志村多様体の整モデル

清水　康司 *

概要

数論への応用に向けて志村多様体の整モデルについて解説する．Siegel モジュラー多様体の整モデルの例からはじめて，整正準モデルの定義を紹介し，不分岐 PEL 型やアーベル型の志村多様体の整正準モデルについて説明する．また議論に必要な p 可除群や整 p 進 Hodge 理論に関連する話題についても簡単に触れる．

1　はじめに

複素上半平面の合同部分群による商として得られるモジュラー曲線は複素数体上の代数曲線としての構造をもつ．さらにモジュライ解釈によりモジュラー曲線は代数体上定義されるので，その整モデルを考え，還元の様子などの幾何学的性質を調べることができる．志村や Deligne による保型形式に伴う Galois 表現の構成，Mazur による有理数体上の楕円曲線の等分点の構造の決定，Gross–Zagier 公式などモジュラー曲線の整モデルの研究は様々な結果をもたらしてきた．本稿では数論への応用に向けてモジュラー曲線の一般化である志村多様体の整モデルについて解説する．

志村データから定まる Hermite 対称領域の数論的商の直和は代数多様体の構造（志村多様体）をもち，リフレックス体とよばれる代数体上定義されることを思い出そう．モジュラー曲線の場合と同様に志村多様体のさらなる幾何的な性質あるいはそのエタールコホモロジーを調べるために志村多様体の整モデルを考えたい．例えばモジュラー曲線や Siegel モジュラー多様体はその自然なモジュライ解釈を考えることで，$\mathbb{Z}$ 上準射影的な整モデルをもつことがわかる．一般の志村多様体については自然なモジュライ解釈が知られているわけではないので「自然な整モデル」を定式化する

* Institute for Advanced Study　e-mail: `kshimizu@ias.edu`

ことからして自明ではない．志村多様体がよい還元をもつ場合は延長条件という普遍性を用いて自然な整モデルを定義することができる．この整モデルは整正準モデルとよばれ，本稿のテーマとなる．

より詳しく本稿の内容を説明しよう．第 2 節では GSp に伴う志村多様体，すなわち Siegel モジュラー多様体の整モデルを扱う．[越川] で扱われたように Siegel モジュラー多様体はアーベル多様体とその偏極およびレベル構造からなるモジュライ解釈をもつ．そこで第 2 節では主偏極の場合に $\mathbb{Z}$ 上でそのようなモジュライ解釈を考え（定義 2.4），その表現可能性（第 2.2 小節）および平滑性（第 2.3 小節）を議論する．

第 3 節ではよい還元をもつ素点での志村多様体の整モデルの満たすべき性質を考えることで，整正準モデルという概念を導入する（定義 3.1）．これは整モデルが平滑であること（よい還元をもつこと）と，延長条件についての普遍性を満たすことを要請するものである．整正準モデルを導入したのちはアーベルスキームの延長について復習し，第 2 節で扱った Siegel モジュラー多様体の整モデルが整正準モデルになることをみる（定理 3.14）．

第 4 節では不分岐 PEL 型志村多様体について扱う．不分岐 PEL 型志村多様体は Galois 表現の構成などでも頻繁に使われる重要なクラスの志村多様体であり，Kottwitz らにより整モデルが構成され，その還元も調べられている．第 4 節では Kottwitz の整モデルの構成を紹介し，その整モデルが整正準モデルになることをみる（定理 4.21）．なおこの節で扱う整モデルは例えば [三枝] や [千田] において応用される．

第 5 節ではアーベル型志村多様体の整正準モデルの存在についての結果を紹介する．これは [今井] で説明されたような Deligne の議論を用いることで Hodge 型志村多様体の整正準モデルの構成に帰着される．そこで第 5 節では Hodge 型志村多様体の整正準モデルに焦点を当てる．Siegel モジュラー多様体の整正準モデルを用いて Hodge 型志村多様体の整モデルを定義し，そのモデルの平滑性を示すことが構成のポイントとなる．第 5 節では p 可除群と整 p 進 Hodge 理論を用いて平滑性を示すという [Kis10] の議論を紹介する．

付録 A と付録 B では第 5 節で使う道具について簡単に解説している．付録 A では p 可除群と Dieudonné 理論の概要を説明し，その応用となる p 可除群の変形について必要となることをまとめた．付録 B は Kisin による整 p 進 Hodge 理論について最低限のことをまとめている．残念ながら一般の p 進 Hodge 理論や，整 p 進 Hodge 理

論の証明について触れることはできなかった．これらについては日本語でも解説があるのでそれらを参照していただきたい．

第 2 節から第 5 節においては議論のおおまかな流れがわかるよう必要に応じて証明の概略を説明するようにした．一方で，アーベルスキームの性質や，幾何学的不変式論，変形理論などの重要な事実については結果を引用するだけになってしまった．本稿で詳しく説明できなかったことについてはできるかぎり参考文献をあげるようにしたので必要に応じてそれらを参照していただきたい．

2 Siegel モジュラー多様体の整モデル

この節では Siegel モジュラー多様体をモジュライ問題として定義し，レベルが大きいときには $\mathbb{Z}$ 上の準射影的スキームで表現されることをみる．

2.1 Siegel モジュラー多様体の定義

以下では特に断らない限り，局所ネータースキームのことを単にスキームということにする．スキーム S に対して S スキームのなす圏を $\mathrm{Sch}_{/S}$ であらわす．アフィンスキーム $S = \operatorname{Spec} R$ に対しては $\mathrm{Sch}_{/S}$ を $\mathrm{Sch}_{/R}$ とかく．さらに**射影的アーベルスキームを単にアーベルスキームということにする**[*1]．アーベル多様体やアーベルスキームについての基礎事項は [石塚] を参照せよ．

この小節では Siegel モジュラー多様体を主偏極付きアーベルスキームとその等分点上のシンプレクティック・レベル構造の組のなすモジュライとして定義する．まずはシンプレクティック・レベル構造について復習しよう．N を正整数とする．

定義 2.1　シンプレクティック $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群とは, 次のデータからなる 3 つ組 (L, M, e) のことをいう．

- L は有限階数自由 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群．
- M は階数 1 の自由 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群．
- $e\colon L \times L \to M$ は交代 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 線形形式．

*1 S が局所ネーターでない場合や射影的でないアーベルスキームを扱う場合については [Lan13, 1.3.2.4, 1.4.3] を参照せよ．

シンプレクティック $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群の射 $(L_1, M_1, e_1) \to (L_2, M_2, e_2)$ とは，$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 準同型の組 $(f\colon L_1 \to L_2, g\colon M_1 \to M_2)$ であって，

$$e_2\bigl(f(x), f(y)\bigr) = g\bigl(e_1(x, y)\bigr) \qquad (x, y \in L_1)$$

を満たすもののことをいう．さらに f, g がともに同型のとき，シンプレクティック $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群の同型射であるという．

同様にしてシンプレクティック $\mathbb{Z}$ 加群あるいはシンプレクティック $\mathbb{A}_f$ 加群やその間の射も定義することができる (もちろん一般の環上でも同様に定義できる．[Lan13, Definition 1.1.4.7] も参照せよ)．また，スキームを関手としてみることで，シンプレクティック $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群スキームやその間の射も自然に定義することができる．

定義 2.2 スキーム S 上の相対次元 n の主偏極付きアーベルスキーム $(A \to S, \lambda\colon A \to A^\vee)$ を考える．(A, λ) の**シンプレクティック・レベル** N **構造**とは，S 上の有限平坦群スキームの同型射 $\eta_N\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2n} \to A[N]$ と $\alpha\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S \to \mu_{N,S}$ の組 (η_N, α) であって，シンプレクティック $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群スキームの同型

$$\bigl((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2n}, (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S, e_{\mathrm{std}}\bigr) \cong \bigl(A[N], \mu_{N,S}, e_{\lambda,N}\bigr)$$

を定めるもののことをいう．ここで e_{std} は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2n}$ の標準的なシンプレクティック構造 $e_{\mathrm{std}}\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2n} \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2n} \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S, ((u,v),(z,w)) \mapsto u\,{}^t w - v\,{}^t z$ $(u, v, z, w \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n)$ であり，$e_{\lambda,N}$ は主偏極 λ に伴う $A[N]$ 上の Weil ペアリングである．なお以後は (η_N, α) を単に η_N とかくことが多い．

注意 2.3 スキーム S に対してシンプレクティック・レベル N 構造をもつアーベルスキームが存在するとする．このとき定義より S 同型 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S \cong \mu_{N,S}$ が存在する．よって $\mathcal{O}_S$ は 1 の原始 N 乗根をもち，$N \in \mathcal{O}_S^\times$ となる．

Siegel モジュラー多様体のモジュライ問題を定義しよう．n を正整数とする．

定義 2.4 関手 $\mathcal{A}_{n,N}\colon \mathrm{Sch}_{/\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ をスキーム S に対し組 (A, λ, η_N) の同型類のなす集合を対応させるものとする．ただし，

- A は S 上の相対次元 n のアーベルスキーム．
- $\lambda\colon A \to A^\vee$ は A の主偏極．
- $\eta_N\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2n} \to A[N]$ は A のシンプレクティック・レベル N 構造．

組 (A, λ, η_N) と (A', λ', η'_N) が同型であるとは，アーベルスキームの同型 $f\colon A \to A'$ であって，$\lambda = f^\vee \circ \lambda' \circ f$ および $\eta'_N = f \circ \eta_N$ を満たすものが存在することをいう．

シンプレクティック・レベル N 構造の存在より関手の射 $\mathcal{A}_{n,N} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ は $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N]$ を経由することに注意しよう．

次の定理を示すことがこの節の目標である．

定理 2.5 $N \geq 3$ のとき $\mathcal{A}_{n,N}$ は $\mathbb{Z}$ 上滑らかな準射影的スキームで表現される．スキーム $\mathcal{A}_{n,N}$ を **Siegel モジュラー多様体**とよぶ．

なお $N = 1, 2$ のときも $\mathcal{A}_{n,N}$ は Deligne–Mumford スタックになり粗モジュライスキームをもつことが証明からわかる．

注意 2.6 モジュライ問題に出てくる偏極やレベル構造の定義を変えることでより一般の Siegel モジュラー多様体を考えることもできる．より一般の Siegel モジュラー多様体でもレベルを十分大きくとると準射影的スキームで表現される．一方で，本節で扱う Siegel モジュラー多様体が滑らかであることは，偏極として主偏極のみを扱っていること，シンプレクティック・レベル構造を考えていることに基づく結果であり，一般には成立しない（例えばモジュラー曲線を考えよ）．

より一般の志村多様体 $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ についても G や K の条件により滑らかな整モデルをもつとは限らない．第 3 節では滑らかな整モデルについて整正準モデルという性質を導入し，その後は滑らかな整モデルをもつことが期待される条件を G および K に課して議論を行う．

注意 2.7 本稿の定義と文献の定義との関連について簡単に述べておこう．

- 定義 2.4 で導入した関手 $\mathcal{A}_{n,N}$ は $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \setminus \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N]$ 上では空である．シンプレクティック・レベル N 構造の定義を変更して $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n_S \times \mu^n_{N,S}$ と $A[n]$ を比べることにすると，対応する関手は $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \setminus \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N]$ 上でも空でなく通常（ordinary）アーベル多様体をとらえることができる．
- Siegel モジュラー多様体のモジュライ問題は定義 2.4 のようにアーベルスキームの同型類を用いる他にも，同種類を用いる方法もある．モジュライの表現可能性を示す際には同型類を用いる方が便利であるが，志村多様体の文脈では同種類を考えることも多い．Siegel モジュラー多様体の同種類による解釈については定義 2.29 を参照せよ．

- 定義 2.4 では主偏極の場合のみを扱っているが，より一般の偏極についてもモジュライ問題を定めることができる．これについては定義 2.31 も参照せよ．
- [MFK94] の本文ではシンプレクティック・レベル構造は考えていない（[MFK94, Definition 7.2]）．なお付録（[MFK94, Appendix to Chapter 7-A]）では通常アーベル多様体をとらえるシンプレクティック・レベル構造のモジュライ問題について簡単に解説している．
- [FC90] では 2 箇所でややことなる定義が紹介されている（[FC90, I.1.8, IV.6.1-6.2]）．[FC90, IV.6.1] のモジュライ問題は $\mathbb{Z}[1/N, \zeta_N]$ 上で定義されている（1 の原始 N 乗根 $\zeta_N \in \mathbb{C}$ を固定している）．これは本稿の $\mathcal{A}_{n,N}$ を

  $$\mathcal{A}_{n,N}(S) \to \bigl(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N, \zeta_N]\bigr)(S)\colon \bigl(A, \lambda, (\eta_N, \alpha)\bigr) \mapsto \eta_N(1) = \zeta_N$$

  により $\mathbb{Z}[1/N, \zeta_N]$ のモジュライ問題としてみれば一致する ($\mathbb{Z}[1/N]$ スキーム S について構造射 $S \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N, \zeta_N]$ を与えることは $\mathcal{O}_S$ の 1 の原始 N 乗根を 1 つ指定することに他ならない)．
- [GN09] の定義を主偏極の場合に考えたものは本稿の定義と一致する（[GN09, 2.3]）．
- [Lan13] では PEL 構造付きのアーベルスキームのモジュライ問題を考えている．本稿の定義 2.4 との関連については [Lan13, 1.3.6.1] とその後の段落を参照せよ．

以下では定理 2.5 の証明の概略を述べる．まず第 2.2 小節で Hilbert スキームの理論と幾何学的不変式論を用いて $\mathcal{A}_{n,N}$ が準射影的スキームで表現されることをみる．その後，第 2.3 小節ではアーベルスキームの変形理論の結果を紹介し，$\mathcal{A}_{n,N}$ が滑らかであることをみる．なお第 2.4 小節で定理 2.5 の別証明の方針についても簡単に説明している．

2.2 $\mathcal{A}_{n,N}$ の表現可能性の証明

この小節では [MFK94] にしたがって $\mathcal{A}_{n,N}$ の表現可能性の証明を紹介する．

S をスキームとし，$\pi\colon A \to S$ を S 上の相対次元 n のアーベルスキーム，$\mathcal{P}$ を $A \times A^\vee$ 上の Poincaré 束とする．

まずアーベルスキームのコホモロジーについて思い出しておこう．

定理 2.8 $\mathcal{L}$ を A 上の π に関して豊富な可逆層とする．このとき次が成り立つ．

(1) $i > 0$ に対し，$R^i\pi_*\mathcal{L} = 0$.
(2) $\pi_*\mathcal{L}$ は S 上の局所自由層.
(3) $\mathcal{L}$ の定める偏極 $\phi_{\mathcal{L}}\colon A \to A^\vee$ を考える．$\pi_*\mathcal{L}$ の階数を r とするとき，$\phi_{\mathcal{L}}$ の次数は r^2 である．
(4) $k \geq 3$ に対して，$\mathcal{E} := \pi_*\mathcal{L}^{\otimes k}$ は閉埋め込み $A \to \mathbb{P}_S(\mathcal{E})$ を定める．

証明 [MFK94, Proposition 6.13] を参照せよ．なお S が代数閉体のスペクトラムのときは [Mum70, §16-17] にも説明がある． □

さて A の主偏極 $\lambda\colon A \to A^\vee$ が 1 つ与えられたとする．λ を用いて A の射影空間への閉埋め込みを構成する議論を復習しよう．$\mathcal{L}_\lambda = (\mathrm{id}_A, \lambda)^*\mathcal{P}$ および $\mathcal{E}_\lambda = \pi_*(\mathcal{L}_\lambda^{\otimes 3})$ とおく．このとき次が成り立つ．

