L 関数の微分値と志村多様体上のサイクル

千田雅隆

概要

Gross-Zagier 公式は modular 曲線上の Heegner 点の高さと L 関数の微分値を結びつける公式であった．この公式の高次元への一般化である数論的 Gan-Gross-Prasad 予想について解説する．

1 Gross-Zagier 公式

f を重さが 2 で level $\Gamma_0(N)$ の cuspidal Hecke-eigen newform とし, E を判別式が $-D$ の虚二次体とする．E の ideal 類群 $\mathrm{Cl}(E)$ の指標 $\chi : \mathrm{Cl}(E) \to \mathbb{C}^\times$ から定まる重さ 1, level $\Gamma_1(D)$ の保型形式を g_χ と書くことにする．このとき, g_χ は $g_\chi(z) = \sum_{A \in \mathrm{Cl}(E)} \chi(A)\theta_A(z)$ と書くことができる．ただし $\theta_A(z) = (\#\mathcal{O}_E^\times)^{-1} + \sum_{\mathfrak{a} \in A} e^{2\pi i \cdot N\mathfrak{a} \cdot z}$. $L(f \otimes g_\chi, s) = L(\rho_f \otimes \mathrm{Ind}_E^{\mathbb{Q}}\chi, s)$ を f と g_χ の Rankin-Selberg L 関数とする．さらに f と E は Heegner 条件を満たすとする．つまり ℓ が N の素因子ならば ℓ は E で分解すると仮定する．このとき $L(f \otimes g_\chi, s)$ の関数等式の符号は -1 となる．

定理 1（Gross-Zagier 公式）

$$\langle P_\chi(f), P_\chi(f)\rangle_{NT} = \frac{\#\mathrm{Cl}(E) \cdot \#(\mathcal{O}_E^\times/\{\pm 1\})^2 \cdot |D|^{1/2}}{8\pi^2 \langle f, f\rangle_{Pet}} L'(f \otimes g_\chi, 1)$$

が成り立つ． ただし, $P_\chi(f)$ は modular 曲線 $X_0(N)$ 上の Heegner 点の χ-部分の f-isotypic component, $\langle\ ,\ \rangle_{NT}$ は Néron-Tate の高さ pairing であり, $\langle\ ,\ \rangle_{Pet}$ は Petersson 内積を表す.

この公式から特に $\langle P_\chi(f), P_\chi(f)\rangle_{NT} \neq 0$ と $L'(f \otimes g_\chi, 1) \neq 0$ が同値であることが分かる.

2 Beilinson-Bloch の高さ pairing

X を代数体 F 上の滑らかで射影的な代数多様体とする．$d = \dim X$ とおく.

$$CH^i(X) = \{Z : \text{余次元が } i \text{ の代数的サイクル}\}/\sim_{\mathrm{rat}}$$

を X の Chow 群と呼ぶ．$CH^i(X)_0$ を余次元が i で homological に自明なサイクルの (有理) 同値類のなす部分群とする．古典的には 0-サイクルと divisor の間には高さ pairing が定義されていたが, それを任意の余次元に拡張したのが Beilinson-Bloch の高さ pairing である．Beilinson と

Bloch はそれぞれ独立に高さ pairing を構成しているが, それらは同じ pairing を定めると予想されている. ここでは Bloch による結果を紹介する. まず X に関して次のような仮定をおく.

仮定 2　X は $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_F$ 上の flat, proper な regular model $\mathscr{X}$ を持つ.

geometric point $p \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_F$ に対して Chern 指標 $ch_p : K_0(X)_{\mathbb{Q}} \to \bigoplus_r H^{2r}(X_p, \mathbb{Q}_\ell)$ が定まる. geometric generic point q を一つとる.

仮定 3　$a \in K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ が $ch_q(a) = 0$ を満たすとき, a の $\mathscr{X}$ へのlifting $\tilde{a} \in K_0(\mathscr{X})$ で全ての geometric point p に対して $ch_p(\tilde{a}) = 0$ となるものが存在する.

この仮定の下で Bloch は次のような pairing を構成した.

定理 4　以下の性質を満たす, 代数対応に関して functorial な pairing

$$\langle\ ,\ \rangle_{BB} : CH^i(X) \times CH^{d+1-i}(X) \to \mathbb{R}$$

が唯一つ存在する.

1. $i = d$ のときは古典的な高さ pairing と一致する.
2. 任意の $(a, b) \in CH^i(X) \times CH^{d+1-i}(X)$ に対して $[F : \mathbb{Q}]\langle a, b\rangle_{BB} = \sum_v \langle a, b\rangle_v$. 但し $\langle\ ,\ \rangle_v$ は v での局所高さ pairing.

