所的に代数的な誘導  $\text{Ind}_B^{\text{GL}_g}(\kappa')_{\text{alg}/Y}$  となる層) と定義する.  $\omega^\kappa$  は有限局所自由  $\mathcal{O}_Y$  加群層になる.  $G, \omega_G, \mathcal{T}^\times, \omega^\kappa$  などを  $Y_{\text{Iw}}$  上に引き戻したものの,  $X, X_{\text{Iw}}(p)$  上へ自然に拡張したものなども, 同じ記号で  $G, \omega_G$  などと表す. 以上のもとで, ( $\mathcal{O}_K$  上のレベル  $N$  岩堀レベル  $p$ ) 重さ  $\kappa$  の Siegel 保型形式の空間を  $H^0(X_{\text{Iw}}(p), \omega^\kappa)$  によって定義する. また, 重さ  $\kappa$  の尖点的 Siegel 保型形式の空間を

$$H_{\text{cusp}}^0(X_{\text{Iw}}(p), \omega^\kappa) := H^0(X_{\text{Iw}}(p), \omega^\kappa(-D)) \subseteq H^0(X_{\text{Iw}}(p), \omega^\kappa)$$

で定義する. ここで,  $D := X_{\text{Iw}}(p) \setminus Y_{\text{Iw}}(p)$  とし,  $\omega^\kappa(-D)$  は  $D$  でゼロとなる切断からなる  $\omega^\kappa$  の部分層とする.

2.2. **重さ空間.**  $\mathbb{Z}_p[[T(\mathbb{Z}_p)]]$  を副有限アーベル群  $T(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_p^\times)^g$  に付随する  $\mathbb{Z}_p$  係数の岩澤代数とする.  $\mathcal{W}$  を  $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$  上の許容的形式スキーム  $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[[T(\mathbb{Z}_p)]]))$  に付随する  $\mathbb{Q}_p$  上のリジッド解析的多様体 (Berthelot 生成ファイバー) とする. 生成ファイバーの定義から, 特に,  $\mathcal{W}$  は

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[[T(\mathbb{Z}_p)]])(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) = \{\kappa : T(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{C}_p^\times : \text{連続準同型}\}$$

を満たしている. より一般に,  $\mathbb{Q}_p$  上の各アフィノイド代数  $A$  に対して,  $\mathcal{W}(A) = \{\kappa : T(\mathbb{Z}_p) \rightarrow A^\times : \text{連続準同型}\}$  も成り立つ.  $\mathcal{W}$  を重さ空間 (weight space) と呼ぶ. 自然な制限写像  $\kappa \mapsto \kappa|_{T(\mathbb{Z}_p)}$  による埋め込み  $X(T) \subset \mathcal{W}$  が存在する.  $X_+(T)$  は  $\mathcal{W}$  の中で Zariski 稠密であることが知られており, その意味で  $\mathcal{W}$  は  $X_+(T)$  を  $p$  進補間するリジッド解析的多様体とみなせる.

$v \in \mathbb{Q}$  に対して,  $p^v \in \mathbb{C}_p$  を  $v(p) = v$  となる元 (特に固定しない) とする. アフィノイド代数  $A$ ,  $a \in A$ ,  $r \in |\mathbb{C}_p^\times| \subseteq \mathbb{R}$  に対して,  $B(a, r)_{/A}$  を  $A$  上定義された中心  $a$  半径  $r$  の開円盤とする. 例えば  $p^v \in A$  の時は,  $B(a, 1/p^v)_{/A} = \mathrm{Spm}(A\{\frac{T}{p^v}\})$  となる. ここで,  $A\{\frac{T}{p^v}\} := \{\sum_{n \geq 0} a_n (\frac{T}{p^v})^n \in A[[T]] \mid a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\}$  とする.  $w \in \mathbb{Q}_{>0}$  とする. 連続準同型  $\kappa : T(\mathbb{Z}_p) \rightarrow A^\times$  がリジッド解析的写像  $T(\mathbb{Z}_p)B(1, 1/p^w)_{/A}^g \rightarrow (\mathbb{G}_m)_{\mathrm{an}/A}$  に延びるとき,  $\kappa$  は  $w$ -解析的であるという. ここで,  $T(\mathbb{Z}_p)B(1, 1/p^w)_{/A}^g$  は, (同型  $T(\mathbb{Z}_p)^g \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_p^\times)^g$  で両辺を同一視して)  $(\bigcup_{a \in \mathbb{Z}_p^\times} B(a, 1/p^w)_{/A})^g \subset ((\mathbb{G}_m)_{\mathrm{an}/A})^g$  で定義される  $A$  上のリジッド解析的多様体とする. 任意の  $A$ , 任意の連続準同型  $\kappa : T(\mathbb{Z}_p) \rightarrow A^\times$  に対して, ある  $w$  が存在して  $\kappa$  は  $w$ -解析的となることが知られている.

2.3. **局所解析的過収束保型層.**  $\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p), \mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)$  を  $Y, X, Y_{\mathrm{Iw}}(p), X_{\mathrm{Iw}}(p)$  に付随する  $K$  上のリジッド解析的多様体とする. 特に,  $\mathcal{Y}(\mathbb{C}_p) = Y(\mathbb{C}_p)$  などとなっている.  $x \in \mathcal{Y}(\mathbb{C}_p)$  に対して,  $G_x$  を  $G$  の  $x$  への底変換とする.  $v \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  に対して,  $\mathcal{Y}(v) \subset \mathcal{Y}$  を

$$\mathcal{Y}(v) := \{x \in \mathcal{Y} \mid \mathrm{Hdg}(G_x) \leq v\}$$

と定義する. ここで,  $\mathrm{Hdg}(G_x) \in [0, 1]$  は  $G$  の Hodge 高さと呼ばれる不変量 (後述).  $\mathcal{Y}(v)$  は  $\mathcal{Y}$  の許容の開集合となる.  $\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \subset \mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)$  も同様に定める. トロイダルコンパクト化に対しても同様に,  $\mathcal{X}(v), \mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(v)$  を定義することができる.