命題 2.9 $\mathcal{E}_\lambda$ は S 上の階数 6^n の局所自由層であり，閉埋め込み $A \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathcal{E}_\lambda)$ を定める．またこの閉埋め込みの（変数 t についての）Hilbert 多項式は $6^n t^n$ である．

証明には次の事実を用いる（例えば [MFK94, Proposition 6.10] を参照せよ）．

事実 2.10 $\mathcal{L}_\lambda$ の定める偏極 $\phi_{\mathcal{L}_\lambda}\colon A \to A^\vee$ は 2λ に等しい．

命題 2.9 の証明 事実 2.10 より $\phi_{\mathcal{L}_\lambda^{\otimes 3}} = 6\lambda$ である．λ は主偏極であったので 6λ の次数は 6^{2n} となる，よって，命題の前半の主張は定理 2.8 (2)-(4) よりしたがう．また同様にして任意の $k \geq 1$ に対して $\mathcal{E}_\lambda = \pi_*(\mathcal{L}_\lambda^{\otimes 3k})$ は階数 $(6k)^n = 6^n k^n$ の局所自由層であり，さらに定理 2.8 (1) より $i > 0$ に対して $R^i\pi_*(\mathcal{L}_\lambda^{\otimes 3k}) = 0$ となる．よって，Hilbert 多項式は $6^n t^n$ である． □

簡単のため $m = 6^n - 1$ とおく．局所自由層 $\mathcal{E}_\lambda$ の自明化を固定することは S 同型 $\Phi\colon \mathbb{P}_S(\mathcal{E}_\lambda) \to \mathbb{P}^m_S$ を定めることに他ならず，これは閉埋め込み $A \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathcal{E}_\lambda) \to \mathbb{P}^m_S$ を定める．このような S 同型 Φ を A の**線形剛化 (linear rigidification)** とよぶ．このとき対応する閉埋め込みの Hilbert 多項式は $(m+1)t^n$ となる．

線形剛化があると A は $\mathbb{P}^m_S$ の閉部分スキームとみなせる．Hilbert 多項式が $(m+1)t^n$ となる $\mathbb{P}^m_S$ の閉部分スキームは Hilbert スキームにより表現されるので，まずは $\mathcal{A}_{n,N}$ に出てくるデータ (A, λ, η_N) にさらに線形剛化 Φ を加えたモジュライ関手を考え，その表現可能性について調べることにする．

定義 2.11 $\mathcal{H}_{n,N}\colon \mathrm{Sch}_{/\mathbb{Z}} \to \mathrm{Set}$ をスキーム S に対し組 $(A, \lambda, \eta_N, \Phi)$ の同型類を対応させる関手とする．ただし，

- $A \to S$ は相対次元 n のアーベルスキーム．
- $\lambda\colon A \to A^\vee$ は A の主偏極．
- $\eta_N\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_S \to A[N]$ は A のシンプレクティック・レベル N 構造．
- $\Phi\colon \mathbb{P}_S(\mathcal{E}_\lambda) \to \mathbb{P}^m_S$ は A の線形剛化．

上の対応が関手を定めることをみるためには線形剛化が底変換と整合的であることを示す必要がある．そのためには S 上の組 $(A, \lambda, \eta_N, \Phi)$ とスキームの射 $f\colon T \to S$ に対して，$f^*\mathcal{E}_\lambda \cong \mathcal{E}_{f^*\lambda}$ となることをいえばよい．これは定理 2.8 (1) と，コホモロジーと底変換の定理からしたがう．また線形剛化を忘却することにより自然な関手の射 $\mathcal{H}_{n,N} \to \mathcal{A}_{n,N}$ があることに注意しよう．

さて $\mathcal{H}_{n,N}$ の表現可能性については次が成り立つ．

定理 2.12 $\mathcal{H}_{n,N}$ は $\mathbb{Z}$ 上準射影的なスキームで表現される．

定理 2.12 は以下で述べる定理 2.15 からしたがう．なお $\mathcal{A}_{n,N}$ の表現可能性を示すには，射 $\mathcal{H}_{n,N} \to \mathcal{A}_{n,N}$ の「商をとること」に関する議論が必要なので，定理 2.15 の後に説明する．

定理 2.15 を述べるためにまずは Hilbert スキームについて復習しよう．詳細は [Gro95] や [Nit05] を参照せよ．また [MFK94, § 0.5] にも要約がある．

定理 2.13 $P(t)$ を有理数係数多項式とする．$\mathrm{Hilb}^{P(t)}_{\mathbb{P}^m}\colon \mathrm{Sch}_{/\mathbb{Z}} \to \mathrm{Set}$ をスキーム S に対し次のデータの同型類のなす集合を対応させる関手とする．

> S 上平坦な $\mathbb{P}^m_S$ の閉部分スキーム Z であって，任意の点 $s \in S$ に対し閉埋め込み $Z_s \subset \mathbb{P}^m_s$ の Hilbert 多項式が $P(t)$ となるもの．

このとき $\mathrm{Hilb}^{P(t)}_{\mathbb{P}^m}$ は $\mathbb{Z}$ 上射影的なスキームによって表現される．これを **Hilbert スキーム**という．

系 2.14 $W \subset \mathbb{P}^m \times \mathrm{Hilb}^{P(t)}_{\mathbb{P}^m}$ を普遍閉部分スキームとし，k 回ファイバー積

$$\mathrm{Hilb}^{P(t),k}_{\mathbb{P}^m} := W \times_{\mathrm{Hilb}^{P(t)}_{\mathbb{P}^m}} \cdots \times_{\mathrm{Hilb}^{P(t)}_{\mathbb{P}^m}} W$$

を考える．このとき $\mathrm{Hilb}^{P(t),k}_{\mathbb{P}^m}$ は $\mathbb{Z}$ 上射影的であり，スキーム S に対し，組

$(Z, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ の同型類のなす集合を対応させる関手を表現する．ここで Z は $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^m}^{P(t)}(S)$ の元であり，$\sigma_1, \ldots, \sigma_k \colon S \to Z$ は構造射 $Z \to S$ の切断である．

$\mathcal{H}_{n,N}(S)$ の元 $(A \to S, \lambda, \eta_N, \Phi)$ が与えられたとする．アーベルスキーム $A \to S$ の単位元を $\varepsilon \colon S \to A$ で表す．またシンプレクティック・レベル N 構造 $\eta_N \colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2n} \to A[N]$ と，$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}$ の標準基底 $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ から定まる $2n$ 個の切断 $S \to A$ を $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n}$ とおく．

以下では $P(t) = (m+1)t^n$ とおく．さて定理 2.15 を述べよう．

定理 2.15　関手の射 $\mathcal{H}_{n,N} \to \mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^m}^{P(t), 2n+1}$ を各スキーム S ごとに

$$(A \to S, \lambda, \eta_N, \Phi) \longmapsto (A \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathcal{E}_\lambda) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}_S^m, \varepsilon, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n})$$

と対応させることで定める．この射により $\mathcal{H}_{n,N}$ は $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^m}^{P(t), 2n+1}$ の局所閉部分スキームとして表現される．

定理 2.12 は定理 2.15 からただちにしたがうことに注意しておこう．

定理 2.15 の証明の概略　まず写像 $\mathcal{H}_{n,N}(S) \to \mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^m}^{P(t), 2n+1}(S)$ が単射であることを示す．このためには $(\Phi_A \colon A \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathcal{E}_\lambda) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}_S^m, \varepsilon, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n})$ から $(\pi \colon A \to S, \lambda, \eta_N, \Phi)$ が一意的に決まることをみればよい．

アーベルスキームの剛性定理（例えば [MFK94, Proposition 6.1]）より ε を単位元とする A 上のアーベルスキーム構造は一意的である．またシンプレクティック・レベル N 構造 η_N も $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n}$ から一意的に定まる．

Φ_A と ε から λ が復元されることをみる．$\varepsilon^* \mathcal{L}_\lambda = \varepsilon^* (\mathrm{id}_A, \lambda)^* \mathcal{P} \cong \mathcal{O}_S$ を用いると $\mathcal{E}_\lambda$ および Φ_A の定義より，

$$\Phi_A^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^m}(1) \cong \mathcal{L}_\lambda^{\otimes 3} \otimes \pi^* \varepsilon^* \Phi_A^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^m}(1)$$

が成り立つことがわかる．これより

$$\Phi_A^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^m}(1) \otimes \pi^* \varepsilon^* \Phi_A^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^m}(-1) \cong \mathcal{L}_\lambda^{\otimes 3} \tag{2.1}$$

を得る．よって，Φ_A と ε から $\mathcal{L}_\lambda^{\otimes 3}$ が復元される．ここで事実 2.10 より $\phi_{\mathcal{L}_\lambda^{\otimes 3}} = 6\lambda \colon A \to A^\vee$ であり，$\mathrm{Hom}(A, A^\vee)$ はねじれ元をもたないので，λ も Φ_A と ε から一意的に定まることがわかる．Φ も λ と Φ_A から一意的に定まるので，所望の単射性を得る．

さて $\mathcal{H}_{n,N}$ が $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^m}^{P(t),2n+1}$ の局所閉部分スキームとして表現されることを示そう．$H_0 = \mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^m}^{P(t),2n+1}$ とおく．Hilbert スキーム H_0 上の普遍閉部分スキームを $Z_0 \subset \mathbb{P}^m_{H_0}$，普遍切断を $\tau_0, \ldots, \tau_{2n} \colon H_0 \to Z_0$ とおく．また $x \in H_0$ に対して $Z_0 \to H_0$ の x でのファイバーを $Z_{0,x}$ とかくことにする．

証明のポイントは局所閉部分スキームの列 $H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_6$ であって，$H_6 \cong \mathcal{H}_{n,N}$ を満たすものを構成することにある．以下では構成の概略を紹介する．なお詳細は [MFK94, §7.2] を参照せよ[*2]．

部分関手 $H_1 \subset H_0$ を

$$H_1 = \{x \in H_0 \mid Z_{0,x} \text{ は滑らかかつ幾何的連結 }\}$$

で定める[*3]．これは H_0 の開部分スキームを定める．

部分関手 $H_2 \subset H_1$ を

$$H_2 = \{x \in H_1 \mid Z_{0,x} \text{ は } \tau_0(x) \text{ を単位元とするアーベル多様体の構造をもつ }\}$$

で定める．アーベル多様体の変形理論（次小節で述べる定理 2.25）より H_2 は H_1 の開かつ閉な部分スキームとなる．さらに $A_2 = Z_0 \times_{H_0} H_2$ とおくと，定理 2.25 より $A_2 \to H_2$ は τ_0 を単位元とするアーベルスキームになる．以下では τ_0 を ε とかくことにする．

部分関手 $H_3 \subset H_2$ を

$$H_3 = \{x \in H_2 \mid \text{任意の } 1 \leq i \leq 2n \text{ に対して } N\tau_i(x) = \varepsilon(x)\}$$

で定めると，H_3 は H_2 の閉部分スキームとなる（対角閉部分スキーム $\Delta \subset A_2 \times_{H_2} A_2$ を用いよ）．これは切断 $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$ が N 等分点となる跡である．

部分関手 $H_4 \subset H_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/N] \subset H_3$ を

$$H_4 = \{x \in H_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/N] \mid \tau_1(x), \ldots, \tau_{2n}(x) \text{ は } A_{2,x} \text{ のシンプレクティック・レベル } N \text{ 構造を定める }\}$$

で定める．これは H_3 の開部分スキームを定める．

[*2] 厳密には本稿の $\mathcal{H}_{n,N}$ と [MFK94] で扱う関手は定義が少し異なるので議論を修正する必要がある．

[*3] 正確には各スキーム S に対し $H_1(S)$ を定める必要があるが，以後このように略記することにする．

次に偏極の条件を考える．アーベルスキーム $A_2 \to H_2$ の H_4 への制限を $\pi\colon A_4 \to H_4$ とおく．また普遍閉埋め込み $A_4 \hookrightarrow \mathbb{P}^m_{H_4}$ を Φ_{A_4} とおく．A_4 上の可逆層

$$\mathcal{L}_4 := \Phi^*_{A_4}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{H_4}}(1) \otimes \pi^*\varepsilon^*\Phi^*_{A_4}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{H_4}}(-1)$$

を考える（条件 (2.1) と比較せよ）．このとき次の条件を満たす閉部分スキーム $H_5 \subset H_4$ が存在する（詳細は [MFK94, Proposition 6.11]）：

> スキーム S について射 $S \to H_4$ が H_5 を経由することと，S 上のアーベルスキーム $A_4 \times_{H_4} S$ の主偏極 λ_S が存在して $\mathcal{L}_4|_{A_4\times_{H_4}S} \cong \mathcal{L}^{\otimes 3}_{\lambda_S}$ となることは同値である．

最後に線形剛化の条件を考える．アーベルスキーム $\pi\colon A_4 \to H_4$ の H_5 への制限を $\pi\colon A_5 \to H_5$ とおく．同様に $\mathcal{L}_4, \Phi_{A_4}$ の A_5 への制限を $\mathcal{L}_5, \Phi_{A_5}$ とおく．このとき A_5 は $\mathcal{L}_5 \cong \mathcal{L}^{\otimes 3}_{\lambda_5}$ を満たす偏極 $\lambda_5\colon A_5 \to A_5^\vee$ をもつ．$\mathcal{L}_5$ は定義より

$$\mathcal{L}_5 = \Phi^*_{A_5}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{H_5}}(1) \otimes \pi^*\varepsilon^*\Phi^*_{A_5}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{H_5}}(-1)$$

であるので，H_5 上の層の射

$$H^0\big(\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}}(1)\big) \otimes \varepsilon^*\Phi^*_{A_5}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{H_5}}(-1) \to \pi_*\mathcal{L}^{\otimes 3}_{\lambda_5} \tag{2.2}$$

を得る．

開部分スキーム $H_6 \subset H_5$ を射 (2.2) が同型になる跡として定める．$A_5, \lambda_5, \Phi_{A_5}$ の H_6 上への制限を $A_6, \lambda_6, \Phi_{A_6}$ とかくことにする．H_6 上では同型射 (2.2) により同型 $\mathbb{P}_{H_6}(\mathcal{E}_{\lambda_6}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}\big(H^0\big(\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}}(1)\big)\big)$ が定まる．このとき合成

$$A_6 \hookrightarrow \mathbb{P}_{H_6}(\mathcal{E}_{\lambda_6}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}\big(H^0\big(\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}}(1)\big)\big)$$

は同一視 $\mathbb{P}^m_{H_6} = \mathbb{P}\big(H^0\big(\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}}(1)\big)\big)$ のもとで Φ_{A_6} に一致する．これより関手の射 $\mathcal{H}_{n,N} \to \mathrm{Hilb}^{P(t),2n+1}_{\mathbb{P}^m} = H_0$ は同型 $\mathcal{H}_{n,N} \cong H_6 \subset H_0$ を誘導することがわかる．よって，$\mathcal{H}_{n,N}$ は $\mathrm{Hilb}^{P(t),2n+1}_{\mathbb{P}^m}$ の局所閉部分スキームとして表現される． □

$\mathcal{A}_{n,N}$ の表現可能性

さて $N \geq 3$ のときに $\mathcal{A}_{n,N}$ がスキームによって表現されることをみよう．

関手の射

$$\mathcal{H}_{n,N} \longrightarrow \mathcal{A}_{n,N}\colon (A, \lambda, \eta_N, \Phi) \longmapsto (A, \lambda, \eta_N)$$

を考える．今までの議論より $\mathcal{H}_{n,N}$ は $\mathbb{Z}$ 上準射影的なスキームで表現されることはわかっている（定理 2.12）．