局所高さ pairing についてもう少し説明しておく. F の素点 v を固定する. $Z^i(X)$, $Z_i(X)$ をそれぞれ余次元が i, 次元が i の代数的サイクルのなす集合とする. $(Z^i(X) \times Z_{i-1}(X))'$ を disjoint support を持つサイクルの組 (a, b) で a の v での geometric closed fiber の cycle 写像での像が自明になっているようなものの集合とする. 局所高さ pairing

$$\langle\ ,\ \rangle_v : (Z^i(X) \times Z_{i-1}(X))' \to \mathbb{R}$$

は v が有限素点のとき, $\mathbb{Q} \cdot \log Nv$ に値をとり, さらに X が v で good reduction を持つとき, 像は $\mathbb{Z} \cdot \log Nv$ に入る. 局所高さ pairing$\langle\ ,\ \rangle_v$ は次の性質によって特徴付けられる.

1. $\langle\ ,\ \rangle_v$ は双線形.
2. C を $X \times Y$ の代数対応としたとき, $\langle C^* a, b\rangle_v = \langle a, C_* b\rangle_v$ $(a \in Z^{\cdot}(X), b \in Z_{\cdot}(Y))$.
3. v が有限素点で a, b の $\mathscr{X}$ での閉包が disjoint support を持つとき, $\langle a, b\rangle_v = 0$.
4. a, b が点と divisor のとき Néron の局所高さ pairing に等しい.
5. $\langle a, b\rangle_v = \langle b, a\rangle_v$.
6. v が有限素点で X が v で good reduction を持つとき, a, b の $\mathscr{X}$ での閉包 $\overline{a}, \overline{b}$ が proper に交わっていれば, $\langle a, b\rangle_v$ は a と b の交点数に等しい.

3 数論的 Gan-Gross-Prasad 予想

F を総実代数体とし, E を F の CM 二次拡大または $E=F$ とする. E が F の CM 二次拡大のとき, σ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元とし, $E=F$ のときは σ は identity とする. V_0 を E 上の有限次元ベクトル空間として, $\langle\ ,\ \rangle : V_0 \times V_0 \to E$ を V_0 上の σ-双線形対称形式とする. つまり $\langle\ ,\ \rangle$ は $\langle \alpha v + \beta w, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle + \beta\langle w, u\rangle$ 及び $\langle u, v\rangle^\sigma = \langle v, u\rangle$ を満たすとする. このとき F 上の代数群 $G(V_0)$ を

$$G(V_0) = \{g \in \mathrm{GL}(V_0) \mid \langle gv, gw\rangle = \langle v, w\rangle \text{ for any } v, w \in V_0\}^\circ$$

によって定める. $E=F$ のときは $G(V_0)=\mathrm{SO}(V_0)$ は直交群となり, E が F の CM 二次拡大のときは $G(V_0)=\mathrm{U}(V_0)$ は unitary 群となる. W_0 を $\langle\ ,\ \rangle$ が非退化な V_0 の部分空間とし, $W_0^\perp$ は 1 次元であると仮定する. 以下, このような (V_0, W_0) を固定し $G_0 = G(V_0)\times G(W_0)$, $H_0 = G(W_0)$ とおく. $\pi_0 = \pi_{V_0}\otimes\pi_{W_0}$ を $G_0(\mathbb{A})$ の irreducible, cuspidal, tempered かつ generic な保型表現とする (ただし $\mathbb{A}$ は F 上の adele 環). $\pi_0 = \otimes'_v \pi_{0,v}$ と分解する. このとき局所 Langlands(-Vogan) 対応によって各局所成分 $\pi_{0,v}$ に対して L-parameter $\phi_v : WD(F_v) \to {}^L G$ が対応すると期待されている. $G = \mathrm{SO}(V_0)\times\mathrm{SO}(W_0)$ のときは ${}^L G = \mathrm{O}(M)\times\mathrm{Sp}(N)$ となる. ここで M, N は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間であり, $\dim V_0 = 2n+1$ のときは $\dim M = \dim N = 2n$, $\dim V_0 = 2n$ のときは $\dim M = 2n$, $\dim N = 2n-2$ となる. また $G = \mathrm{U}(V_0)\times\mathrm{U}(W_0)$ のときは ${}^L G = (\mathrm{GL}(M)\times\mathrm{GL}(N)) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$ となる. $\dim V_0 = n$ のとき M, N は $\dim M = n$, $\dim N = n-1$ となる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である. ${}^L G$ の有限次元表現 R を決めると局所 L 因子 $L_v(\pi_0, R, s) = L(R\circ\phi_v, s)$ や局所 ε 因子 $\varepsilon_v(\pi_0, R, s)$ が定まる. $G=\mathrm{SO}(V_0)\times\mathrm{SO}(W_0)$ のときは $R = M\otimes N$, $G = \mathrm{U}(V_0)\times\mathrm{U}(W_0)$ のときは $R = \mathrm{Ind}_G^{{}^L G}(M\otimes N)$ とおく.