$\kappa \in \mathcal{W}(K)$  を  $w \in \mathbb{Q}_{>0}$ -解析的な連続準同型とする. [AIP15] では,  $w$  に対して十分小さい  $v \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  (より正確には,  $v < \frac{1}{2p^{n-1}}$  ( $p \geq 5$ ),  $v < \frac{1}{3p^{n-1}}$  ( $p = 3$ ) かつ  $w \in (n - 1 + \frac{v}{p-1}, n - v \frac{p^n - 1}{p-1}]$  を満たす  $n \in \mathbb{N}$  が存在するような  $v$ ) に対して  $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$  上の Banach 層  $\omega_w^{\dagger, \kappa}$  を定義した (Banach 層という用語, 及び  $\omega_w^{\dagger, \kappa}$  の定義については後述).

**定義 2.1.** 重さ  $\kappa$  の  $w$ -解析的  $v$ -過収束 Siegel 保型形式の空間を

$$M_w^{\dagger, \kappa}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)) := H^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger, \kappa})$$

で定義し, 重さ  $\kappa$  の局所解析的過収束 Siegel 保型形式の空間を

$$M^{\dagger, \kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p)) := \varinjlim_{v \rightarrow 0, w \rightarrow \infty} M_w^{\dagger, \kappa}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v))$$

で定義する.

Banach 層の一般論 (後述) により,  $M_w^{\dagger\kappa}(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v))$  には自然に Banach  $K$  加群の構造が入る.

$\kappa \in X_+(T)$  とする. このとき, 自然な埋め込み

$$\omega^\kappa|_{\mathcal{X}_{Iw}(p)(v)} \hookrightarrow \omega_w^{\dagger\kappa}$$

が存在し, さらにこの埋め込みは, 埋め込み

$$H^0(X_{Iw}(p), \omega^\kappa) \hookrightarrow H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$$

を誘導する.

アフィノイド開集合  $\mathrm{Spm}(A) \subseteq \mathcal{W}$  に対して,  $A$  への (普遍的な) 連続準同型  $\kappa^{\mathrm{univ}} : T(\mathbb{Z}_p) \rightarrow A^\times$  を

$$\kappa^{\mathrm{univ}} : T(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{h \mapsto [h]} \mathbb{Z}_p[[T(\mathbb{Z}_p)]]^\times \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{O}_{\mathcal{W}} \xrightarrow{\mathrm{res}} A^\times$$

で定義する.  $\kappa^{\mathrm{univ}} : T(\mathbb{Z}_p) \rightarrow A^\times$  は  $w$ -解析的であるとし,  $v$  は上と同様にする. [AIP15] では, より一般に,  $\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \mathrm{Spm}(A)$  上の Banach 層  $\omega_w^{\dagger\kappa^{\mathrm{univ}}}$  で任意の  $x \in \mathrm{Spm}(A)$  に対して ( $\kappa_x$  を  $x$  に対応する準同型とすると),

$$\omega_w^{\dagger\kappa^{\mathrm{univ}}} \hat{\otimes}_A K_x \xrightarrow{\sim} \omega_w^{\dagger\kappa_x}$$

となるものを構成している. Banach 層の一般論により,  $H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \mathrm{Spm}(A), \omega_w^{\dagger\kappa^{\mathrm{univ}}})$  は Banach  $A$  加群となる.

$H^0(X_{Iw}(p), \omega^\kappa)$  のときと同様にして, 尖点的局所解析的過収束保型形式の空間  $H_{\mathrm{cusp}}^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa}), H_{\mathrm{cusp}}^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \mathrm{Spm}(A), \omega_w^{\dagger\kappa^{\mathrm{univ}}})$  を定義することができる.

**2.4. Hecke 環.** 各素数  $l \nmid Np$  での Hecke 環  $\mathbb{T}_l := \mathbb{Z}[\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_l) // \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_l)]$  (ここで,  $(-)//(-)$  は両側剰余類を表すとする) の制限直積を  $\mathbb{T}^{(Np)} := \otimes'_{l|Np} \mathbb{T}_l$  と表す.  $\mathbb{U}_p := \mathbb{Z}[U_{p,1}, \dots, U_{p,g}]$  とし,  $\mathbb{T} := \mathbb{T}^{(Np)} \otimes \mathbb{U}_p$  とおく. Siegel 保型多様体上の Hecke 対応で定まる作用により,

$$H^0(X_{Iw}(p), \omega^\kappa), H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa}), H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \mathrm{Spm}(A), \omega_w^{\dagger\kappa^{\mathrm{univ}}})$$

上への  $\mathbb{T}$  作用を定義することができる ( $U_{p,g}$  の作用の定義については後述).

$0 \neq f \in H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$  を  $\mathbb{T}$  作用に関する同時固有形式とする. 固有値を対応させる射を  $\Theta_f : \mathbb{T} \rightarrow \overline{K} : T \mapsto \Theta_f(T)$  と表す (つまり,  $Tf = \Theta_f(T)f$  となる).

固有多様体の構成において,  $U_{p,g}$  作用に関する次の性質は極めて重要である:

- 作用  $U_{p,g}$  は Banach 加群  $H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$  及び  $H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \mathrm{Spm}(A), \omega_w^{\dagger\kappa^{\mathrm{univ}}})$  上のコンパクト作用素 (後述) になる.

この性質と関連して, 次で定義される概念は固有多様体の理論において重要となる.

**定義 2.2.** 同時固有形式  $0 \neq f \in H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$  が, 全ての  $1 \leq i \leq g$  に対して  $\Theta_f(U_{p,i}) \neq 0$  を満たすとき,  $f$  は有限スロープを持つという.

**注意 2.3.**  $\mathbb{U}_p$  は, 実際には Atkin-Lehner 環と呼ばれる  $p$  での岩堀 Hecke 環の部分環であり, 各  $U_{p,i}$  は岩堀 Hecke 環の中では可逆であることが知られているので,  $H^0(X_{Iw}(p), \omega^\kappa)$  ( $\kappa \in X_+(T)$ ) の同時固有ベクトルは全て有限スロープになる.

2.5. **Siegel モジュラー固有多様体の存在定理.**  $U := \prod_{1 \leq i \leq g} U_{p,i} \in \mathbb{T}$  とおく. 次の定理が [AIP15] の主定理である.