$\mathcal{H}_{n,N} \longrightarrow \mathcal{A}_{n,N}$ のファイバーをみてみよう．各 $(A, \lambda, \eta_N) \in \mathcal{A}_{n,N}(S)$ に対して A の線形剛化 $\Phi\colon \mathbb{P}_S(\mathcal{E}_\lambda) \to \mathbb{P}^m_S$ が 1 つ与えられたとする．S が連結ならば他の線形剛化は $\mathrm{Aut}_S(\mathbb{P}^m_S) = \mathrm{PGL}(m+1)$ の元 σ を用いて $\sigma \circ \Phi$ と一意的にかける．

この考察より大雑把には $\mathcal{A}_{n,N}$ は $\mathcal{H}_{n,N}$ の $\mathrm{PGL}(m+1)$ による商として得られるはずである．これは次のように定式化することができる：

命題 2.16（[MFK94，Proposition 7.6]） もしも $\mathbb{Z}$ 上準射影的なスキーム $\mathcal{A}$ と $\mathrm{PGL}(m+1)$ 捻子 $\mathcal{H}_{n,N} \to \mathcal{A}$ が存在するならば，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_{n,N}$ を表現する．

命題の条件を満たす $\mathcal{A}$ をスキームとして構成するためにはスキームの群作用による商についての考察が必要になる．例えば $\mathrm{PGL}(m+1)$ が自然に作用する $\mathbb{P}^m$ についても，$\mathrm{PGL}(m+1)$ による「良い商」はスキームの圏では存在しない．このような問題に関連して Mumford は [MFK94] においてスキームの簡約群による商の研究を行い，安定性という概念を導入した（幾何学的不変式論）．以下では $\mathcal{H}_{n,N}$ 上の普遍アーベルスキームとそのレベル構造から定まる切断を用いて $\mathrm{PGL}(m+1)$ 捻子 $\mathcal{H}_{n,N} \to \mathcal{A}$ を構成するという Mumford の議論のあらすじを紹介する[*4]．鍵となるのは次の事実である．簡単のため以下では $\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}$ を単に $\mathbb{P}^m$ とかく．

定理 2.17 $m' > m$ とする．次の条件により $(\mathbb{P}^m)^{m'+1}$ の開部分スキーム $(\mathbb{P}^m)^{m'+1}_{\mathrm{stable}}$ を定めることができる．

$(\mathbb{P}^m)^{m'+1}$ の幾何的点 $x = (x^{(0)}, \ldots, x^{(m')})$ が任意の線形部分空間 $L \subsetneq \mathbb{P}^m_{k(x)}$ に対して

$$\frac{|\{x^{(i)} \in L\}|}{m'+1} < \frac{\dim L + 1}{m+1}$$

を満たすとき $x \in (\mathbb{P}^m)^{m'+1}_{\mathrm{stable}}$ とする．

さらに，このとき $\mathbb{Z}$ 上の準射影的スキーム $X_{m'}$ であって，$\mathrm{PGL}(m+1)$ 捻子 $(\mathbb{P}^m)^{m'+1}_{\mathrm{stable}} \to X_{m'}$ を定めるものが存在する．

証明は [MFK94, Theorem 3.8] を参照せよ．なお [Hid04, §6.2] にも Siegel モジュ

*4 Mumford の議論ではレベル構造という補助的なデータを用いて商の議論を行っているので，完全に幾何学的不変式論にのっとった証明とはいえないかもしれない．より幾何学的不変式論らしい議論については [MFK94, Appendix to Chapter 4 C] およびその参考文献をみられたい．

ラー多様体の議論に必要となる幾何学的不変式論の基礎が簡潔に説明されている．

大雑把には $(\mathbb{P}^m)^{m'+1}$ の中で $\mathrm{PGL}(m+1)$ による「良い商」がとれる開部分スキームが $(\mathbb{P}^m)^{m'+1}_{\mathrm{stable}}$ である．よって適切な m' について $\mathrm{PGL}(m+1)$ 同変な射 $\mathcal{H}_{n,N} \to (\mathbb{P}^m)^{m'+1}_{\mathrm{stable}}$ を構成したい．そのためにシンプレクティック・レベル N 構造を用いる．

$Z_{n,N} \to \mathcal{H}_{n,N}$ を普遍アーベルスキームとし，$\eta_N\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_{\mathcal{H}_{n,N}} \to Z_{n,N}[N]$ をそのシンプレクティック・レベル N 構造とする．$Z_{n,N}$ は自然に $\mathrm{PGL}(m+1)$ 同変な埋め込み $Z_{n,N} \to \mathbb{P}^m_{\mathcal{H}_{n,N}}$ をもつ（ただし $\mathrm{PGL}(m+1)$ は $\mathbb{P}^m_{\mathcal{H}_{n,N}} = \mathbb{P}^m \times_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{n,N}$ の両方に作用する）．

各 $x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}$ はスキームの射

$$\phi_x\colon \mathcal{H}_{n,N} \xrightarrow{x} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_{\mathcal{H}_{n,N}} \xrightarrow{\eta_N} Z_{n,N} \longrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathcal{H}_{n,N}} \longrightarrow \mathbb{P}^m$$

を定めることに注意しよう．

定理 2.18 $N > 6^n\sqrt{n!}$ のとき，

$$\prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n} \phi_x\colon \mathcal{H}_{n,N} \to (\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}$$

は $\mathrm{PGL}(m+1)$ 同変な射 $\phi\colon \mathcal{H}_{n,N} \to (\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}}$ を誘導する．

証明 [MFK94, Proposition 7.7, Theorem 7.8] を参照せよ． □

系 2.19 $N > 6^n\sqrt{n!}$ のとき，$\mathcal{A}_{n,N}$ は $\mathbb{Z}$ 上の準射影的スキームで表現される．

証明の概略 証明の方針を述べる（詳細は [MFK94, Propositions 7.1, 7.4] を参照せよ）．$\phi\colon \mathcal{H}_{n,N} \to (\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}}$ は $\mathrm{PGL}(m+1)$ 同変であるので，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{PGL}(m+1) \times \mathcal{H}_{n,N} \arrow[r, "\mathrm{id}\times\phi"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{act}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}_2"] & \mathrm{PGL}(m+1) \times (\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}} \arrow[d, shift right, "\mathrm{act}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}_2"] \\
\mathcal{H}_{n,N} \arrow[r, "\phi"] & (\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}}.
\end{tikzcd}$$

定理 2.17 より $\mathrm{PGL}(m+1)$ 捻子 $(\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}} \to X_{N^{2n}-1}$ が存在するので，$\mathrm{PGL}(m+1) \times (\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}} \cong (\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}} \times_{X_{N^{2n}-1}} (\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}}$ を得る．この図式と同型を用いることで $\mathcal{H}_{n,N}$ に（射 $(\mathbb{P}^m)^{N^{2n}}_{\mathrm{stable}} \to X_{N^{2n}-1}$ に関する）降下データを定めることがで

き，さらに $\mathcal{H}_{n,N}$ 上の豊富な可逆層について議論をすることで，降下データが効果的であることがわかる．

よって降下の議論により $\mathbb{Z}$ 上準射影的なスキーム $\mathcal{A}$ と $\mathrm{PGL}(m+1)$ 捻子 $\mathcal{H}_{n,N} \to \mathcal{A}$ が存在することがわかり，命題 2.16 とあわせて主張がしたがう． □

$N \leq 6^n\sqrt{n!}$ のときは次の Serre の剛性補題を用いる（証明は [Mum70, §21 Theorem 5] を参照せよ）．

補題 2.20（Serre の剛性補題） $N \geq 3$ のとき，代数閉体上のアーベル多様体 A 上の自己同型で $A[N]$ に自明に作用するものは恒等射のみである．

$3 \leq N \leq 6^n\sqrt{n!}$ のときは Serre の剛性補題により，大きな N' に対応する $\mathcal{A}_{n,N'}$ の有限群による商として $\mathcal{A}_{n,N}$ が表現される．なお構成より $\mathcal{A}_{n,N}$ は準射影的である．

以上より $N \geq 3$ のとき $\mathcal{A}_{n,N}$ が準射影的スキームで表現されることがわかった．なお証明より $N = 1, 2$ のときも $\mathcal{A}_{n,N}$ は Deligne–Mumford スタックで表現されることがわかる．

2.3 $\mathcal{A}_{n,N}$ の平滑性の証明

前小節で $\mathcal{A}_{n,N}$ は $\mathbb{Z}$ 上準射影的なスキームで表現されることを示した．定理 2.5 を示すために本小節では $\mathcal{A}_{n,N} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ が滑らかであることを示す．この射は準射影的であるので，特に有限表示である．よって，この射が形式的に滑らかであることを示せば十分である．射 $\mathcal{A}_{n,N} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ が $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N]$ を経由することにから，次を示せば十分である．

> R を N が可逆な Artin 局所環とする．R のイデアル I で $I^2 = 0$ を満たすものをとり，閉埋め込み $S_0 = \operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow S = \operatorname{Spec} R$ を考える．このとき $S_0 \hookrightarrow S$ を合成して得られる自然な写像 $\mathrm{Hom}(S, \mathcal{A}_{n,N}) \to \mathrm{Hom}(S_0, \mathcal{A}_{n,N})$ は全射である．

$\mathcal{A}_{n,N}$ のモジュライ問題を思い出すと，これは次のように言い換えられる．

> 上と同じ状況 $S_0 = \operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow S = \operatorname{Spec} R$ を考える．相対次元 n のアーベルスキーム $A_0 \to S_0$，A_0 の主偏極 $\lambda_0\colon A_0 \to A_0^\vee$ および A_0 のシンプレ

クティック・レベル N 構造 $\eta_{N,0}\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_{S_0} \to A_0[N]$ が与えられているとする．

このとき相対次元 n のアーベルスキーム $A \to S$，A の主偏極 $\lambda\colon A \to A^\vee$ および A のシンプレクティック・レベル N 構造 $\eta_N\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_S \to A[N]$ であって，$(A, \lambda, \eta_N) \times_S S_0 \cong (A_0, \lambda_0, \eta_{N,0})$ を満たすものが存在する．

以下ではアーベルスキームおよび主偏極付きアーベルスキームの持ち上げについての結果を紹介し，$\mathcal{A}_{n,N}$ が滑らかであることをみる．その後は，アーベルスキームの付加構造の持ち上げについての記述や，局所モジュライ問題についても簡単に紹介する．

アーベルスキームの変形理論

アーベルスキームの持ち上げについて考えよう．

$R \twoheadrightarrow R_0$ を核 I が冪零である全射環準同型とし，$S_0 \hookrightarrow S$ を対応するアフィンスキームの閉埋め込みとする．

定義 2.21 アーベルスキーム $A_0 \to S_0$ の S への持ち上げとは，アーベルスキーム $A \to S$ と S_0 群スキームの同型 $A \times_S S_0 \cong A_0$ の組のことをいう．

以下では A が A_0 の持ち上げであるなどともいう．同様に偏極付きアーベルスキーム $(A_0 \to S_0, \lambda_0\colon A_0 \to A_0^\vee)$ の持ち上げも定義できる．

アーベルスキームの持ち上げについては次が成り立つ．

定理 2.22 (1) 任意のアーベルスキーム $A_0 \to S_0$ は S への持ち上げをもつ．

(2) $A_0 \to S_0$ をアーベルスキームとし，$\lambda_0\colon A_0 \to A_0^\vee$ をその偏極とする．このとき $\operatorname{Ker}\lambda_0$ が S_0 上エタールならば，偏極付きアーベルスキーム (A_0, λ_0) の持ち上げは存在する．

定理 2.22 (2) において λ_0 が主偏極ならば仮定が満たされることに注意しよう．

証明 証明は [Oor71, 2.4.1] や [Lan13, 2.2.4.4] を参照せよ．以下では証明の鍵となる変形理論の考え方を簡単に説明する．$I^2 = 0$ のときに示せば十分である．

一般に滑らかな射 $f\colon X \to Y$ は局所的にはエタール射とアフィン空間の射影 $\mathbb{A}^n_Y \to Y$ でかけることを思い出そう．$Y = S_0$ のとき，$\mathbb{A}^n_{S_0} \to S_0$ は持ち上げ $\mathbb{A}^n_S \to S$ をもち，さらに $\mathbb{A}^n_{S_0} \to \mathbb{A}^n_S$ は冪零イデアルによる閉埋め込みなので，$\mathbb{A}^n_{S_0}$

上のエタールスキームのなす圏と，$\mathbb{A}^n_S$ 上のエタールスキームのなす圏とは圏同値である．よって，滑らかなスキーム $f_0\colon X_0 \to S_0$ に対しては次が成り立つ．

> X_0 のアフィン開被覆 $\{U_{0i}\}$ であって，各 $f_{U_{0i}}\colon U_{0i} \to S_0$ は S への持ち上げ $f_i\colon U_i \to S$ をもつものが存在する．

もしも $\{U_{0i} \to S_0\}$ および $f_i\colon U_i \to S$ をうまくとることで，U_i を貼り合わせることができれば，$f_0\colon X_0 \to S_0$ の持ち上げを得ることができる．もちろん一般には貼り合わせがうまく行くわけではないが,「貼り合わせのずれ」をコホモロジーの元として定式化することで $X_0 \to S_0$ の S への持ち上げが存在する条件を記述することができる（詳細は [SGA1, III-6] をみよ．また [Oor71, 2.2.5] や [Lan13, 2.1.2.2] あるいは [Ill05] にも解説がある）．

X_0 がアーベルスキームのときは，その群構造を用いることで，変形の障害類が消えることを示すことができ，定理 2.22 (1) がしたがう． □

アーベルスキームの変形理論の帰結を述べておこう．なお定理 2.25 は定理 2.15 の証明で使われていたものである．

S を連結な局所ネータースキームとし，$X \to S$ を射影的かつ滑らかな射とする．さらに切断 $\varepsilon\colon S \to X$ が与えられているとする．

命題 2.23 関手 $F\colon \mathrm{Sch}_{/S} \to \mathrm{Set}$ を S スキーム $f\colon T \to S$ に対し，$(\varepsilon \circ f, \mathrm{id}_T)$ を単位元とする $X \times_S T$ 上のアーベルスキームの構造の同型類を対応させるものとして定めると，F は S の開部分スキームにより表現される，

証明 [MFK94, Proposition 6.16] を参照せよ． □

また Néron モデルの議論より次がわかる（なお Néron モデルについては定義 3.7 で簡単に復習する）．

命題 2.24 S が離散付値環 R に対応するアフィンスキームであるとし，η をその生成点とする．もしも X_η が $\varepsilon(\eta)$ を単位元とする $\mathrm{Frac}\, R$ 上のアーベル多様体の構造をもつならば X は ε を単位元とするアーベル多様体の構造をもつ．

これらを組み合わせることで次を得る．

定理 2.25 S を連結な局所ネータースキームとする．$\pi\colon X \to S$ を射影的かつ滑ら

かな射とし，$\varepsilon\colon S \to X$ を π の切断とする．このとき，ある S の幾何学的点 s に対して X_s が $\varepsilon(s)$ を単位元とする $k(s)$ 上のアーベル多様体の構造をもつならば，X は ε を単位元とする S 上のアーベルスキームの構造をもつ．

証明　命題 2.23 の記法の元で $F = S$ を示せばよい．命題 2.23 より F は S の開集合である．一方で，命題 2.24 より F は S の閉集合である．仮定より S は連結であり，F は空でないので $F = S$ を得る． □

$\mathcal{A}_{n,N}$ の平滑性

さて今までの議論を用いて $\mathcal{A}_{n,N} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ が滑らかであることを示そう．