予想 5（局所 Gan-Gross-Prasad 予想） ある $V_v \supset W_v$ に付随する $G_{0,v}\supset H_{0,v}$ の pure inner form $G_v = G(V_v)\times G(W_v) \supset H_v = G(W_v)$ と L-parameter ϕ_v を持つ G_v の既約表現 π_v (つまり Vogan L-packet の元) が唯一つ存在して

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{H_v}(\pi_v, \mathbb{C}) \neq 0$$

となる.

この予想に対して, 直交群の場合は Waldspurger (v が有限素点の場合), unitary 群の場合は Beuzart-Plessis により大きく研究が進展している (skew-hermitian の場合は Gan-市野, symplectic-metaplectic の場合は跡部さん).

$\mathrm{HW}(V_v)$ を V_v の Hasse-Witt 不変量を表すことにする. このとき

$$\frac{\mathrm{HW}(V_v)}{\mathrm{HW}(V_{0,v})} = \varepsilon_v(\pi_0, R, 1/2)\det N_v(-1)^{\frac{1}{2}\dim M}$$

となる.

$$S = \#\{v : F\text{ の素点} \mid \varepsilon_v(\pi_0, R, 1/2)\det N_v(-1)^{\frac{1}{2}\dim M} = 1\}$$

とおけば $\varepsilon(\pi_0, R, 1/2) = (-1)^{\#S}$ となる．

まず始めに $\#S$ は偶数であると仮定する．このときは F 上の代数群 G, H が存在して $G(\mathbb{A}) = \prod'_v G_v$, $H(\mathbb{A}) = \prod'_v H_v$ となる． $\mathscr{A}_0(G)$ を G 上の cusp form のなす空間とする． 線形形式 $F : \mathscr{A}_0(G) \to \mathbb{C}$ を

$$f \mapsto \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} f(h)\,dh$$

によって定める．このとき次が成り立つと予想されている．

予想 6（大域 Gan-Gross-Prasad 予想） $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ は重複度 1 で $\mathscr{A}_0(G)$ に現れる $G(\mathbb{A})$ 上の既約 tempered な保型表現になっていると仮定する．このとき次は同値.

1. F の π への制限は non-zero.
2. $L(\pi_0, R, 1/2) \neq 0$.

この予想について, G が unitary 群の場合は Wei Zhang による結果がある．

一方, $\#S$ が奇数であれば $L(\pi_0, R, s)$ の関数等式の符号は -1 になり $L(\pi_0, R, 1/2) = 0$ となる．以下 $\#S$ は奇数であると仮定する．このとき $G_{\mathbb{A}} = \prod'_v G_v$ は incoherent である．つまり F 上定義された代数群の base change にはなっていない．$G_{\mathbb{A}}$ の表現 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ について考える．

仮定 7
1. 全ての無限素点 v に対し, G_v はコンパクト.
2. 全ての無限素点 v で π_v は自明表現.

大域的な対象との関係を付けるため $G_{\mathbb{A}}$ を少しだけ変形したものを考える．まず始めに直交群の場合を考える．$\dim V_0 \geqq 3$ とする．実素点 w を一つ固定する．$V_w \supset W_w$ の符号がそれぞれ $(n, 0)$, $(n-1, 0)$ のとき $V_w^* \supset W_w^*$ を符号が $(n-3, 2)$, $(n-2, 2)$ の空間として, F 上の空間の組 $V \supset W$ を局所化が $V_v \supset W_v (v \neq w$ のとき$)$, $V_w^* \supset W_w^* (v = w$ のとき$)$ となるように取る．これにより $H = G(W) \hookrightarrow G = G(V) \times G(W)$ が定まり, さらに志村多様体の埋め込み $\mathrm{Sh}_{H,\infty} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{G,\infty}$ を得る．このとき $\mathrm{Sh}_{G,\infty}$ の次元は $2n-5$, $\mathrm{Sh}_{H,\infty}$ の次元は $n-3$ である．直交群の場合は $m = n-1$ とおく．