**定理 2.4.** ([AIP15] Theorem 1.1, Theorem 1.2)  $\mathcal{W}$  上のリジッド解析的多様体

$$w : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}$$

と環準同型  $\Theta : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  の組  $(\mathcal{E}, \Theta)$  で以下の性質を満たすものが存在する :

1.  $\Theta(U) \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^\times$ .
2.  $\mathcal{E}$  は同次元  $g$  かつ局所的有限射.
3. 各  $\kappa \in \mathcal{W}(\bar{K})$  に対して, 写像  $w^{-1}(\kappa) \rightarrow \text{Hom}_{\text{ring}}(\mathbb{T}, \bar{K}) : x \mapsto \Theta_x$  ( $\Theta_x$  は  $\Theta$  の  $x$  への底変換とする) は全単射

$w^{-1}(\kappa) \xrightarrow{\sim} \{ \Theta : \mathbb{T} \rightarrow \bar{K} \mid \text{有限スロープを持つ Hecke 固有形式 } f \in M_{\text{cusp}}^{\dagger \kappa}(X_{Iw}(p)) \text{ が存在して } \Theta = \Theta_f \text{ となる} \}$

4.  $\mathcal{E}(\bar{K})$  の部分集合

$\mathcal{E}_{\text{cl}} := \{ x \in \mathcal{E}(\bar{K}) \mid \kappa \in X_+(T) \text{ と Hecke 固有形式 } f \in H_{\text{cusp}}^0(X_{Iw}(p), \omega^\kappa) \text{ が存在して } \Theta_x = \Theta_f \text{ となる} \}$

は  $\mathcal{E}$  の中で Zariski 稠密である.

**注意 2.5.** 主定理の主張において, 扱う対象を  $M^{\dagger \kappa}(X_{Iw}(p))$  全体ではなく尖点的な過収束保型形式  $M_{\text{cusp}}^{\dagger \kappa}(X_{Iw}(p))$  に制限していることは (少なくとも [AIP15] における証明では) 本質的である. これに関して, [AIP15] で証明されている次の二つの性質が重要である.

- $H_{\text{cusp}}^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \text{Spm}(A), \omega_w^{\dagger \kappa \text{univ}})$  は射影的 Banach  $A$  加群.
- 各  $x \in \text{Spm}(A) \subseteq \mathcal{W}$  に対して, 自然な射  $H_{\text{cusp}}^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \text{Spm}(A), \omega_w^{\dagger \kappa \text{univ}}) \rightarrow H_{\text{cusp}}^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \text{Spm}(K_x), \omega_w^{\dagger \kappa x})$  は全射.

射影的という条件は, Coleman の  $p$  進スペクトル理論を適用するために必要な条件である. 全射性は, 同型を

$H_{\text{cusp}}^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \text{Spm}(A), \omega_w^{\dagger \kappa \text{univ}}) \hat{\otimes}_A K_x \xrightarrow{\sim} H_{\text{cusp}}^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) \times \text{Spm}(K_x), \omega_w^{\dagger \kappa x})$  誘導する. これらの性質の証明は, [AIP15] の論文で技術的に最も難しい部分である. 証明では, トロイダルコンパクト化  $X_{Iw}(p)$  だけではなく,  $Y_{Iw}(p)$  の極小コンパクト化も用いる.

2.6. **過収束保型形式の古典性定理.** 定理 2.4 の性質 4 は次に述べる古典性定理の帰結である.

$\kappa \in X_+(T)$ ,  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_g) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^g$  とする. 各  $i$  に対して  $U_{p,i}$  の固有値が  $a_i$  未満となる  $\{U_{p,i}\}_{1 \leq i \leq g}$  の同時一般化固有ベクトルの生成する  $M^{\dagger \kappa}(X_{Iw}(p)) \otimes_K \bar{K}$  の部分  $\bar{K}$  加群の  $K$  上の自然なモデルを  $M^{\dagger \kappa}(X_{Iw}(p))^{<\underline{a}} (\subset M^{\dagger \kappa}(X_{Iw}(p)))$  と表す.

**定理 2.6.** ([AIP15]Theorem 7.1.1)

$$M^{\dagger\kappa}(X_{\text{Iw}}(p))^{<a} \subseteq H^0(X_{\text{Iw}}(p), \omega^\kappa)$$

### 3. COLEMAN の $p$ 進スペクトル理論

**3.1. Banach 加群上のコンパクト作用素.**  $A$  を  $K$ -アフィノイド代数,  $|\cdot|$  を  $A$  上のノルムとする.

**定義 3.1.**  $A$ -加群  $M$  と関数  $|\cdot| : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が以下の性質を満たすとき,  $(M, |\cdot|)$  をノルム付き  $A$  加群とよぶ:

1.  $m \in M$  に対して,  $|m| = 0$  となることと  $m = 0$  となることは同値,
2. 各  $m, n \in M$  に対して, 不等式  $|m + n| \leq \sup\{|m|, |n|\}$  が成り立つ,
3. 各  $a \in A, m \in M$  に対して, 不等式  $|am| \leq |a||m|$  が成り立つ.

ノルム  $|\cdot|$  から定まる位相に関して完備となるノルム付き  $A$  加群  $(M, |\cdot|)$  を Banach  $A$  加群という.

ノルム付き  $A$  加群  $(M, |\cdot|)$  に対して,  $M$  上の別のノルム関数  $|\cdot|'$  が  $|\cdot|$  と同相な位相を  $M$  に誘導することと,  $|\cdot|'$  が  $|\cdot|$  と (ノルムとして) 同値となることは同値である. そこで, 以下では Banach  $A$  加群を (位相的  $A$  加群と見て) 単に  $M$  と表し, ノルム  $|\cdot|$  は特に固定しないことにする.

$M$  を  $A$  加群,  $A_0$  を  $A$  の有界開部分  $\mathcal{O}_K$  代数,  $M_0$  を  $p$ -進完備な  $M$  の部分  $A_0$  加群で  $M_0[1/p] = M$  となるものとする. このとき,  $M$  には  $M_0$  が単位球となるような Banach  $A$  加群の構造が自然に入る.