R を N が可逆な Artin 局所環とする．R のイデアル I で $I^2 = 0$ を満たすものをとり，閉埋め込み $S_0 = \operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow S = \operatorname{Spec} R$ を考える．相対次元 n のアーベルスキーム $A_0 \to S_0$，A_0 の主偏極 $\lambda_0\colon A_0 \to A_0^\vee$ および A_0 のシンプレクティック・レベル N 構造 $\eta_{N,0}\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_{S_0} \to A_0[N]$ が与えられているとする．

このとき相対次元 n のアーベルスキーム $A \to S$，A の主偏極 $\lambda\colon A \to A^\vee$ および A のシンプレクティック・レベル N 構造 $\eta_N\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_S \to A[N]$ であって，$(A, \lambda, \eta_N) \times_S S_0 \cong (A_0, \lambda_0, \eta_{N,0})$ を満たすものが存在することを示せばよい．

定理 2.22 (2) より組 (A_0, λ_0) の S への持ち上げ (A, λ) は存在する．あとはこの状況で η_0 の持ち上げが存在することを示せばよい．N は S で可逆なので $A[N]$ は S 上有限エタールである．$S_0 \hookrightarrow S$ は普遍同相な閉埋め込みなので，S 上有限エタールなスキームのなす圏と S_0 上有限エタールなスキームのなす圏とは圏同値となる．よって，S_0 群スキーム同型 $\eta_{N,0}\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_{S_0} \to A_0[N]$ はある S 群スキームの同型 $\eta_N\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_S \to A[N]$ に持ち上がり，A のシンプレクティック・レベル N 構造を定める．以上より主張が示された．

前小節の内容と合わせることで定理 2.5 の証明が完了した．

最後にアーベルスキームの持ち上げについて関連する話題をまとめる．これは第 4 節（主張 4.14）で用いられる．

アーベルスキームの付加構造の持ち上げ

$S_0 = \operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow S = \operatorname{Spec} R$ がアフィンスキームの閉埋め込みで，定義イデアル I は $I^2 = 0$ を満たすとする．$A_0 \to S_0$ をアーベルスキームとするとき定理 2.22 より A_0 の持ち上げは存在する．このとき A_0 の持ち上げや，その偏極や自己準同型

の持ち上げをより簡単に記述することはできないだろうか．ここではその問いについて 1 つの解答を与える．なおこれは付録 A で述べる Grothendieck–Messing 理論の雛形にもなっている．

定理 2.26 $S_0 = \operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow S = \operatorname{Spec} R$ がアフィンスキームの閉埋め込みで，定義イデアル I は $I^2 = 0$ を満たすとする．$A_0 \to S_0$ をアーベルスキームとするとき，以下が成り立つ．

(1) A, A' を A_0 の S への持ち上げとする．このとき局所自由 R 加群の自然な同型 $H^1_{\mathrm{dR}}(A/S) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(A'/S)$ が存在する．そこで A_0 の S への持ち上げ A を 1 つとり，$D(A_0)_S = H^1_{\mathrm{dR}}(A/S)$ とおくと，これは A_0 の持ち上げのとりかたによらない．このとき，さらに $D(A_0)_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_0} = H^1_{\mathrm{dR}}(A_0/S_0)$ が成り立つ．

(2) 任意の A_0 の S への持ち上げ A に対し，Hodge フィルトレーション $\mathrm{Fil}^1 = H^0(A, \Omega^1_{A/S}) = (\mathrm{Lie}_{A/S})^* \subset D(A_0)_S$ は $D(A_0)_S$ の許容フィルトレーションである．ただし Fil^1 が $D(A_0)_S$ の局所自由 $\mathcal{O}_S$ 部分加群で，その商もまた局所自由 $\mathcal{O}_S$ 加群であり，$\mathrm{Fil}^1 \subset D(A_0)_S$ の S_0 の引き戻しは $(\mathrm{Lie}_{A_0/S_0})^* \subset H^1_{\mathrm{dR}}(A_0/S_0)$ に一致するとき，Fil^1 を許容フィルトレーションという．

(3) 関手
$$(A \to S) \longmapsto \big(A \times_S S_0, (\mathrm{Lie}_{A/S})^* \subset D(A \times_S S_0)_S\big)$$
は S 上のアーベルスキームのなす圏と，S_0 上のアーベルスキーム A_0 と $D(A_0)_S$ の許容フィルトレーションの組 $(A_0, \mathrm{Fil}^1 \subset D(A_0)_S)$ のなす圏との圏同値を与える．

(4) 偏極 $\lambda_0\colon A_0 \to A_0^\vee$ であって，$\operatorname{Ker} \lambda_0$ が S_0 上エタールなものが与えられたとする．このとき λ_0 は $D(A_0)_S$ の完全ペアリング $\langle\, , \rangle_{\lambda_0}$ を定める．さらに A_0 の S への持ち上げ A について，λ_0 が A 上の偏極に持ち上がることと，$(\mathrm{Lie}_{A/S})^*$ が $D(A_0)_S$ の $\langle\, , \rangle_{\lambda_0}$ に関する完全等方部分加群になることは同値である．

注意 2.27 定理の定式化は [Lan13, 2.2.4.8] に沿った（なお [Lan13] では de Rham ホモロジーを用いているが，ここではあとの都合に合わせて de Rham コホモロジーを使っている）．付録 A.2 で紹介する Grothendieck–Messing 理論と違い，素数や PD 構造についての条件がないことに注意しよう．実際，モジュライ問題を考えるときにはこの定理が使いやすく，[Lan13] ではこの定理のみで変形理論に関する議論は

済ましている．

定理 2.26 の S がアフィンであるという仮定は証明において「アフィンスキームの準連接層の高次コホモロジーは 0 である」という形で用いられる．正標数でアフィンとは限らない状況においても PD 構造（定義 A.11，注意 A.15）を用いることで定理 2.26 のような主張を示すことができる．

なお Kisin による志村多様体の整正準モデルの存在の証明では変形環の記述を整 p 進 Hodge 理論を用いて，志村データと結びつける必要があるため，Grothendieck–Messing 理論を使っている（定理 5.1，定理 5.4 および第 5.2 小節）．

2.4 Siegel モジュラー多様体についての補足

代数的スタックとコンパクト化を使う証明について

本稿では定理 2.5 の証明として Mumford による幾何学的不変式論を用いた議論を紹介した．証明は次の 3 つのステップからなったことを思い出そう．

- 線形剛化も含めたモジュライ問題 $\mathcal{H}_{n,N}$ を考え，その表現可能性を Hilbert スキームの理論により示す．
- 安定性の議論を行い $\mathcal{H}_{n,N}$ の商として $\mathcal{A}_{n,N}$ の表現可能性を議論する．
- アーベルスキームとその付加構造の変形理論を考えることで平滑性を示す．

他にも代数的スタックとコンパクト化を使うことで定理 2.5 を示すことができる．おおまかには次の 3 つのステップにわけて証明される．

- $\mathcal{A}_{n,N}$ の局所モジュライ問題を考え，アーベルスキームとその付加構造の変形理論を用いて，その表現可能性（prorepresentability）と形式的平滑性を示す．
- Artin の定理を用いて $\mathcal{A}_{n,N}$ が Deligne–Mumford スタックになることを示す[*5]：これは $\mathcal{A}_{n,N}$ の局所モジュライ問題についての上記の考察と，$\mathcal{A}_{n,N}$ の簡単な性質を確かめるだけでよい（さらに $N \geq 3$ のときは Serre の補題より代数的空間になる）．なお本稿の議論のように Artin の定理の代わりに Hilbert スキームの理論を使って $\mathcal{A}_{n,N}$ が Deligne–Mumford スタックになることを示すこともできる（[FC90, I.4.11]）．

[*5] 厳密にはここで考える $\mathcal{A}_{n,N}$ は category fibered in groupoids である．

- $\mathcal{A}_{n,N}$ の最小コンパクト化を考え，それが射影的スキームとなることを示す．この事実より $N \geq 3$ のときに $\mathcal{A}_{n,N}$ がスキームとなることを導く．

このうち最初の 2 つについては見通しよく議論することができるので，$\mathcal{A}_{n,N}$ が代数的空間であることを示すだけでいいならこの方針の方が簡明だろう．ただし，さらにスキームであることをいうには最小コンパクト化を考える必要があり，そのためには別のコンパクト化（トロイダルコンパクト化）も必要となるので，結果としては本稿の方法のほうが簡単かもしれない．代数的スタックとコンパクト化を使う方針については [FC90] と [Lan13] を参照されたい．

$\mathcal{A}_{n,N}$ の性質

命題 2.28 M, N を 3 以上の自然数とし，さらに N が M を割り切るとする．このとき，自然な射 $\mathcal{A}_{n,M} \to \mathcal{A}_{n,N}$ はエタールである．

証明 問題の射は $\mathcal{A}_{n,M} \to \mathcal{A}_{n,N} \otimes \mathbb{Z}[1/M] \hookrightarrow \mathcal{A}_{n,N}$ とかける．Serre の剛性補題より $\mathcal{A}_{n,M} \to \mathcal{A}_{n,N} \otimes \mathbb{Z}[1/M]$ は $\mathcal{A}_{n,M}$ の有限群 $\mathrm{Ker}\bigl(\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}) \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\bigr)$ の自由な作用による商となることがわかる．よってこの射はエタールであり，2 つ目の射は開埋め込みであるのでよい． □

同種類による解釈

定義 2.4 では主偏極付きアーベルスキームの同型類によりモジュライ問題を定式化した．一方で，同種類によりモジュライ問題を定式化することも可能であり，志村多様体の文脈では同種類を考えることも多い．以後の話のためにも同種類による解釈を復習しよう．詳細は [越川] を参照せよ．

$\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 K を 1 つとる．

定義 2.29 モジュライ関手 $\mathcal{A}_{n,K} \colon \mathrm{Sch}_{/\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ をスキーム S に対し組 $(A, \lambda, \overline{\eta})$ の同種類を対応させるものとする．ただし，

- $A \to S$ は相対次元 n のアーベルスキーム．
- $\lambda \colon A \to A^\vee$ は A の主偏極．
- $\overline{\eta}$ は A のレベル K 構造．すなわち，S が連結のときはシンプレクティック $\mathbb{A}_f$

加群の同型

$$\eta\colon \big((\mathbb{A}_f)^{2n}, \mathbb{A}_f, e_{\mathrm{std}}\big) \xrightarrow{\cong} \big(H_1(A_s, \mathbb{A}_f), \mathbb{A}_f(1), e_\lambda\big)$$

の K 軌道 $\overline{\eta} = \eta K$ であって，$\pi_1(S, s)$ の作用によって保たれるもの．ここで s は S の幾何的点であり，$H_1(A_s, \mathbb{A}_f)$ は A_s の Tate $\mathbb{A}_f$ 加群 $V_f\mathbb{A}_s := \big(\prod_\ell T_\ell A_s\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $\pi_1(S, s)$ 加群とみなしたもの．S が連結でないときは，連結成分ごとに考える[*6]．

K として主合同部分群 $K(N) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{GSp}_{2n}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\big)$ をとると次が成り立つ．

命題 2.30 自然な関手の同型 $\mathcal{A}_{n,K(N)} \cong \mathcal{A}_{n,N}$ がある．

証明 [越川, 注意 4.7] を参照せよ． □

一般の偏極からなる Siegel モジュラー多様体

定義 2.4 ではモジュライ問題として主偏極付きのアーベルスキームのみを考えた．一般の偏極付きアーベルスキームのなすモジュライ問題については [Lan13] で扱われている（特に [Lan13, §1.3.6]）．[Lan13] で考察されているように一般の偏極を考える場合には，シンプレクティック・レベル構造に「持ち上げ条件」を課す必要がある．ここでは $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上のモジュライ問題に制限して，一般の偏極からなる Siegel モジュラー多様体について触れておく[*7]．詳細は [Lan13] を参照されたい．

$(\Lambda, \mathbb{Z}, \langle\,,\rangle)$ をシンプレクティック $\mathbb{Z}$ 加群とする．さらに $\langle\,,\rangle\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ は非退化，すなわち，$\langle\,,\rangle$ は単射 $\Lambda \hookrightarrow \Lambda^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z})$ を誘導すると仮定する．$\mathrm{rank}\,\Lambda = 2n, |\Lambda^\vee/\Lambda| = d^2$ とおく[*8]．以後，簡単のため $(\Lambda, \mathbb{Z}, \langle\,,\rangle)$ を Λ で表す．

N を正整数とする．p を dN と互いに素な素数とする．$\Lambda/N\Lambda$ で Λ から定まるシンプレクティック $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群 $(\Lambda/N\Lambda, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \langle\,,\rangle)$ を表すことにする，

定義 2.31 関手 $\mathcal{A}_{\Lambda,N,p}\colon \mathrm{Sch}_{/\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ を $\mathbb{Z}_{(p)}$ スキーム S に対し組 (A, λ, η_N) の同型類を対応させるものとする．ただし，

[*6] 局所ネータースキームのみを考えていることを思い出そう．

[*7] 第 5.1 小節で必要となる．

[*8] Λ はシンプレクティック構造をもつので，その階数は偶数である．また，$|\Lambda^\vee/\Lambda|$ は $\langle\,,\rangle$ に対応する交代行列の行列式の絶対値に等しい．パフィアンの理論より，これは平方数となる．

- $A \to S$ は相対次元 n のアーベルスキーム．
- $\lambda\colon A \to A^\vee$ は次数が p と素な A の偏極．
- $\eta_N\colon (\Lambda/N\Lambda)_S \to A[N]$ は A のシンプレクティック・レベル N 構造であって，持ち上げ条件を満たすものとする．ただしシンプレクティック・レベル N 構造 η_N が持ち上げ条件を満たすとは，各 S の連結成分ごとにある幾何的点 s が存在して次が成り立つことをいう．シンプレクティック $\mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z}$ 加群の同型 $\eta_{N,s}\colon \Lambda/N\Lambda \to A_s[N]$ はシンプレクティック $\widehat{\mathbb{Z}}^p$ 加群の同型 $\eta_s\colon \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^p \to H_1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p) := \prod_{\ell \neq p} T_\ell A_s$ に持ち上がる．

組 (A, λ, η_N) と (A', λ', η'_N) が同型であるとは，アーベルスキームの同型 $f\colon A \to A'$ であって，$\lambda = f^\vee \circ \lambda' \circ f$ および $\eta'_N = f \circ \eta_N$ を満たすものが存在することをいう．

なおシンプレクティック・レベル N 構造の存在より，偏極 λ の次数は d^2 となる．

注意 2.32 $(\Lambda, \mathbb{Z}, \langle\,,\rangle) = (\mathbb{Z}^{2n}, \mathbb{Z}, e_{\mathrm{std}})$ のとき，$\mathcal{A}_{\Lambda,N,p}$ は $\mathcal{A}_{n,N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ に他ならない．これをみるためには，$\mathbb{Z}_{(p)}$ スキーム S 上の主偏極付きアーベル多様体 (A, λ) とそのシンプレクティック・レベル N 構造 $\eta_N\colon (\Lambda/N\Lambda)_S \to A[N]$ が与えられたとして，η_N が持ち上げ条件を満たすことをいえばよい．S の幾何的点 s に対して，シンプレクティック $\widehat{\mathbb{Z}}^p$ 加群 $(H_1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p), \widehat{\mathbb{Z}}^p(1), e_\lambda)$ を考える．λ は主偏極なので，シンプレクティック $\widehat{\mathbb{Z}}^p$ 加群の同型

$$((\widehat{\mathbb{Z}}^p)^{2n}, \widehat{\mathbb{Z}}^p, e_{\mathrm{std}}) \xrightarrow{\eta'} (H_1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p), \widehat{\mathbb{Z}}^p(1), e_\lambda)$$