次に unitary 群の場合を考える．$\dim V_0 \geqq 2$ とする．実素点 w と埋め込み $z : E_w \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定する．$V_w \supset W_w$ の符号がそれぞれ $(n, 0)$, $(n-1, 0)$ のとき $V_w^* \supset W_w^*$ を符号が $(n-2, 1)$, $(n-1, 1)$ の空間として, F 上の空間の組 $V \supset W$ を局所化が $V_v \supset W_v (v \neq w$ のとき$)$, $V_w^* \supset W_w^* (v = w$ のとき$)$ となるように取る．これにより直交群の場合と同様に $H = G(W) \hookrightarrow G = G(V) \times G(W)$ が定まり, 志村多様体の埋め込み $\mathrm{Sh}_{H,\infty} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{G,\infty}$ が得られる．この場合は $\mathrm{Sh}_{G,\infty}$ の次元は $2n-3$, $\mathrm{Sh}_{H,\infty}$ の次元は $n-2$ となる．unitary 群の場合は $m = n$ とおく．

$\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ と書き, $\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, H^{2m-3}(\mathrm{Sh}_{G,\infty}, \mathbb{C})) \neq 0$ と仮定する． $\mathcal{CH} = \varinjlim_{K_f} CH^{m-1}(\mathrm{Sh}_{G,\infty})_0^{K_f}$ への $G(\mathbb{A}_f)$ の作用を考える．この作用は admissible になると期待されている．保型表現 π_0 に対する BSD 予想の一般化は次のように定式化される．

予想 8（Bloch-Beilinson）

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, \mathcal{CH}) = \mathrm{ord}_{s=1/2} L(\pi_0, R, s).$$

部分志村多様体 $\mathrm{Sh}_{H,\infty}$ は余次元 $m-1$ の $\mathrm{Sh}_{G,\infty}$ のサイクルを定める．よって Beilinson-Bloch の高さ pairing $\langle\ ,\ \rangle_{BB}$ は線形形式 $\mathcal{F} : \mathcal{CH} \to \mathbb{C}$ を定める．

予想 9（数論的 Gan-Gross-Prasad 予想） 次の二つは同値となる．

1. π_f は $\mathcal{CH}$ に重複度 1 で現れ, $\mathcal{F}$ は π_f 上 non-zero.
2. $L'(\pi_0, R, 1/2) \neq 0$.

G が unitary 群の場合は Wei Zhang による数論的基本補題と相対跡公式を用いた approach がある．

4 $G = \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(3) \supset H = \mathrm{SO}(3)$ の場合

F を総実代数体とし, $\mathbb{A}$ を F 上の adele 環とする．S を F の素点の有限集合で全ての無限素点を含んでいるようなものとする．$\#S$ は奇数であると仮定する．F の実素点 w を一つ固定する．B を $S \setminus \{w\}$ の素点で分岐し, それ以外の素点では不分岐な F 上の四元数環とし, $G = B^\times \times B^\times \times B^\times$, $H = B^\times$とおく． $K_f \subset H(\mathbb{A}_f)$ を open compact 部分群とする． このとき K_f に対応する志村曲線 Sh_{H,K_f} が定まる． $i = 1,2,3$ に対し π_i を中心指標 ω_i を持つ $H(\mathbb{A})$ の保型表現で $\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A}_f)}(\pi_{i,f}, H^1(\mathrm{Sh}_{H,K_f}, \mathbb{C})) \neq 0$ となるようなものとする．さらに $\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 = 1$ と仮定する．対角サイクル $\Delta = \mathrm{Im}(\mathrm{Sh}_{H,K_f} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{G,K_f \times K_f \times K_f})$ を変形し, $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$-component をとることで $\Delta(\pi) \in CH^2(\mathrm{Sh}_{G,K_f \times K_f \times K_f})_0$ が定義できる．

定理 10（Yuan-Zhang-Zhang） S は少なくとも 2 つの有限素点を含み, π は S の外では不分岐であると仮定する．このとき次の二つは同値.

1. $\langle \Delta(\pi), \Delta(\pi) \rangle_{BB} \neq 0$.
2. $L'(\pi, 1/2) \neq 0$.

Yuan-Zhang-Zhang は実際には explicit な関係式を与えている．証明は GL(2) の場合の Gross-Zagier 公式の証明と同様に両辺を独立に計算して一致を示す.