二つの Banach  $A$  加群  $M, M'$  に対して, Banach  $A$  加群  $M \hat{\otimes}_A M'$  をセミノルム付き  $A$  加群  $M \otimes_A M'$  の分離完備化として定義する. ここで,  $x \in M \otimes_A M'$  のセミノルムは,  $\inf_{x = \sum_i m_i \otimes m'_i} \{\sup_i \{|m_i| |m'_i|\}\}$  と定義される ( $|\cdot|, |\cdot|'$  はそれぞれ  $M, M'$  上のノルム).

**定義 3.2.** 1. 集合  $I$  に対して,  $A$  加群  $C(I)$  を

$$C(I) := \{f : I \rightarrow A \mid \lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = 0\},$$

と定義する.  $\sup$  ノルム (つまり,  $|f| := \sum_{i \in I} |f(i)|$  で定義されるノルム) により,  $C(I)$  は Banach  $A$  加群となる.

2. Banach  $A$  加群  $M$  に対して, 集合  $I$  が存在して  $C(I) \xrightarrow{\sim} M$  となるとき,  $M$  は正規直交化可能 (orthonormalizable) という.
3. Banach  $A$  加群  $M$  に対して, 集合  $I$  と Banach  $A$  加群  $M'$  が存在して  $M \oplus M' \xrightarrow{\sim} C(I)$  となるとき,  $M$  は射影的であるという.

$A$  を  $K$  上のアフィノイド代数,  $|\cdot|$  を  $A$  上のノルムとする.  $M, N$  を二つの Banach  $A$  加群とする.  $M$  から  $N$  への連続  $A$  加群準同型のなす  $A$  加群を  $\text{Hom}(M, N)$  と表す.  $f \in \text{Hom}(M, N)$  に対して, ノルム  $|f| := \sum_{m \in M \setminus \{0\}} \frac{|f(m)|}{|m|}$  と定義することで,  $\text{Hom}(M, N)$  は Banach  $A$  加群となる.  $\text{Im}(f)$  が有限生成  $A$  加群となる  $f \in \text{Hom}(M, N)$  全体からなる  $\text{Hom}(M, N)$  の部分  $A$  加群を  $\text{Hom}(M, N)_{\text{fin}}$  と表す.  $\text{Hom}(M, N)_{\text{fin}}$  の  $\text{Hom}(M, N)$  内での閉包を  $\text{Hom}(M, N)_{\text{comp}}$  で表す.  $\text{Hom}(M, N)_{\text{comp}}$  の元をコンパクト作用素という.

3.2. Coleman の  $p$  進スペクトル理論. 以下, 次のデータ  $(A, M, \mathbb{T}, U)$  を固定する.

- $\text{Spm}(A)$ :  $K$  上の被約かつ同次元 (equidimensional) アフィノイド.
- $M$ : 射影的 Banach  $A$  加群.
- $\mathbb{T}$ :  $\text{End}(M) := \text{Hom}(M, M)$  の可換部分  $A$  代数.
- $U \in \mathbb{T}$ : コンパクト連続  $A$  自己準同型.

**注意 3.3.** Siegel モジュラー固有多様体への応用では,  $\text{Spm}(A)$  は重み空間  $W$  のアフィノイド開集合,  $M$  は  $A$  上の局所解析的過収束尖点的保型形式の空間,  $\mathbb{T}$  は Hecke 環,  $U = \prod_{1 \leq i \leq g} U_{p,i}$  に対して理論を適用する.

この状況で,  $M$  への  $\mathbb{T}$  作用の同時固有値をパラメトライズする  $A$  上のリジッド解析的多様体 (固有多様体と呼ばれる)  $\mathcal{E}$  を構成したい. ここで,  $M$  が  $A$  上有限生成であると仮定すると,  $\mathbb{T}$  は有限  $A$  代数  $\text{End}(M)$  の可換部分  $A$  代数となるので,  $\mathbb{T}$  は  $K$  上のアフィノイドの構造を持ち,

$$\mathcal{E} := \text{Spm}(\mathbb{T}) \rightarrow \text{Spm}(A)$$

が求める固有多様体となる.

一般の場合に  $\mathcal{E}$  を構成する基本的なアイデアは (大雑把には), コンパクト作用素の理論を用いて  $M$  を  $U$  作用の一般化固有ベクトルの空間に分解し,  $A$  上有限生成となる一般化固有ベクトルの空間それぞれに対して前段の方法で定義した固有多様体を貼り合わせることで全体の固有多様体を作るというものである. コンパクト作用素の理論により, 一般化固有ベクトルの空間が有限生成となるためには固有値が可逆元 (有限スロープ) という条件が必要である. 従って, 正確には,  $\mathcal{E}$  は  $U$  の固有値が非ゼロとなる  $\mathbb{T}$  の同時固有値をパラメトライズする空間になる.

各  $x \in \text{Spm}(A)$  に対して,  $M$  の  $x$  での底変換の完備化として得られる射影的 Banach  $K_x$  加群 ( $K_x$  は  $x$  での剰余体) を  $M_x$  と表し,  $\mathbb{T}, U$  の  $M_x$  への底変換を  $\mathbb{T}_x, U_x$  と表す.  $U_x$  は  $M_x$  のコンパクト作用素となる. よって,  $f_n \mapsto U_x$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となる  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{End}(M_x)_{\text{fin}}$  が存在するが, このとき次の式の右辺

$$\det(1 - TU_x | M_x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \det(1 - T f_n | \text{Im}(f_n) | \text{Im}(f_n)) \in K_x[[T]]$$

は収束し,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の取り方によらないことが証明できる.

さらに,  $\det(1 - TU_x | M_x)$  は, 任意の  $x \in K_x$  に対して  $\det(1 - xU_x | M_x)$  が収束するという強い収束性を持つことも知られている. さらに,  $M$  が射影的という我々の状況では, 以上の定義を  $A$  上に自然に拡張することができる. つまり,

$$P(T) := \det(1 - TU | M) \in A[[X]]$$

で, 各  $x \in \text{Spm}(A)$  に対して  $\det(1 - TU | M)$  の  $x$  での底変換が  $\det(1 - TU_x | M_x)$  となるものを自然に定義することができる. 上で述べた  $\det(1 - TU_x | M_x)$  の持つ収束性により,  $P(T)$  は  $K$  上のリジッド解析的多様体  $\text{Spm}(A) \times \mathbb{A}_{\text{an}}^1$  上のリジッド解析的関数になる.