が存在する．このときある $g \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ が存在して，$\eta' \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}^p} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \eta_N \circ g$ とかける．$\mathrm{GSp}_{2n}(\widehat{\mathbb{Z}}^p) \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ は全射なので，g の $\mathrm{GSp}_{2n}(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ への持ち上げ g' を 1 つとると，$\eta' \circ (g')^{-1}$ が η_N の持ち上げを与える．

定理 2.33 $N \geq 3$ のとき，$\mathcal{A}_{\Lambda,N,p}$ は滑らかな準射影的 $\mathbb{Z}_{(p)}$ スキームで表現される．

証明は定理 2.5 の証明と本質的に同じである．なお表現可能性については [MFK94] も，平滑性については [Lan13, 2.2.4.13] も参考にせよ（[MFK94, §7.2] の記法 $\mathcal{A}_{n,d,N}$ を用いると，本稿の関手 $\mathcal{A}_{\Lambda,N,p}$ は $\mathcal{A}_{n,d,N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ の（シンプレクティック条件から定まる）開かつ閉な部分スキームにより表現される）．

注意 2.34 主偏極とは限らない場合でも同種類によりモジュライ問題を定式化し，レベルが大きいときには準射影的スキームにより表現されることを示すことができ

る．詳細は例えば [Lan13] をみよ．なお一般には Siegel モジュラー多様体はレベルおよび偏極の次数が可逆なスキーム上でのみ滑らかになる（定理 2.33 の設定では p は dN と互いに素であり，$\mathbb{Z}$ 上ではなく $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上でモジュライ問題を考えているので平滑性がしたがう）．

3　志村多様体の整正準モデル

前節でみたように Siegel モジュラー多様体は $\mathbb{Z}$ 上の準射影的なスキームとみなせる．これを志村多様体の文脈で考えると，$\mathbb{Q}$ スキーム $\mathrm{Sh}_{K(N)}(\mathrm{GSp}_{2n}, \mathfrak{H}_n^{\pm})$ は自然な $\mathbb{Z}$ 上の整モデル $\mathcal{A}_{n,N}$ をもつと言い換えられる．同様のことを一般の志村多様体で考えよう．

そもそもなぜ志村多様体の整モデルを考えるのだろうか？その理由の 1 つは整モデルにより志村多様体の法 p での還元を考えられることである．例えば志村多様体のエタールコホモロジーから得られる Galois 表現を調べる際には志村多様体の法 p での還元の幾何を調べることが重要な役割を果たす（[三枝]）．なおこのような手法を用いる際には各素数 p に対して $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上のモデルを考えれば十分である[*9]．よって，以後は $\mathbb{Z}_{(p)}$ などの局所環上のモデルを考えることにする．

それでは「自然な整モデル」を定める方法はあるだろうか？モジュラー曲線や Siegel モジュラー多様体 $\mathrm{Sh}_{K(N)}(\mathrm{GSp}_{2n}, \mathfrak{H}_n^{\pm})$ の例のように，考えている志村多様体が $\mathbb{Z}$ 上や $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上で自然なモジュライ解釈をもてば，そのモジュライ問題を表現するスキームをもって自然な整モデルとするというのが 1 つの方法だろう．

本節の方法はこれとは異なり普遍性による定義を用いる．よい還元をもつ素点での志村多様体の整モデルについては，整正準モデルという延長条件についての普遍性で特徴付けられるよい整モデルの定義が提唱されている．そこで本節は整正準モデルの定義を紹介し，Siegel モジュラー多様体の整モデルが整正準モデルになることを証明する[*10]．

本節に続く第 4 節では不分岐 PEL 型志村多様体が整正準モデルをもつことをみる．このクラスの志村多様体は応用上よく使われるもので，Siegel モジュラー多様体の場

[*9] もちろん $\mathbb{Z}$ 上のモデルを考えることも重要であり，例えば [Lov17] といった研究もある．

[*10] なお技術的な問題によりいくつか異なる整正準モデルの定義が提唱されている．本項では簡単のためリフレックス体上の不分岐な素点でのモデルについてのみ考える (この場合は様々な文献の定義が一致する)．

合と同様に実際にモジュライ問題を考えることで，整正準モデルの存在をいう．そして第 5 節ではアーベル型志村多様体が整正準モデルをもつという結果を紹介する．

(G,X) を志村データとし，$E=E(G,X)$ をそのリフレックス体とする．p を素数とし，p の上にある E の素点 v を 1 つとる．また $G(\mathbb{Q}_p)$ のコンパクト開部分群 K_p を 1 つとり，

$$\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)=\mathrm{Sh}(G,X)/K_p=\varprojlim_{K^p}\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$$

とおく．$\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ は $G(\mathbb{A}_f^p)$ の連続作用をもつ E 上のスキームである．

ただしスキーム S への $G(\mathbb{A}_f^p)$ の作用が**連続**であるとは，共終な $G(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群の集合 $\{K^p\}$ で添字付けられた，推移射が有限射となるスキームの射影系 $(S_{K^p})_{K^p}$ が存在して $S=\varprojlim_{K^p}S_{K^p}$ とかけ，さらに各 $g\in G(\mathbb{A}_f^p)$ と K^p に対し射 $\rho_{K^p}(g)\colon S_{K^p}\to S_{g^{-1}K^pg}$ が存在して次を満たすことをいう：

(1) $k\in K^p$ ならば $\rho_{K^p}(k)=\mathrm{id}_{S_{K^p}}$ となる．
(2) K'^p が K^p の正規部分群のときは $(\rho_{K'^p}(k))_{k\in K^p}$ が $S_{K'^p}$ への有限群 K^p/K'^p の作用を定め，さらに $S_{K'^p}/(K^p/K'^p)\cong S_{K^p}$ となる．

さっそく志村多様体の整正準モデルを定義しよう．

定義 3.1 $\mathcal{O}$ で局所環 $\mathcal{O}_{E,(v)}$ または完備局所環 $\mathcal{O}_{E_v}$ をあらわすことにする．

(1) $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の $\mathcal{O}$ 上の**整モデル**とは，$G(\mathbb{A}_f^p)$ の連続作用付きの忠実平坦 $\mathcal{O}$ スキーム $\mathscr{S}$ と，$G(\mathbb{A}_f^p)$ 同変な同型 $\mathscr{S}_{\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}}\cong\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)\otimes\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}$ の組のことである[*11]．
(2) $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の $\mathcal{O}$ 上の整モデル $\mathscr{S}$ が**滑らか**であるとは，$G(\mathbb{A}_f^p)$ のあるコンパクト開部分群 K_0^p が存在して，任意のコンパクト開部分群 $K_1^p\subset K_2^p\subset K_0^p$ に対して $\mathscr{S}/K_1^p$ が滑らかな $\mathcal{O}$ スキームであり，$\mathscr{S}/K_1^p\longrightarrow\mathscr{S}/K_2^p$ がエタール射となることをいう．
(3) $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の $\mathcal{O}$ 上の整モデル $\mathscr{S}$ が**延長条件** (extension property) を満たすとは，任意の $\mathcal{O}$ 上形式的滑らかな正則スキーム T に対して射 $T_{\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}}\to\mathscr{S}_{\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}}$ が $\mathcal{O}$ 上の射 $T\to\mathscr{S}$ に一意的に延長されることをいう．

[*11] $\mathscr{S}_{\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}}:=\mathscr{S}\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}$ とおいた．以下ではスキームや加群の係数拡大に関するこのような略記を断りなく用いる．

(4) 延長条件を満たす滑らかな整モデルを**整正準モデル**という．

定義より整正準モデルは滑らかであるので，「よい還元をもつ素点での志村多様体の整モデル」を考えている．また定義 3.1 (3) において試験スキーム T は $\mathcal{O}$ 上有限型でなくてもいいことに注意しよう．

注意 3.2 より一般の状況では，延長条件の定義に用いる試験スキームのクラスを修正する必要があり，文献により定義が異なることがある（[Moo98, 3.4, 3.9]）．

次の命題から整正準モデルは普遍性で特徴付けられた「自然な整モデル」であることがわかる．

命題 3.3 滑らかな整モデルは $\mathcal{O}$ 上形式的滑らかな正則スキームである．特に整正準モデルは存在すれば同型の差を除いて一意的である．

証明 後半の主張は前半の主張よりしたがう．よって，前半の主張を示す．$\mathscr{S} = \varprojlim_{K^p} \mathscr{S}_{K^p}$ を $\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ の滑らかな整モデルとする．

$\mathscr{S}$ が $\mathcal{O}$ 上形式的に滑らかであることは，十分小さい K^p に対して $\mathscr{S}_{K^p}$ が $\mathcal{O}$ 上滑らかであることからしたがう．

$\mathscr{S}$ が正則スキームであることを示す．$\mathscr{S}$ の点 s を任意にとり，s の S_{K^p} における像を s_{K^p} とおく．このとき $\mathcal{O}_{\mathscr{S},s} = \varinjlim_{K^p} \mathcal{O}_{(\mathscr{S}_{K^p}),s_{K^p}}$ となる．$R := \mathcal{O}_{\mathscr{S},s}$ とおく．$G(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群 K_0^p を一つ固定する．すると各 $K^p \subset K_0^p$ に対し $\mathscr{S}_{K^p} \to \mathscr{S}_{K_0^p}$ はエタールである．よって，$R_0 := \mathcal{O}_{(\mathscr{S}_{K_0^p}),s_{K_0^p}}$ とおき，R_0 の強 Hensel 化を R_0^{sh} とおくと，$R_0 \subset R \subset R_0^{\mathrm{sh}}$ となる．ここで R_0 および R_0^{sh} はネーター局所環である．これより R がネーター局所環で，その強 Hensel 化が R_0^{sh} となることが示せる（詳細は [Mil92, 2.4] を参照せよ）．

R が正則であることを示すには R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が $\dim R$ 個の元で生成されることをみればよい．ここで $\dim R = \dim R_0^{\mathrm{sh}} = \dim R_0$ であり，$\mathfrak{m}$ は R_0 の極大イデアルの生成元で生成される．よって R_0 の正則性より R の正則性もしたがう． □

さて滑らかな整モデルが期待されるような G や K_p の性質を定式化しよう．

定義 3.4 F を $\mathbb{Q}_p$ の有限拡大体とする．F 上の簡約群 G が**不分岐**であるとは，G が F 上準分裂であり，かつ F のある不分岐拡大上で分裂することをいう．F の剰余体は有限体であるので，G が不分岐であることと，G を一般ファイバーとしてもつ

$\mathcal{O}_F$ 上の簡約群 $G_{\mathcal{O}_F}$ が存在することは同値である[*12]．このとき $K = G_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F)$ は G（の F 値点のなす群）のコンパクト開部分群になる．このようにして得られる G のコンパクト開部分群を**超特殊部分群** (hyperspecial subgroup) という．

また K は極大コンパクト開部分群になることが知られている．なお通常は Bruhat–Tits の building の理論を用いて超特殊部分群を定義する．詳細については [Tit79, 3.8] を参照せよ．

第 5 節では，アーベル型の志村データ (G, X) であって，$G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ が不分岐かつ K_p が $G(\mathbb{Q}_p)$ の超特殊部分群のときに整正準モデルが存在することをみる（定理 5.1)．

例 3.5 $\mathbb{Q}_p$ 上のシンプレクティック空間 (V, ψ) から定まる一般斜交群 $\mathrm{GSp}(V, \psi)$ に対して，V の $\mathbb{Z}_p$ 格子 $V_{\mathbb{Z}_p}$ の固定部分群として得られる極大コンパクト開部分群 K を考える．このとき K が超特殊部分群であることと $V_{\mathbb{Z}_p}$ が ψ について自己双対であることは同値である．

命題 3.6 $G_{\mathbb{Q}_p}$ が不分岐であるとする．このときリフレックス体 $E = E(G, X)$ の素点 v で p の上にあるものは常に $\mathbb{Q}$ 上不分岐である．

証明 [Mil94, 4.7] をみよ． □

本節の残りでは第 2 節で考察した Siegel モジュラー多様体が整正準モデルを与えることを示す（定理 3.14）．その証明のために Néron モデルとアーベルスキームの延長について復習しよう．

Néron モデルとアーベル多様体のよい還元

R を Dedekind 整域とし，L をその商体とする．$S = \operatorname{Spec} R$ とおく．

定義 3.7 A_L を L 上のアーベル多様体とする．A_L の R 上の **Néron モデル**とは，滑らかかつ分離的有限型 S スキーム $A \to S$ と L 同型 $A \times_S L \cong A_L$ の組であって，次の延長条件を満たすもののことをいう．

> 任意の滑らかな S スキーム T に対して L スキームの射 $T_L \to A_L$ が S スキームの射 $T \to A$ に一意的に延長される．

[*12] 例えば `https://mathoverflow.net/a/184548` を参照せよ．

延長条件より A_L の Néron モデル $\mathcal{A}$ は存在すれば一意的であり，さらに $\mathcal{A}$ は L 同型 $\mathcal{A} \times_S L \cong A_L$ を群スキームの同型とするような S 群スキームの構造が唯一存在する．

定理 3.8 A_L を L 上のアーベル多様体とする．このとき A_L の R 上の Néron モデルは存在する．

証明 [BLR90] を参照せよ． □

定義 3.9 R が離散付値環であるとする．L 上のアーベル多様体 A_L が R においてよい還元をもつとは，R 上の Néron モデルが固有であることをいう．これは R 上のアーベルスキーム $\mathcal{A}$ であって，$\mathcal{A} \times_R L \cong A_L$ を満たすものが存在することと同値である（そのようなアーベルスキーム $\mathcal{A}$ は A_L の Néron モデルになる）．

一般に R が Dedekind 整域で，R の極大イデアル $\mathfrak{p}$ が与えられているとする，L 上のアーベル多様体が $R_{\mathfrak{p}}$ においてよい還元をもつとき，そのアーベル多様体は $\mathfrak{p}$ においてよい還元をもつという．

R が離散付値環とする．より一般に L 上の固有かつ滑らかなスキーム X_L が R において**よい還元**をもつとは，R 上の固有かつ滑らかなスキーム $\mathcal{X}$ と L 同型 $\mathcal{X} \times_R L \cong X_L$ が存在することをいう．L 上のアーベル多様体についてはこれら 2 つの定義は同値である．

R が離散付値環であるとし，R の剰余体を k とおく．ℓ を k の標数と異なる素数とする．L 上のアーベル多様体 A_L が R においてよい還元をもつかどうかは，ℓ 進 Tate 加群 $T_\ell A_L$ への Galois 群 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{sep}}/L)$ の作用により判定できる．まず用語を復習しよう．自然な群準同型 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{sep}}/L) \to \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$ の核を**惰性群**とよぶ．$T_\ell A_L$ に惰性群が自明に作用するとき，$\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{sep}}/L)$ の $T_\ell A_L$ への作用は**不分岐**であるという．L に離散付値 v が与えられているときや，R が Dedekind 整域でその極大イデアル $\mathfrak{p}$ が 1 つ与えられているときも，v の定める離散付値環や $R_{\mathfrak{p}}$ を考えることで，同様の状況を考えることができる．このときは v において不分岐，$\mathfrak{p}$ において不分岐などという．

定理 3.10（Néron–Ogg–Shafarevich の判定法） 離散付値 v をもつ体 L と，v の剰余体の標数と異なる素数 ℓ が与えられているとする．このとき L 上のアーベル多様体が v でよい還元をもつことは，その ℓ 進 Tate 加群が v において不分岐であること