**定義 3.4.**  $P(T) = 0$  で定まる  $\text{Spm}(A) \times \mathbb{A}_{\text{an}}^1$  の Zariski 閉部分多様体を  $\mathcal{Z}$  で表す.  $\mathcal{Z}$  を  $(A, M, U)$  に付随するスペクトル多様体と呼ぶ.

**注意 3.5.**  $(x, \lambda) \in \text{Spm}(A) \times \mathbb{A}_{\text{an}}^1$  に対して,  $x \in \mathcal{Z}$  であることと,  $\lambda \neq 0$  かつ  $U_x m = \lambda^{-1} m$  となる  $m \in M_x \otimes_{K_x} \overline{K}_x \setminus \{0\}$  が存在することは同値となる. つまり,  $\mathcal{Z}$  は  $U$  作用の有限スロープな固有値をパラメトライズする空間である.

$M$  の  $U$  作用に関する “一般化固有ベクトル分解” に関して, 次が成り立つ.

**命題 3.6.**  $p_1 : \mathcal{Z} \rightarrow \text{Spm}(A)$  を自然な射影とする. このとき,  $\mathcal{Z}$  の許容的開アフィノイド被覆  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$  で以下の性質を満たすものを取ることができる:

1.  $\mathcal{V}_i := p_1(\mathcal{U}_i)$  は  $\text{Spm}(A)$  のアフィノイド開集合 ( $\mathcal{V}_i = \text{Spm}(A_i)$  とおく) となり, かつ  $p_1 : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$  は有限平坦となる,
2.  $P_i(T) \in A_i[[X]]$  を  $P(T)$  の  $A_i$  への底変換とする. このとき,  $P_i(T) = Q_i(T)R_i(T)$  で,  $Q_i(T) \in 1 + A_i[[T]]$ ,  $R_i(T) \in 1 + A_i[[T]]$ ,  $(Q_i(T), R_i(T)) = 1$  となる  $P_i(T)$  の分解で,  $\mathcal{U}_i = \text{Spm}(A_i[[T]]/Q_i^*(T)) \subset \mathcal{V}_i \times \mathbb{A}_{\text{an}}^1$  となる (ここで,  $Q_i^*(T) := T^{\deg Q_i(T)} Q_i(1/T)$  とする).

さらに, このとき次が成り立つ.

3.  $M_i$  を  $M$  の  $A_i$  への底変換とすると,  $Q_i^*(U)$  が  $N_i$  上ゼロで,  $F_i$  上可逆に作用するような  $U$  作用と両立する閉  $A_i$  加群の分解  $M_i = N_i \oplus F_i$  が一意的に存在する. さらにこのとき,  $N_i$  は階数  $\deg Q_i(T)$  の射影的  $A_i$  加群で,  $\det(1 - UT|N_i) = Q_i(T)$  となる.
4. 対応  $\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{U}_i) := N_i$  は,  $\mathcal{Z}$  上の接続  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$  加群層  $\mathcal{M}$  を定める.

分解の一意性から  $\mathbb{T}$  は,  $N_i, F_i$  に作用することに注意.

**定義 3.7.**  $\mathbb{T}$  の像で生成される  $\text{End}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}}(\mathcal{M})$  の接続部分  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$  代数に付随するリジッド解析的多様体を  $\mathcal{E}$  と記す.  $\mathcal{E}$  をデータ  $(A, M, \mathbb{T}, U)$  に付随する固有多様体と呼ぶ.

構成から, 以下がわかる. 自然な射  $w : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \text{Spm}(A)$  があり, 構成から,  $w$  は局所的に有限射であり,  $\mathcal{E}$  は同次元でその次元  $\text{Spm}(A)$  と等しい.

$x \in \text{Spm}(A)$  に対して, 集合  $w^{-1}(x)$  は,  $U_x$  での固有値が非ゼロとなる  $M_x \otimes_{K_x} \overline{K}_x$  への  $\mathbb{T}_x$  作用の同時固有値の集合と一対一に対応する.

#### 4. 局所解析的過収束保型形式の定義

4.1. **基本的なアイデア.** 岩堀部分群  $\{g \in \text{GL}_g(\mathbb{Z}_p) \mid g \pmod{p} \in B(\mathbb{F}_p)\}$  を  $I(\mathbb{Z}_p)$  で表す.  $I(\mathbb{Z}_p)$  を  $\text{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$  の下三角行列  $g$  で  $g \pmod{p} = 1$  となる元からなる部分群とする. 岩堀分解から写像  $I(\mathbb{Z}_p) \times T(\mathbb{Z}_p) \times U(\mathbb{Z}_p) \rightarrow I(\mathbb{Z}_p) : (i, t, b) \mapsto itb$  は同相写像である.  $w \in \mathbb{Q}_{>1}$  とする. 連続関数  $f : I(\mathbb{Z}_p) \rightarrow A$  が  $w$ -解析的であるとは,  $(I(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} (p\mathbb{Z}_p)^{\frac{g(g-1)}{2}})$  となる自然な同相のもとで

$$I_-(\mathbb{Z}_p)B(0, 1/p^w)_{/A}^{\frac{g(g-1)}{2}} := \left( \bigcup_{a \in p\mathbb{Z}_p} B(a, 1/p^w)_{/A} \right)^{\frac{g(g-1)}{2}} \subset \mathbb{A}_{\text{an}/A}^{\frac{g(g-1)}{2}}$$

上のリジッド解析的関数に延びることと定義する.  $\kappa \in \mathcal{W}(K)$  を  $w$ -解析的な準同型とする. このとき,  $w$ -解析的な誘導表現  $V_{\kappa,A}^{w\text{-an}}$  (または,  $V_{\kappa/\text{Spm}(A)}^{w\text{-an}}$  と書く) を

$$V_{\kappa,A}^{w\text{-an}} := \{f : I(\mathbb{Z}_p) \rightarrow A : \text{連続} \mid f|_{I_-(\mathbb{Z}_p)} : w\text{-解析的}, \\ f(ib) = \kappa(b)f(i), \forall i \in I_-(\mathbb{Z}_p), \forall b \in B(\mathbb{Z}_p)\}$$

で定義する.  $w$ -解析的という条件により, 関数の収束半径が固定されているので, sup ノルムによって  $V_{\kappa,A}^{w\text{-an}}$  は Banach  $A$  加群となる (本稿では用いないが,  $(g \cdot f)(g') := f(g^{-1} \cdot g')$  により,  $V_{\kappa,A}^{w\text{-an}}$  は  $I(\mathbb{Z}_p)$  の Banach 表現になる).