と同値である．

証明 [ST68] を参照せよ：アーベル多様体がよい還元をもつときにその ℓ 進 Tate 加群が不分岐であることは，エタールコホモロジーに関する底変換定理の帰結とみることができる．逆の含意については Néron モデルの剰余体での還元の様子をみる必要がある． □

アーベルスキームの延長

アーベルスキームやその偏極の延長についての結果をまとめる．

命題 3.11 S を正規スキームとし，A_1, A_2 を S 上のアーベルスキームとする．また U を S の稠密開部分スキームとする．このとき任意の U 準同型 $A_1 \times_S U \to A_2 \times_S U$ は S 準同型 $A_1 \to A_2$ に一意的に延長される．特に U 上のアーベルスキーム A_U について，A_U の S への延長は存在すれば同型を除いて一意的である．

証明 [FC90, I.2.7]，[Mil92, 2.11] を参照せよ． □

命題 3.12 S を正規スキームとし，A を S 上のアーベルスキームとする．また U を S の稠密開部分スキームとする．このとき U 上の偏極 $\lambda_U \colon A \times_S U \to A^\vee \times_S U$ は S 上の偏極に一意的に延長される．

証明 [FC90, I.1.9, 1.10(b)]，[Mil92, 2.14] を参照せよ． □

定理 3.13（Faltings, Vasiu–Zink） $\mathcal{O}$ を分岐指数が $p-1$ 以下の混標数 $(0,p)$ の離散付値環とする．このとき任意の $\mathcal{O}$ 上形式的滑らかな正則スキーム S は次の延長条件を満たす：閉部分スキーム $Z \subset S$ であってその補集合 $U := S \setminus Z$ が一般ファイバー $S \otimes \operatorname{Frac} \mathcal{O}$ および全ての余次元 1 の点を含むものを考える．このとき任意の U 上のアーベルスキームは S 上のアーベルスキームに一意的に延長される．

証明 [VZ10, Corollary 5] を参照せよ．なお [FC90, V.6] でも延長問題が扱われているが証明の一部に誤りがある（[Moo98, 3.4, 3.6]）． □

Siegel モジュラー多様体の整正準モデル

以上の準備のもとで Siegel モジュラー多様体の整正準モデルについて議論しよう．すなわち $G = \mathrm{GSp}_{2n}$ および $X = \mathfrak{H}_n^{\pm}$（次数 n の Siegel 上下半空間）とする．また

G の超特殊部分群 $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ を K_p とおく．このとき第 2 節（定義 2.29）で扱った $\mathcal{A}_{n,K(N)}$ が志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K_p}(\mathrm{GSp}_{2n}, \mathfrak{H}_n^{\pm})$ の整正準モデルを与える．

定理 3.14 任意の素数 p に対して $\varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,K(N)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ は $\mathrm{Sh}_{K_p}(\mathrm{GSp}_{2n}, \mathfrak{H}_n^{\pm})$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の整正準モデルである．

証明 $\varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,K(N)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ が滑らかな整モデルであることは定理 2.5，命題 2.28 および命題 2.30 よりしたがう．よってこれが延長条件を満たすことを示す．

$\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の形式的滑らかな正則スキーム T と射 $T_{\mathbb{Q}} \to \left(\varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,K(N)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\right)_{\mathbb{Q}}$ が任意に与えられたとする．各 $\mathcal{A}_{n,K(N)} \cong \mathcal{A}_{n,N}$ のモジュライ解釈より次を得る：アーベルスキーム $A_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}}$，$A_{\mathbb{Q}}$ の主偏極 $A_{\mathbb{Q}} \to A_{\mathbb{Q}}^{\vee}$，$p$ と互いに素な N について $A_{\mathbb{Q}}$ のシンプレクティック・レベル N 構造 $\eta_{N,\mathbb{Q}} \colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_{T_{\mathbb{Q}}} \to A_{\mathbb{Q}}[N]$ であって，$N|M$ のとき $\eta_{M,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \eta_{N,\mathbb{Q}}$ を満たすもの．

射 $T_{\mathbb{Q}} \to \left(\varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,K(N)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\right)_{\mathbb{Q}}$ が射 $T \to \varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,K(N)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ に一意的に延長されることはモジュライ解釈より次と同値である：$A_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}}$ が T 上のアーベルスキームに，$A_{\mathbb{Q}}$ 上の主偏極 $\lambda_{\mathbb{Q}}$ が A 上の主偏極に，そして $A_{\mathbb{Q}}$ のシンプレクティック・レベル構造 $(\eta_{N,\mathbb{Q}})_N$ が N について整合的に A 上のシンプレクティック・レベル構造へそれぞれ一意的に延長される．

$A_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}}$ が T 上のアーベルスキームに一意的に延長されることを示す．はじめに T が離散付値環 R に対応するアフィンスキームであるときを考える．L を R の商体とし，p と異なる素数 ℓ を 1 つとる．各 $m \geq 1$ に対してシンプレクティック・レベル ℓ^m 構造を考えることにより $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ 加群としての同型 $\mathbb{Z}_{\ell}^{2n} \cong T_{\ell}A_{\mathbb{Q}}$ を得る．Galois 群は左辺には自明に作用するので，特に $A_{\mathbb{Q}}$ の ℓ 進 Tate 加群は不分岐である．よって，Néron–Ogg–Shafarevich の判定法（定理 3.10）より $A_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Spec}\, L$ は $T = \mathrm{Spec}\, R$ 上のアーベルスキームに一意的に延長される．

T が一般のときは，上の議論より $A_{\mathbb{Q}}$ が任意の余次元 1 の点上まで延長されることがわかる．それらを貼り合わせることである T の稠密開集合 U であって $T_{\mathbb{Q}}$ と余次元 1 の点を含むものの上まで $A_{\mathbb{Q}}$ を延長できる．よって定理 3.13 より $A_{\mathbb{Q}}$ は T 上に一意的に延長される．以上より $A_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}}$ は T 上のアーベルスキームに一意的に延長されることがわかった．このアーベルスキームを $A \to T$ とおく．

次に $A_{\mathbb{Q}}$ 上の主偏極 $\lambda_{\mathbb{Q}}$ が A 上の主偏極に一意的に延長されることを示す．$(A_{\mathbb{Q}})^{\vee} = (A^{\vee})_{\mathbb{Q}}$ に注意すると，命題 3.12 より $\lambda_{\mathbb{Q}}$ は A 上の偏極 λ に一意的に延長される．ここで $\mathrm{Ker}\, \lambda$ は T 上の有限平坦群スキームであり，$T_{\mathbb{Q}}$ 上では階数が 1 なの

で，T 上でも階数は 1 であり，λ は主偏極であることがしたがう．

最後に $A_{\mathbb{Q}}$ のシンプレクティック・レベル構造 $(\eta_{N,\mathbb{Q}})_N$ が N について整合的に A 上のシンプレクティック・レベル構造へ一意的に延長されることを示す．N が p と互いに素であることから $A[N]$ は T 上の有限エタール群スキームである．T 上の有限エタール群スキーム $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_T$ と $A[N]$ は $T_{\mathbb{Q}}$ 上では同型であるので，特に $A[N]$ は T 上の定数群スキームである．よって，N について整合的な $T_{\mathbb{Q}}$ 上の同型 $\eta_{N,\mathbb{Q}}$ は T 上の同型に一意的に延長され，N について整合的なシンプレクティック・レベル構造を定めることがしたがう．

以上より射 $T_{\mathbb{Q}} \to \big(\varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,K(N)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\big)_{\mathbb{Q}}$ は射 $T \to \varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,K(N)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ に一意的に延長されることがわかった．よって，$\varprojlim_{p\nmid N} \mathcal{A}_{n,K(N)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ は延長条件を満たす滑らかな整モデル，すなわち整正準モデルである． □

4 不分岐 PEL 型の志村多様体の整正準モデル

第 3 節では整正準モデルの定義を紹介し，Siegel モジュラー多様体が整正準モデルとなることをみた．これからはより広いクラスの志村多様体について整正準モデルを構成することが目標となる．この節では [Kot92] および [Lan13] に沿って不分岐 PEL 型の志村多様体の整正準モデルを構成する．これは第 5 節で説明するアーベル型志村多様体の整正準モデルの存在の特殊な場合とみることができるが，第 5 節の証明とは異なり，具体的なモジュライ問題とその表現可能性を考えることで，整正準モデルの存在を示す．不分岐 PEL 型の志村多様体は数論へのいろいろな応用があり，本節で扱うモジュライ問題は本報告集の他の稿でも使われる（[三枝]，[千田]）．

4.1 不分岐 PEL 型の志村データ

この小節では以後の議論で必要となる記号を導入する．以下のような PEL データ[*13] $(B,*,V,\langle\,,\,\rangle,h)$ およびそれに伴うデータを考えよう（[今井, §4.1]）．

B を有限次元半単純 $\mathbb{Q}$ 代数とし，B の中心を F とおく．また B の $\mathbb{Z}$ 整環 $\mathcal{O}_B$ であって，$\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ が $B_{\mathbb{Q}_p}$ の極大整環となるものを 1 つとる[*14]．Wedderburn の定

*13 ここでは偏極 (Polarization) および自己準同型 (Endomorphism) に関するデータのみを考えるので PE データとよぶべきかもしれない．

*14 [Kot92] の $\mathcal{O}_B$ は本稿の $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ に対応する．

理より，体 k 上の有限次元半単純代数は有限次元単純 k 代数の直積であり，有限次元単純 k 代数は k 上の斜体の行列環で尽くされる．特に F は $\mathbb{Q}$ の有限拡大体の直積である．

$*\colon B \to B$ を B 上の正な反対合であって，$\mathcal{O}_B$ を保つものとする．ただし B 上の反対合が正であるとは任意の 0 でない $B_{\mathbb{R}} := B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の元 x について $\mathrm{tr}_{B_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}}(xx^*) > 0$ となることをいう．このような組 $(B, *)$ の分類は知られている（Albert の定理）．特に F の $*$ 不変部分環を F_0 とおくと，これは総実体の直積となる．

V を 0 でない有限生成左 B 加群とする．また $\langle\,,\,\rangle$ を V 上の $\mathbb{Q}$ 値非退化交代形式であって，任意の $b \in B$ および $v, w \in V$ に対して $\langle bv, w\rangle = \langle v, b^*w\rangle$ となるものとする．$C := \mathrm{End}_B(V)$ とおく．これは中心が F となる単純 $\mathbb{Q}$ 代数で，$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$ により定まる反対合 $f \mapsto f^*$ をもつ．

G を $\mathbb{Q}$ 上の代数群で R 値点が以下で与えられるものとする．

$$G(R) = \{x \in C_R^{\times} \mid x\,x^* \in R^{\times}\}.$$

また G_0 を F_0 上の代数群で R' 値点が $G_0(R') = \{x \in (C \otimes_{F_0} R')^{\times} \mid x\,x^* = 1\}$ で与えられるものとする（F_0 代数 R' について $C_{R'} := C \otimes_{\mathbb{Q}} R'$ と $C \otimes_{F_0} R'$ の違いに注意せよ）．最後に $G_1 := \mathrm{Res}_{F_0/\mathbb{Q}}\, G_0$ とおく．これは $\mathbb{Q}$ 上の代数群で R 値点は $G_1(R) = \{x \in C_R^{\times} \mid x\,x^* = 1\}$ となる．

$h\colon \mathbb{C} \to C_{\mathbb{R}}$ を $*$ 準同型であって，$\langle v, h(i)w\rangle$ が正定値となるものとする（$\mathbb{C}$ の反対合として複素共役を考える）．また h の $G(\mathbb{R})$ 共役類のなす集合を X とおく[*15]．このとき組 (G, X) は志村データとなる．

$E := E(G, X)$ を (G, X) のリフレックス体とする．これは次のようにして定義することができる．

$B_{\mathbb{C}}$ 加群としての分解 $V_{\mathbb{C}} = V_1 \oplus V_2$ を，$h(z)$ が V_1 および V_2 にそれぞれ z および $\overline{z}$ で作用するものとして定める（定義より $h(z)$ は B の作用と可換なので V_1 および V_2 は $V_{\mathbb{C}}$ の $B_{\mathbb{C}}$ 部分加群となる）．このとき $E \subset \mathbb{C}$ は $B_{\mathbb{C}}$ の複素表現 V_1 の同型類の定義体である．すなわち，E は $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の部分群 $\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \mid V_1$ と $V_1 \otimes_{\mathbb{C},\sigma} \mathbb{C}$ は $B_{\mathbb{C}}$ 加群として同型$\}$ の固定体である．

最後に $m := [F : F_0](\dim_F C)^{1/2}$ とおく．h が存在することから m は偶数になる．そこで $m = 2n$ とおく．

[*15] [Kot92] では h^{-1} の共役類を X とかいている．この違いは正準モデルの定義の違いによる（*cf.* [越川, 注意 5.21]）．本稿では [Mil05, 越川, 今井] の定義にしたがう．

B が単純 $\mathbb{Q}$ 代数のとき, 対応する G は次の 3 つの型に分類される ([Kot92, p.391]. B が単純とは限らない場合も [Lan13, 1.2.3.11] で扱われている).

A 型： $[F : F_0] = 2$ のとき．このとき $C_{\mathbb{R}} \cong M_n(\mathbb{C})^{[F_0 : \mathbb{Q}]}$ となり，$G_1(\mathbb{R})$ はユニタリ群となる．

C 型： $F = F_0$ かつ $G_1(\mathbb{R})$ がシンプレクティック群のとき．このとき $C_{\mathbb{R}} \cong M_{2n}(\mathbb{R})^{[F_0 : \mathbb{Q}]}$ となる．

D 型： $F = F_0$ かつ $G_1(\mathbb{R})$ が四元数直交群のとき．このとき $C_{\mathbb{R}} \cong M_n(\mathbb{H})^{[F_0 : \mathbb{Q}]}$ となる．

A 型および C 型において G は（連結）簡約群になる．D 型の場合，G は $2^{[F_0:\mathbb{Q}]}$ 個の連結成分をもつ．以下では簡単のため B が単純 $\mathbb{Q}$ 代数であるとし，さらに A 型および C 型のみを考える．

第 3 節で扱った $G_{\mathbb{Q}_p}$ が不分岐かつ K_p が超特殊部分群という状況を考えるために以後はさらに次を仮定する．

(1) $B_{\mathbb{Q}_p}$ は $\mathbb{Q}_p$ の不分岐拡大体上の行列環の直積と同型である．
(2) 次の条件を満たす $\mathcal{O}_B$ の作用で安定な V の $\mathbb{Z}$ 格子 Λ が存在する：
$\langle\,,\rangle$ は Λ 上の $\mathbb{Z}$ 値非退化交代形式を誘導し，さらに $\Lambda_{\mathbb{Z}_p} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ は $\langle\,,\rangle$ について自己双対的である．

このとき $G_{\mathbb{Q}_p}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の不分岐簡約群となる．K_p を $\Lambda_{\mathbb{Z}_p}$ の固定部分群として得られる $G(\mathbb{Q}_p)$ の超特殊部分群とし，K^p を $G(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群とする．