局所解析的過収束保型層  $\omega_w^{\dagger\kappa}$  の定義の基本的なアイデアは,  $\mathcal{X}_{\text{Iw}}(p)(v)$  上局所的に  $V_{\kappa/\mathcal{X}_{\text{Iw}}(p)(v)}^{w\text{-an}}$  となる  $\mathcal{X}_{\text{Iw}}(p)(v)$  上の Banach 層を構成することである.

$X_{\text{Iw}}(p)$  上の層  $\omega^\kappa$  ( $\kappa \in X_+(T)$ ) は局所的には代数的な誘導表現  $V_{\kappa'/X_{\text{Iw}}(p)} := \text{Ind}_B^{\text{GL}_g}(\kappa')_{\text{alg}/X_{\text{Iw}}(p)}$  と同型であったことと,  $V_{\kappa,A}^{w\text{-an}}$  の持つ次の二つの性質:

1. 任意の  $\kappa \in \mathcal{W}$  に対して定義できる,
2.  $\kappa \in X_+(T)$  のときは, 自然な埋め込み  $V_{\kappa/X} \hookrightarrow V_{\kappa/X_{\text{an}}}^{w\text{-an}} : f \mapsto f|_{I(\mathbb{Z}_p)}$  が存在する (ここで,  $X$  は  $K$  上の代数多様体  $X_{\text{an}}$  は  $X$  に付随するリジッド解析的多様体とする),

とを見れば, 上に述べたアイデアが自然なものであると感ずることができるだろう.

$\kappa \in X_+(T)$  に対しては,  $\text{GL}_{g/X_{\text{Iw}}(p)}$  は  $\mathcal{T}^\times = \text{Isom}_{X_{\text{Iw}}(p)}(\mathcal{O}_{X_{\text{Iw}}(p)}, \omega_{X_{\text{Iw}}(p)})$  への作用として, 幾何的に自然なものとして現れた. そのため,  $\omega_w^{\dagger\kappa}$  の構成では,  $\mathcal{X}_{\text{Iw}}(p)(v)$  上局所的に

$$I_-(\mathbb{Z}_p)B(0, 1/p^w)_{/A}^{\frac{g(g-1)}{2}} \times T(\mathbb{Z}_p)B(1, 1/p^w)_{/A}^g \times U(\mathbb{Z}_p) \cdots (*)$$

となり,  $\mathcal{T}^\times$  と関係を持つ空間を構成する必要がある. (\*) は,  $I(\mathbb{Z}_p)$  と  $B(0, 1/p^w)_{/A}^{\frac{g(g-1)}{2}} \times B(1, 1/p^w)^g$  の交わりを持つ積になっているが,  $I(\mathbb{Z}_p)$  の部分は  $\mathcal{X}_{\text{Iw}}(p)(v)$  上の普遍アーベル多様体  $G$  の  $p^n$  等分点  $G[p^n]$  の標準的部分群と呼ばれる部分群への作用として,  $B(0, 1/p^w)_{/A}^{\frac{g(g-1)}{2}} \times B(1, 1/p^w)_{/A}^g$  の部分は  $\omega_G$  のフィルトレーションとして現れる. この両者から, 積 (\*) を得るためには, 両者の交わりでの両者の関係を調べる必要がある. これは, 標準的部分群と  $\omega_G$  を Hodge-Tate 写像と呼ばれる写像で結びつけることで行われる.

以下の小節では, 上に定義なしで述べたことの解説を行う.

## 4.2. 標準的部分群.

4.2.1. *Hodge-Tate* 写像.  $S$  をスキームとし,  $G$  を  $S$  上有限表示平坦群スキームとする.  $\omega_G := e^*(\Omega_{G/S}^1)$  を不変微分形式の層とする.  $G, \omega_G := e^*(\Omega_{G/S}^1)$  は対応,  $S' \mapsto G(S'), \Gamma(S', \omega_{G \times_S S'})$  によって,  $S$  上の fppf 層とみなす.  $G^D := \text{Hom}(G, \mathbb{G}_{m/S})$  を  $G$  の Cartier 双対とする (つまり,  $G^D$  は,  $S$  上の fpps 層  $S' \mapsto \text{Hom}_{S'\text{-group}}(G \times_S S', \mathbb{G}_{m/S'})$  を表現する  $S$  上の群スキーム).  $(G^D)^D \xrightarrow{\sim} G$  であることに注意. 標準的

な不変微分形式  $\frac{dT}{T} \in \omega_{\mathbb{G}_m}$  を用いて, Hodge-Tate 写像  $\text{HT}_G : G \mapsto \omega_{G^D}$  を

$$\text{HT}_G(S') : G^D(S') = \text{Hom}_{S''\text{-group}}(G \times_S S', \mathbb{G}_{m/S'}) \rightarrow \Gamma(S', \omega_{G \times_S S'}) : f \mapsto f^*\left(\frac{dT}{T}\right)$$

で定義される fpps 層の射とする.

例として,  $G = \mu_{p^n/S} = \text{Ker}(\mathbb{G}_{m/S} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathbb{G}_{m/S})$  のとき,  $G^D = (\mathbb{Z}/p^n)_{/S}$  (定数群スキーム) であり,  $\omega_G = (\mathcal{O}_S/p^n) \frac{dT}{T}$  となる. このとき,  $\text{HT}_G$  は  $\text{HT}_G(S') : \mathbb{Z}/p^n \rightarrow (\Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})/p^n) \frac{dT}{T} : 1 \mapsto \frac{dT}{T}$  となる写像になる. 特に,  $\text{HT}_G$  は fppf  $\mathcal{O}_S$  加群の同型  $\text{HT}_G \otimes \text{id} : G^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \omega_G$  を導く.