最後にモジュライ問題の定式化で必要となる多項式を導入しておこう．$\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 基底 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を 1 つ固定し，$\det_{V_1} := \det(t_1\alpha_1 + \cdots + t_r\alpha_r; V_1)$ とおく．これは $t_1, \ldots, t_r$ を変数とする次数が $\dim_{\mathbb{C}} V_1$ の複素斉次多項式である．このとき $\det_{V_1}$ の係数は $\mathbb{C}$ の部分環 $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ に含まれる．実際，リフレックス体 E の定義より V_1 の同型類は E 上定義されるので，$\det_{V_1}$ の係数は E に含まれる．一方で，V_1 自体が定義される E の有限拡大体 E' を 1 つとると，適切な V_1 の基底について各 α_i の V_1 への作用の行列表示の成分は全て $\mathcal{O}_{E'} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ に入る．よって $\det_{V_1}$ の係数は $\mathcal{O}_{E'} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ にも含まれる．これらを合わせることで $\det_{V_1}$ の係数は $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = E \cap \left(\mathcal{O}_{E'} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ に含まれることがしたがう．

以上のデータから志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$ が考えられる．第 4.2 小節では $\mathcal{O}_E\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ 上のモジュライ問題 $\mathcal{S}_{K^p}$ を定義してその表現可能性を示す．そして続く第 4.3 小節では志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$ が S_{K^p} の一般ファイバーの連結成分としてあらわれることを示し，$\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の整正準モデルの存在を導く．

4.2 モジュライ関手 $\mathcal{S}_{K^p}$ の定義と表現可能性

[Kot92, §5] および [Lan13, 1.4.2.1] にしたがってモジュライ問題を導入しよう．記号は前小節と同じとする．

定義 4.1 関手 $\mathcal{S}_{K^p}\colon \mathrm{Sch}_{/\mathcal{O}_E\otimes\mathbb{Z}_{(p)}}\longrightarrow \mathrm{Set}$ を（局所ネーター）スキーム S に対して Kottwitz の行列式条件を満たす 4 つ組 $(A,\lambda,i,\overline{\eta^p})$ の同値類のなす集合を対応させるものとして定める．ただし

- $A\to S$ はアーベルスキーム．
- $\lambda\colon A\to A^\vee$ は $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 偏極[*16]．
- $i\colon \mathcal{O}_B\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{(p)}\to \mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{(p)}$ は $*$ 準同型[*17]．
- $\overline{\eta^p}$ は A のレベル K^p 構造．すなわち，S が連結のときは歪エルミート $B_{\mathbb{A}_f^p}$ 加群の同型
$$\eta^p\colon \bigl(V_{\mathbb{A}_f^p},\mathbb{A}_f^p,\langle\ ,\ \rangle\bigr)\xrightarrow{\cong}\bigl(H_1(A_s,\mathbb{A}_f^p),\mathbb{A}_f^p(1),e_\lambda\bigr)$$
の K^p 軌道 $\overline{\eta^p}=\eta^pK^p$ であって，$\pi_1(S,s)$ によって保たれるもの．ここで s は S の幾何的点であり，$H_1(A_s,\mathbb{A}_f^p)$ は A_s の Tate $\mathbb{A}_f^p$ 加群を $\pi_1(S,s)$ 加群とみなしたもの．なお S が連結でないときは，連結成分ごとに考える．

ただし $(A,\lambda,i,\overline{\eta^p})$ が **Kottwitz の行列式条件**を満たすとは $\mathrm{Lie}(A)$ 上の $\mathcal{O}_S$ 線形写像 $t_1\alpha_1+\cdots+t_r\alpha_r$ の行列式が $\mathcal{O}_S$ 係数の斉次多項式として $\det_{V_1}$ に一致することをいう．

また組 $(A,\lambda,i,\overline{\eta^p})$, $(A',\lambda',i',\overline{\eta'^p})$ は次の条件を満たすとき同値であるという：$\mathcal{O}_B$ の作用と可換な $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 同種射 $f\colon A\to A'$ と（S の各連結成分ごとに）$r\in\mathbb{Z}_{(p),>0}^\times$ が存

[*16] アーベルスキームの間の準同種 $f\colon A\to B$ は，次数が p と素な同種射 $A'\to A, A'\to B$ によって表せるとき，$\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 同種であるという．さらに $B=A^\vee$ のとき $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 同種 $f\colon A\to A^\vee$ が $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 偏極であるとは，ある自然数 N が存在して $[N]\circ f$ が偏極になることをいう．

[*17] $\mathrm{Im}\,i\subset\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}$ が λ から定まる Rosati 対合で保たれ，さらに i は反対合を保つことを意味する．

在して，$\lambda = rf^\vee \circ \lambda' \circ f$ が成り立ち，$(\overline{\eta'^p})^{-1} \circ H_1(f, \mathbb{A}_f^p) \circ \overline{\eta^p} \in \operatorname{End} V \otimes \mathbb{A}_f^p$ は恒等写像の K^p 軌道に含まれ，さらに $\alpha'^{-1} \circ \alpha \in (\mathbb{A}_f^p)^\times$ は r の $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p) \to (\mathbb{A}_f^p)^\times$ による軌道にはいる（ここで $\alpha\colon \mathbb{A}_f^p \to \mathbb{A}_f^p(1)$ は η^p の定義にでてくる同型を表す．α' についても同様）．

注意 4.2 定義に現れる Kottwitz の行列式条件はモジュライ空間 $\mathcal{S}_{K^p}$ を志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G, X)$ と結びつけるために必要となる．詳細は定理 4.17 の証明をみよ．

次がこの小節の主定理である．

定理 4.3 十分小さい K^p に対し $\mathcal{S}_{K^p}$ は $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上の滑らかな準射影的スキームで表現される．

注意 4.4 定理 4.3 の証明の概要は [Kot92, §5] に与えられている．ここでは [Lan13] で解説されている整レベル構造によるモジュライ問題の言い換えを用いて，Kottwitz による証明を解説する．なお [GN09] にも解説がある．

注意 4.5 本稿では扱わないが $\mathcal{S}_{K^p}$ については次も重要である．

(1) $C := \operatorname{End}_B(V)$ が斜体のときは，$\mathcal{S}_{K^p}$ は $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上射影的となる．これをみるためには局所ネータースキームについての固有射の付値判定法（[EGAII, 7.3.8]）を用いる．[Kot92, p. 392] を参照せよ．
(2) G の代数的表現 ξ が与えられたとき，射影 $G(\mathbb{A}_f^p) \to G(\mathbb{Q}_\ell)$ と合成することで，ξ に伴う $G(\mathbb{A}_f^p)$ の連続 ℓ 進表現を考えることができる．これより各 K^p に対して $\mathcal{S}_{K^p}$ 上の ξ に伴う ℓ 進局所系が定まり，そのエタールコホモロジーを考えることが応用上重要である（[Kot92, §6]）．これについては [三枝] で解説されている．

定理 4.3 の証明の概略

$N \geq 3$ を p と互いに素な自然数とし，$K_N^p = \operatorname{Ker}\bigl(G(\widehat{\mathbb{Z}}^p) \to G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\bigr) \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ とおく[*18]．

補題 4.6 p と互いに素な任意の自然数 $N \geq 3$ に対し定理 4.3 が K_N^p について成

[*18] C の $\mathbb{Z}$ 格子 $\operatorname{End}_{\mathcal{O}_B}(\Lambda)$ を用いることで，$G(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ および $G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ を定義する．

り立つとする．このとき定理 4.3 は次を満たす任意の K^p について成り立つ：ある $N \geq 3$ について $K^p \subset K^p_N$ となる．

証明 $\{K^p_{N'}\}_{N|N',(N',p)=1}$ は K^p_N の部分群からなる単位元の開近傍を与える．特に $K^p \supset K^p_{N'}$ を満たす p と互いに素な自然数 N' が存在しする．このとき仮定より $\mathcal{S}_{K^p_{N'}}$ は $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上の滑らかな準射影的スキームで表現される．

$N \geq 3$ かつ $K^p \subset K^p_N$ であるので Serre の剛性定理より $\mathcal{S}_{K^p_{N'}}$ の有限群 $K^p/K^p_{N'}$ による商スキームが存在して，$\mathcal{S}_{K^p}$ はその商スキームにより表現されることがわかる．$\mathcal{S}_{K^p_{N'}} \to \mathcal{S}_{K^p}$ は有限エタール射なので $\mathcal{S}_{K^p}$ も $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上の滑らかな準射影的スキームで表現される． □

以下では $K^p = K^p_N$ のときに定理 4.3 を示す．第 2 節の議論でみたように表現可能性の証明においては同種類によるモジュライ解釈よりも同型類によるモジュライ解釈を用いるほうが議論がしやすい．そこでまずは $\mathcal{S}_{K^p_N}$ の同型類によるモジュライ解釈を考える．

定義 4.7 $N \geq 3$ を p と互いに素な自然数とする．関手 $\mathcal{S}_{B,N}\colon \mathrm{Sch}_{/\mathcal{O}_E\otimes\mathbb{Z}_{(p)}} \to \mathrm{Set}$ をスキーム S に対して Kottwitz の行列式条件を満たす 4 つ組 (A, λ, i, η_N) の同型類のなす集合を対応させるものとして定める．ただし

(1) $A \to S$ はアーベルスキーム．
(2) $\lambda\colon A \to A^\vee$ は次数が p と素な偏極[*19]．
(3) $i\colon \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A)$ は $*$ 準同型．
(4) $\eta_N\colon (\Lambda/N\Lambda)_S \to A[N]$ は A の $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 同変なシンプレクティック・レベル N 構造であって，持ち上げ条件を満たすもの．ただしシンプレクティック・レベル N 構造 η_N が持ち上げ条件を満たすとは，各 S の連結成分ごとにある幾何的点 s が存在して次が成り立つことをいう：シンプレクティック $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 加群の同型 $\eta_{N,s}\colon \Lambda/N\Lambda \to A_s[N]$ はある $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^p$ 同変なシンプレクティック $\widehat{\mathbb{Z}}^p$ 加群の同型 $\eta_s\colon \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^p \to H_1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p)$ に持ち上がる．

ただし組 (A, λ, i, η_N) と $(A', \lambda', i', \eta'_N)$ が同型であるとはアーベルスキームの同型 $f\colon A \to A'$ であって，$\lambda = f^\vee \circ \lambda' \circ f$, $f \circ i = i' \circ f$ および $\eta'_N = f \circ \eta_N$ を満たすものが存在することをいう．

[*19] [Lan13, 1.4.1.2] の定義には誤植がある．[Lan13, 1.3.6.1] も参照せよ．

注意 4.8　S が連結であるとする．S のある幾何的点において持ち上げ条件が成り立つならば，S の任意の幾何的点について持ち上げ条件が成り立つ（[Lan13, 1.3.6.7]）．

注意 4.9　$B = \mathbb{Q}$ のとき $G = \mathrm{GSp}_{2n}(\Lambda, \langle\ ,\rangle)$ である．命題 2.30 および定義 2.31 の記号のもとで，K_N^p は $K(N) \subset \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}_f) = \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}_f^p) \times \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ の $\mathbb{A}_f^p$ 成分であり，$\mathcal{S}_{\mathbb{Q},N} \cong \mathcal{A}_{\Lambda,N,p}$ となる，特に $\mathcal{S}_{\mathbb{Q},N}$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の滑らかな準射影的スキームで表現される（定理 2.33）．

補題 4.10　関手の自然な同型 $\mathcal{S}_{B,N} \cong \mathcal{S}_{K_N^p}$ がある．

証明　まず関手の射 $\mathcal{S}_{B,N} \to \mathcal{S}_{K_N^p}$ があることを説明する．

$S \in \mathrm{Sch}_{/\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}}$ とし，$(A, \lambda, i, \eta_N) \in \mathcal{S}_{B,N}(S)$ を任意にとる．簡単のため S が連結であるとし，S の幾何的点 s を 1 つとる．A のシンプレクティック・レベル N 構造 η_N から A のレベル K_N^p 構造 $\overline{\eta^p}$ が定義されることをみればよい．

η_N は持ち上げ条件を満たすので，s における η_N の持ち上げ $\eta_s\colon \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^p \to H_1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p)$ を 1 つとる．このとき任意の $\eta_{N,s}$ の持ち上げ η_s' はある $k \in K_N^p$ について $\eta_s \circ k$ とかける．よって η_s の K_N^p 軌道 $\eta_s K_N^p$ は持ち上げのとり方によらない．また $\pi_1(S, s)$ は $A_s[N]$ に自明に作用するので，$\eta_s K_N^p$ は $\pi_1(S, s)$ の作用で保たれる．よって，$\eta^p := \eta_s \otimes \mathbb{A}_f^p\colon V_{\mathbb{A}_f^p} \to H_1(A_s, \mathbb{A}_f^p)$ とおくと $\overline{\eta^p} := \eta^p K_N^p$ は持ち上げのとり方によらない A のレベル K_N^p 構造を定める．

(A, λ, i, η_N) に対して $(A, \lambda, i, \overline{\eta^p})$ の同種類を対応させることで写像 $\mathcal{S}_{B,N}(S) \to \mathcal{S}_{K_N^p}(S)$ が定まる．これは S について関手的なので，関手の射 $\mathcal{S}_{B,N} \to \mathcal{S}_{K_N^p}$ を定める．

次に写像 $\mathcal{S}_{B,N}(S) \to \mathcal{S}_{K_N^p}(S)$ が単射であることを示す．$\mathcal{S}_{B,N}(S)$ の元 (A, λ, i, η_N)，$(A', \lambda', i', \eta_N')$ をとり，それらの像 $(A, \lambda, i, \overline{\eta^p}), (A', \lambda', i', \overline{\eta'^p})$ が $\mathcal{S}_{K_N^p}(S)$ において同値であるとする．よって，ある $\mathcal{O}_B$ 同変な $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 同種 $f\colon A \to A'$ と $r \in \mathbb{Z}_{(p),>0}^\times$ が存在して，$\lambda = f^\vee \circ r\lambda' \circ f$ かつ f は $\overline{\eta^p}$ を $\overline{\eta'^p}$ にうつす．特に，$H_1(f)(H_1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p)) = H_1(A_s', \widehat{\mathbb{Z}}^p)$ がしたがい，f はアーベルスキームの同型であることがわかる．さらにレベル構造の条件から $r \in \mathbb{Z}_{(p),>0}^\times \cap \left(\widehat{\mathbb{Z}}^p\right)^\times$，すなわち $r = 1$ がしたがい，f は $\mathcal{S}_{B,N}(S)$ における同型 $(A, \lambda, i, \eta_N) \cong (A', \lambda', i', \eta_N')$ を定めることがわかる．

最後に写像 $\mathcal{S}_{B,N}(S) \to \mathcal{S}_{K_N^p}(S)$ が全射であることを示す．$(A, \lambda, i, \overline{\eta^p}) \in \mathcal{S}_{K_N^p}(S)$ を任意にとる．このとき $\eta^p(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^p) \subset H_1(A_s, \mathbb{A}_f^p)$ は $\pi_1(S, s)$ および $\mathcal{O}_B$ の作

用で安定である．よって，あるアーベルスキーム $A' \to S$，次数が p と素な偏極 $\lambda' \colon A' \to A'^{\vee}$，$*$ 準同型 $i' \colon \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A')$ と $\mathcal{O}_B$ 同変 $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ 同種 $f \colon A \to A'$ が存在して，$H_1(f)^{-1}(H_1(A'_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p)) = \eta^p(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^p)$ となる．

このときある $r \in \mathbb{Z}_{(p),>0}^{\times}$ が存在して，$r\lambda'$ は同種射となり，$(A, \lambda, i, \overline{\eta^p})$ と $(A', r\lambda', i', H_1(f) \circ \overline{\eta^p})$ は同値になることがわかる（詳細は [Lan13, 1.4.3.4] をみよ）．$H_1(f) \circ \overline{\eta^p}$ から A' の持ち上げ条件を満たす $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 同変なシンプレクティック・レベル N 構造 η_N が定められるので，全射性がしたがう． □