$p^w \in K$  が存在する  $w \in \mathbb{Q}_{>0}$ ,  $\mathcal{O}_K$  代数  $R$  に対して,  $R_w := R/p^w R$  とおく.  $G$  を  $\mathcal{O}_K$  上の  $p$ -可除群とする.

4.2.2. 通常  $p$  可除群.  $\mathfrak{X}$  を  $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$  上局所有限型な形式スキーム,  $G$  を  $\mathfrak{X}$  上の  $p$  可除群とする.  $n = 1$  に対して ( $\iff$  全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して),  $\mathfrak{X}$  上の有限平坦群スキームの完全列

$$0 \rightarrow G[p^n]^0 \rightarrow G[p^n] \rightarrow G[p^n]^{\text{ét}} \rightarrow 0$$

で  $G[p^n]^{\text{ét}}$ : エタール,  $G[p^n]^0$ : multiplicative type (つまり,  $(G[p^n]^0)^D$  がエタール) となるものが存在するとき,  $G$  を通常 (ordinary) という. このような拡大は (標準的同型を除いて) 一意に取れて, 従って,  $G^{\text{ét}} := \varinjlim_n G[p^n]^{\text{ét}}$ , 及び  $G^0 := \varinjlim_n G^0[p^n]$  も  $\mathfrak{X}$  上の  $p$  可除群になる.

この場合, Hodge-Tate 写像を用いると,  $(G[p^n]^0)^D$  と  $\omega_G$  と....(つづく).

4.2.3. Hasse 不変量.  $S$  を  $p\mathcal{O}_S = 0$  となるスキームとする.  $G$  を  $S$  上の  $p$  可除群 ( $p$ -divisible group) とする.  $\mathcal{O}_S$  加群  $M$  及び  $S$  上のスキーム  $X$  に対して, 絶対 Frobenius 写像  $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S : x \mapsto x^p$  による底変換をそれぞれ  $M^{(p)}$ ,  $X^{(p)}$  と表す.  $G$  の Verschiebung  $V : G^{(p)} \rightarrow G$  は,  $G$ ,  $G^{(p)}$  の不変微分形式の間への  $\mathcal{O}_S$  準同型  $V^* : \omega_G \rightarrow \omega_{G^{(p)}}$  を誘導する. 自然な同型  $\omega_{G^{(p)}} \xrightarrow{\sim} (\omega_G)^{(p)}$  が存在し,  $\omega_G$  は階数  $\dim G$  の射影的  $\mathcal{O}_S$  加群であるので,  $V^*$  の行列式写像  $\det(\omega_G) \rightarrow \det(\omega_{G^{(p)}}) \xrightarrow{\sim} (\det((\omega_G)^{(p)})) \xrightarrow{\sim} (\det(\omega_G))^{\otimes p}$  は  $\mathcal{O}_S \rightarrow (\det(\omega_G))^{\otimes(p-1)}$  を誘導する. この射による  $1 \in \mathcal{O}_S$  の像を  $\text{Ha}(G) \in (\det(\omega_G))^{\otimes(p-1)}$  と記し, これを  $G$  の Hasse 不変量と呼ぶ.

$G$  を  $\mathcal{O}_K$  上の  $p$  可除群とする.  $\mathcal{O}_{K,1} := \mathcal{O}_K/p$  とおく. 同型  $(\det(\omega_{G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,1}}))^{\otimes(p-1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{K,1}$  を取り,  $H \in \mathcal{O}_K$  を, この同型による  $\text{Ha}(G) := \text{Ha}(G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,1})$  の像の  $\mathcal{O}_K$  への持ち上げとする. このとき,  $\text{Hdg}(G) := \max\{v(H), 1\} \in [0, 1]$  と表し, これを  $G$  の Hodge 高さと呼ぶ ( $\text{Hdg}(G)$  は, 同型や持ち上げ  $H$  の取り方によらない).

$G$  が  $\mathcal{O}_K$  上のアーベル多様体のとき,  $\text{Ha}(G)$ ,  $\text{Hdg}(G)$  を  $G$  に付随する  $p$  可除群のそれらと定義する.

## 5. 形式的 BANACH 層と BANACH 層

5.1. 形式的 Banach 層.  $\mathfrak{X}$  を  $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$  上平坦かつ局所有限型な形式スキームとする. 正の整数  $n \geq 1$  に対して,  $\mathfrak{X}$  の法  $\varpi^n$  還元として得られる  $\text{Spec}(\mathcal{O}_K/\varpi^n \mathcal{O}_K)$  上のスキームを  $X_n$  と記す.

**定義 5.1.**  $\mathfrak{X}$  上の層の族  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  で以下の性質を満たすものを形式的 Banach 層 (formal Banach sheaf) と呼ぶ:

1.  $\mathfrak{F}_n$  は  $\mathcal{O}_K/\varpi^n$  上平坦な準接続  $\mathcal{O}_{X_n}$ -加群,
2. 全ての  $n \geq m$  に対して,  $i^*\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_m$  を満たす ( $i: X_m \hookrightarrow X_n$  は自然な閉埋め込みとする).

逆極限  $\varprojlim_n \mathfrak{F}_n$  として定義される  $\mathfrak{X}$  上の層を同じ記号で  $\mathfrak{F}$  と記す. 形式的 Banach 層  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  が平坦であるとは, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\mathfrak{F}_n$  が平坦  $\mathcal{O}_{X_n}$  加群となることとする.  $f: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  を  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$  上平坦かつ局所有限型な形式スキームの間の射,  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  を  $\mathfrak{X}$  上の形式的 Banach 層とする. このとき,  $\mathfrak{F}$  の  $f$  による引き戻しを  $f^*\mathfrak{F} := (f^*\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  で定義する. これは,  $\mathfrak{X}'$  上の形式的 Banach 層となる.

## 5.2. Banach 層.

**定義 5.2.**  $\mathcal{X}$  は  $K$  上のリジッド空間とする.  $\mathcal{X}$  上の  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  加群層  $\mathcal{F}$  が以下を満たすとき,  $\mathcal{F}$  を Banach 層という:

1.  $\mathcal{X}$  の各アフィノイド開部分集合  $U$  に対して,  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$  加群  $\mathcal{F}(U)$  は Banach  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$  加群になる,
2. 制限射は連続,
3.  $\mathcal{X}$  の許容的アフィノイド開被覆  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  があり, 各  $i \in I$  及び各  $V \subset U_i$  に対して, 制限射により誘導される射

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U_i)} \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

は  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)$  加群の同型になる.

上記3の条件を満たす許容的アフィノイド被覆  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  で, 各  $i \in I$  に対して  $\mathcal{F}(U_i)$  が射影的 Banach  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U_i)$  加群となるものが取れるとき,  $\mathcal{F}$  は射影的であるという.

$A$  を  $K$  上のアフィノイド代数とし,  $\mathcal{X}$  は  $K$  上の準コンパクトかつ準分離的なリジッド空間とする.  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{X} \times \mathrm{Spm}(A)$  上の Banach 層であるとする. このとき,  $H^0(\mathcal{X} \times \mathrm{Spm}(A), \mathcal{F})$  は自然な Banach  $A$  加群の構造を持つ.

**5.3. 形式的 Banach 層のリジッド生成ファイバー.**  $\mathfrak{X}$  を  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$  上の平坦かつ局所有限型な形式スキームとし,  $\mathcal{X}$  を  $\mathfrak{X}$  のリジッド生成ファイバーとする.  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  を  $\mathfrak{X}$  上の形式的 Banach 層とする.

$\mathfrak{F}$  は平坦であると仮定する. この仮定のもとで,  $\mathfrak{F}$  に付随する  $\mathcal{X}$  上の Banach 層  $\mathcal{F}$  を以下のようにして定義する. そのためには,  $\mathcal{X}$  の各準コンパクト (quasi compact) 開集合  $U$  に対して  $\mathcal{F}(U)$  を定義すればよい.  $U$  を  $\mathcal{X}$  の準コンパクト開集合とする. Raynaud の定理により準コンパクトかつ準分離的なリジッド解析的多様体は, 形式的スキームを許容的ブローアップにより局所化した圏を用いて記述できるので, ある許容的ブローアップ  $h: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  で  $U$  が  $\mathfrak{X}'$  の開集合  $U'$  の生成ファイバーとなるものを取りることができる. このとき  $\mathcal{F}(U)$  を

$$\mathcal{F}(U) := (h^*\mathfrak{F})(U') \otimes_{\mathcal{O}_K} K$$

によって定義する.  $\mathfrak{F}$ が平坦という仮定のもとで,  $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ は(標準的な同型を除いて)  $h: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ の取り方によらない ([AIP15]Lemma A.2.2.2). こうして定義された  $\mathcal{X}$  上の Banach 層  $\mathcal{F}$ を  $\mathfrak{F}$ のリジッド生成ファイバーと呼ぶ.

この構成を我々の設定に対して(つまり, 過収束保型層に対して)適用するためには, 構成を次のような(一般には平坦ではない)場合へ拡張する必要がある.  $g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ を  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ 上の平坦かつ局所有限型形式スキームの間の有限射とし, そのリジッド生成ファイバー(に誘導される射)を  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ と表す.  $\mathfrak{F}$ を  $\mathfrak{X}$ 上の形式的 Banach 層とし, そのリジッド生成ファイバーを  $\mathcal{F}$ とする. 有限群  $G$ が  $\mathfrak{X}$ に  $\mathcal{Y}$ 上の同型として作用し, かつ  $\mathfrak{F}$ もこの作用と両立する  $G$ の作用を持つとする. ここで,  $g_*$ は完全関手なので  $g_*\mathfrak{F} := (g_*\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は  $\mathfrak{Y}$ 上の形式的 Banach 層であることに注意する.

以上の設定で, 各  $n \in \mathbb{N}$ に対して  $\mathfrak{Y}$ 上の前層

$$\mathcal{U} \subset \mathfrak{Y} \mapsto (g_*\mathfrak{F}(\mathcal{U}))^G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\varpi^n$$

の層化を  $(g_*\mathfrak{F}_n)^G$ と表し,  $(g_*\mathfrak{F})^G := ((g_*\mathfrak{F}_n)^G)_{n \in \mathbb{N}}$ とおく.  $(g_*\mathfrak{F})^G$ は  $\mathfrak{Y}$ 上の(一般には平坦ではない)形式的 Banach 層になる.

**命題 5.3.** ([AIP15]Proposition A.2.2.4) 層  $(f_*\mathcal{F})^G$ は  $\mathcal{Y}$ 上の Banach 層になる. さらに, 各許容的ブローアップ  $h: \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$ と各開部分形式スキーム  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{Y}'$ に対して ( $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ をそのリジッド生成ファイバーとすると),

$$(f_*\mathcal{F})^G(\mathcal{V}) = h^*(g_*\mathfrak{F})^G(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{O}_K} K$$

が成り立つ. ここで,  $\mathcal{V}$ は  $\mathfrak{V}$ のリジッド生成ファイバーとする.

平坦な場合と同様に,  $(f_*\mathcal{F})^G$ を  $(g_*\mathfrak{F})^G$ のリジッド生成ファイバーと呼ぶ.

**注意 5.4.**  $\mathfrak{X}_{Iw}(p)$ を  $X_{Iw}(p)$ の  $p$ 進完備化として得られる  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ 上の形式スキームとする.  $\mathcal{X}_{Iw}(p)(v)$ のモデルとして,  $\mathfrak{X}_{Iw}(p)(v) \rightarrow \mathfrak{X}_{Iw}(p)$ を自然に定義することができる. [AIP15]では, まず,  $\mathcal{X}_{Iw}(p)(v)$ 上の形式的 Banach 層  $\mathfrak{w}_w^{\dagger, \kappa}$ を定義し, これのリジッド生成ファイバーとして  $\mathcal{X}_{Iw}(p)(v)$ 上の Banach 層  $\omega_w^{\dagger, \kappa}$ を定義している.

## REFERENCES

- [AIP15] F. Andreatta, A. Iovita, and V. Pilloni,  $p$ -adic families of Siegel modular cuspforms, Ann. of Math. (2) 181 (2015), no. 2, 623-697.