この補題より $K^p = K^p_N$ のときに定理 4.3 を示すには忘却関手

$$\mathcal{S}_{B,N} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{Q},N}, \quad (A, \lambda, i, \eta_N) \longmapsto (A, \lambda, \eta_N)$$

が相対的に表現可能であることを示せばよい（$\mathcal{S}_{\mathbb{Q},N}$ のモジュライ問題において $*$ 準同型 $\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(A)$ は一意的に定まるので省略している）．

補題 4.11 S を $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ スキームとし，関手の射 $S \to \mathcal{S}_{\mathbb{Q},N}$ が与えられているとする．このとき関手 $\mathcal{S}_{B,N} \times_{\mathcal{S}_{\mathbb{Q},N}} S$ は（各連結成分が）S 上射影的な S スキームによって表現される．

証明 まず次の主張を示す．

主張 4.12 $A \to S$ をアーベルスキームとする．このとき S スキーム T に対し集合 $\mathrm{End}_T(A \times_S T)$ を対応させる関手は表現可能であり，さらに表現スキームの各連結成分は S 上射影的である．

主張の証明の方針 アーベルスキームの自己準同型 $f \colon A \times_S T \to A \times_S T$ に対してそのグラフ $\Gamma_f \subset (A \times_S A) \times_S T$ を対応させることで $\mathrm{End}_T(A \times_S T)$ は $(A \times_S A) \times_S T$ の閉部分スキームのなす集合に含まれる．よって，まずは関手 $T \mapsto \mathrm{End}_T(A \times_S T)$ が $A \times_S A$ の Hilbert スキームの局所閉部分スキームで表現されることをみる．その後，このスキームの各連結成分が S 上射影的であることを命題 3.11 と固有性付値判定法から導く．詳細は例えば [GN09, 3.4.4] や [Lan13, 1.3.3.7] を参照せよ． □

補題の証明を続ける．$S \to \mathcal{S}_{\mathbb{Q},N}$ が定める S 上のデータを (A, λ, η_N) とおく．このアーベルスキーム $A \to S$ に主張を適用して得られるスキームを $\mathcal{E}$ とおく．

$\mathcal{O}_B$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $(e_1, \ldots, e_r)$ であって $*$ の作用で閉じているものをとる．このとき，S スキーム T に対して $*$ 準同型 $\mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A \times_S T)$ 全体のなす集合を対応させる

関手は $\mathcal{E}^r$ の閉部分スキームで表現されることが確かめられる．この閉部分スキームを $\mathcal{E}_B$ とおく．

さらに $\mathcal{E}_B(T)$ に対応する $*$ 準同型 $i_T\colon \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A \times_S T)$ が，

- Kottwitz の行列式条件を満たし，
- $\eta_{N,T}\colon (\Lambda/N\Lambda)_T \to (A \times_S T)[N]$ は持ち上げ条件を満たす $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 同変なシンプレクティック・レベル N 構造を与える

という条件は $\mathcal{E}_B$ のいくつかの連結成分の合併で表現されることがわかる．このスキームが $\mathcal{S}_{B,N} \otimes_{\mathcal{S}_{\mathbb{Q},N}} S$ を表現する．$\mathcal{E}_B$ の各連結成分は S 上射影的なので補題がしたがう． □

以上の議論から次を得た．

主張 4.13 $N \geq 3$ を p と互いに素な自然数とするとき，$\mathcal{S}_{K_N^p} = \mathcal{S}_{B,N}$ は各連結成分が $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上準射影的となるスキームで表現される．

次に平滑性について考えよう．

主張 4.14 $N \geq 3$ を p と互いに素な自然数とするとき，$\mathcal{S}_{K_N^p} = \mathcal{S}_{B,N} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ は滑らかである．

主張の証明の方針 証明のポイントは定理 2.26 を用いて，シンプレクティック空間の議論に帰着することにある．

$\mathcal{S}_{B,N} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ は局所有限表示なので $\mathcal{S}_{B,N}$ の各閉点で形式的に滑らかであることをいえばよい．x を $\mathcal{S}_{B,N}$ の閉点とし，$(A_x \to \mathrm{Spec}\,k(x), \lambda_x, i_x, \eta_{N,x})$ を x に対応する組とする（特にこの組は Kottwitz の行列式条件を満たす）．

R を剰余体が $k(x)$ となる Artin 局所 $W(k(x))$ 代数とする．ここで $W(k(x))$ は $k(x)$ の Witt ベクトルのなす環である（なお $k(x)$ は有限体であることに注意せよ）．R のイデアル I で $I^2 = 0$ を満たすものを任意にとる．

この状況で自然な写像 $\mathcal{S}_{B,N}(R) \to \mathcal{S}_{B,N}(R/I)$ が $x \in \mathcal{S}_{B,N}(k(x))$ の上で全射であることを示せば十分である．$\mathcal{S}_{B,N}(R/I)$ の元 $(A_0 \to \mathrm{Spec}\,R/I, \lambda_0, i_0, \eta_{N,0})$ であって，$R/I \twoheadrightarrow k(x)$ により $(A_x \to \mathrm{Spec}\,k(x), \lambda_x, i_x, \eta_{N,x})$ にうつるものを 1 つとる．$(A_0 \to \mathrm{Spec}\,R/I, \lambda_0, i_0, \eta_{N,0})$ が $\mathcal{S}_{B,N}(R)$ の元に持ち上がることを示せばよ

い[*20].

$(A_0 \to \operatorname{Spec} R/I, \lambda_0, i_0, \eta_{N,0})$ の R への持ち上げは常に Kottwitz 条件を満たすことがわかる（詳細は [Lan13, 2.2.2.9] を参照せよ）．また R 上の有限エタールスキームのなす圏と R/I 上の有限エタールスキームのなす圏は圏同値である．よって，$(A_0 \to \operatorname{Spec} R/I, \lambda_0, i_0)$ の R への持ち上げがあれば R/I 上の $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 同変なシンプレクティック・レベル N 構造 $\eta_{N,0}$ は R へ一意的に持ち上がり，さらに持ち上げ条件を満たす．

よって，あとは $(A_0 \to \operatorname{Spec} R/I, \lambda_0, i_0)$ が（R を適当なエタール拡大にとりかえたのちに）R へ持ち上がることをいえばよい．これには定理 2.26 を用いる．$(A_0 \to \operatorname{Spec} R/I, \lambda_0, i_0)$ は R 加群 $D(A_0)_R$ と，その上の完全ペアリング $\langle\, , \rangle_{\lambda_0}$ および各 $b \in \mathcal{O}_B$ に対し R 準同型 $i(b) \in \operatorname{End}_R D(A_0)_R$ を定める．定理 2.26 より $D(A_0)_R$ の許容フィルトレーション Fil^1 であって，$\langle \mathrm{Fil}^1, \mathrm{Fil}^1 \rangle_{\lambda_0} = 0$ かつ各 $b \in \mathcal{O}_B$ について $i(b)(\mathrm{Fil}^1) \subset \mathrm{Fil}^1$ を満たすものが存在することをいえばよい．これはシンプレクティック空間の問題に帰着することで示される．詳細は [Lan13, 2.2.4.9] を参照せよ[*21]. □

補題 4.6 と主張 4.13 および主張 4.14 より，十分小さい K^p に対し $\mathcal{S}_{K^p}$ は各連結成分が $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上滑らかかつ準射影的なスキームで表現されることがわかった．次節で $\mathcal{S}_{K^p}$ の $\mathbb{C}$ 値点をみることで，$\mathcal{S}_{K^p} \to \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ が有限型であることを示す (注意 4.18)[*22]．この事実と合わせることで定理 4.3 がしたがう．

4.3 整正準モデルの構成

前小節で定義したモジュライ空間 $\mathcal{S}_{K^p}$ と志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$ の関係を調べよう．リフレックス体 E は $\mathbb{C}$ の部分体なので, 自然な射 $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{C}$ があり, $\mathbb{C}$ 値点のなす集合 $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})$ を考えることができる．まずは $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})$ を $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)(\mathbb{C})$ と結びつける．そのために記号を 1 つ導入する．

定義 4.15 $\ker^1(\mathbb{Q}, G) := \ker\bigl(H^1(\mathbb{Q}, G) \to \prod_{v \le \infty} H^1(\mathbb{Q}_v, G)\bigr)$ と定める．$\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ は $\mathbb{Q}$ 上の次元が $\dim_{\mathbb{Q}} V$ となる歪エルミート B 加群であって，$\mathbb{Q}$ の各素

*20 なお R を適当なエタール拡大にとりかえたのちに持ち上がることを示せば十分である．

*21 なお [Lan13] では de Rham ホモロジーを使うので $D(A_0)_R$ の双対を考えている．

*22 証明には定理 4.3 は使わない．

点 v について $\mathbb{Q}_v$ 上へ係数拡大すると $V_{\mathbb{Q}_v}$ と同型になるようなものの同型類のなす（点付き）集合である．

定義より $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ が 1 点集合であることと次は同値である：

> 歪エルミート B 加群 W が $\dim_{\mathbb{Q}} W = \dim_{\mathbb{Q}} V$ を満たし，全ての素点 v について $W_{\mathbb{Q}_v} \cong V_{\mathbb{Q}_v}$ となるならば W は V と歪エルミート B 加群として同型である．

このとき G について Hasse 原理が成立するという．$\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ について次の事実が知られている．

定理 4.16

(1) G が A 型かつ n が偶数であるとき，または G が C 型のとき $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ は 1 点集合である．

(2) G が A 型かつ n が奇数であるとき，$\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ は有限集合である．

以上の準備のもとでモジュライ空間 $\mathcal{S}_{K^p}$ と志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G, X)$ の関係を述べよう．

定理 4.17 $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})$ は $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G, X)(\mathbb{C})$ を $\left|\ker^1(\mathbb{Q}, G)\right|$ 個直和したものと同一視される．

注意 4.18 定理より $\mathcal{S}_{K^p}$ の連結成分は有限であることがわかる．特に $\mathcal{S}_{K^p} \to \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ は有限型である．

定理 4.17 の証明 $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})$ の元 $(A, \lambda, i, \overline{\eta^p})$ を任意にとる．簡単のため $\mathbb{Q}$ 係数 1 次ホモロジー群 $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ を H とおく．λ および i により H は歪エルミート B 加群の構造をもつ．なおレベル K^p 構造が存在するので $\dim_{\mathbb{Q}} H = \dim_{\mathbb{Q}} V$ がしたがう．さて各素点 v について $H_{\mathbb{Q}_v}$ と $V_{\mathbb{Q}_v}$ を比べよう．

主張 4.19 任意の素数 ℓ に対し歪エルミート $B_{\mathbb{Q}_\ell}$ 加群の同型 $H_{\mathbb{Q}_\ell} \cong V_{\mathbb{Q}_\ell}$ が存在する．同様に歪エルミート $B_{\mathbb{R}}$ 加群の同型 $H_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}}$ が存在する．

主張の証明の概略 $H_{\mathbb{Q}_\ell}$ は A の有理 ℓ 進 Tate 加群 $H_1(A, \mathbb{Q}_\ell) = T_\ell A \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ と歪エルミート $B_{\mathbb{Q}_\ell}$ 加群として同型である．

$\ell \neq p$ とする．レベル K^p 構造 $\overline{\eta^p} = \eta^p K^p$ に現れる同型

$$\eta^p\colon \bigl(V_{\mathbb{A}_f^p}, \mathbb{A}_f^p, \langle\ ,\ \rangle\bigr) \xrightarrow{\cong} \bigl(H_1(A_s, \mathbb{A}_f^p), \mathbb{A}_f^p(1), e_\lambda\bigr)$$

の ℓ 成分は歪エルミート $B_{\mathbb{Q}_\ell}$ 加群の同型 $H_{\mathbb{Q}_\ell} \cong V_{\mathbb{Q}_\ell}$ を定める．なお $B \to B_{\mathbb{Q}_\ell}$ は忠実平坦なので，これより H と V が B 加群として同型であることもしたがう．

$\ell = p$ のときを考える．λ は $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 偏極なので $T_pA \subset H_1(A, \mathbb{Q}_p)$ は λ の定める歪エルミート形式について自己双対な $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ 部分加群である．同様に $\Lambda_{\mathbb{Z}_p} \subset V_{\mathbb{Q}_p}$ は $\langle\,,\,\rangle$ の定める歪エルミート形式について自己双対な $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ 部分加群である．特に $G_{\mathbb{Q}_p}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の連結簡約群としてのモデルをもつ．その特殊ファイバーに Lang の定理を適用することで，$(T_pA)/p(T_pA)$ と $\Lambda_{\mathbb{Z}_p}/p\Lambda_{\mathbb{Z}_p}$ は歪エルミート $\mathcal{O}_B/p\mathcal{O}_B$ 加群としての同型であることがわかる．この同型は歪エルミート $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ 加群として同型 $T_pA \cong \Lambda_{\mathbb{Z}_p}$ に持ち上がることが確かめられるので，特に歪エルミート $B_{\mathbb{Q}_p}$ 加群の同型 $H_{\mathbb{Q}_p} \cong V_{\mathbb{Q}_p}$ を得る．議論の詳細は [Kot92, 7.2] を参照せよ．

最後に歪エルミート $B_{\mathbb{R}}$ 加群の同型 $H_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}}$ が存在することを示す．H と V は B 加群として同型なので，$B_{\mathbb{R}}$ 加群の同型 $H_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}}$ は存在する．$H_{\mathbb{R}}$ および $V_{\mathbb{R}}$ の $B_{\mathbb{C}}$ 加群の構造を考える（$H_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{C}$ 加群としての構造は $H_{\mathbb{R}} = H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{R}) = \operatorname{Lie} A$ から定まる）．$B_{\mathbb{C}}$ 加群としての分解 $V_{\mathbb{C}} = V_1 \oplus V_2$ を思い出そう．同様にして $B_{\mathbb{C}}$ 加群としての分解 $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = H_1 \oplus H_2$ を，$h(z)$ が H_1 および H_2 にそれぞれ z および $\bar{z}$ で作用するものとして定める．Kottwitz の行列式条件より $B_{\mathbb{C}}$ 加群としての同型 $H_1 \cong V_1$ を得るので，$B_{\mathbb{C}}$ 加群の同型 $H_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}}$ も得られる．さらに $H_{\mathbb{R}}$ および $V_{\mathbb{R}}$ は歪エルミート形式 $\langle\,,\,\rangle$ から定まる正定値形式 $(v, w) \mapsto \langle v, h(i)w\rangle$ をもつ．これより $H_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}$ は歪エルミート $B_{\mathbb{C}}$ 加群として同型であることがしたがう．議論の詳細は [Kot92, 4.2] を参照せよ． □

$V^{(1)} = V, V^{(2)}, \ldots, V^{(m)}$ を歪エルミート B 加群であって，歪エルミート加群 $V_{\mathbb{Q}_\ell}^{(i)} \cong V_{\mathbb{Q}_\ell}$ および $V_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}}$ が成立するものの代表類とする（これは $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ の元と一対一に対応するのであった）．各 $V^{(i)}$ について V と同様にして $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $G^{(i)}$ を定義する．このとき同型 $G_{\mathbb{Q}_\ell}^{(i)} \cong G_{\mathbb{Q}_\ell}$ および $G_{\mathbb{R}}^{(i)} \cong G_{\mathbb{R}}$ が得られる．

$$\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(i)} := \bigl\{(A, \lambda, i, \overline{\eta^p}) \in \mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C}) \bigm| H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \cong V^{(i)}\bigr\}$$

とおく（ただし $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \cong V^{(i)}$ は歪エルミート B 加群として同型であることを要請している）．主張 4.19 より $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C}) = \coprod_{1 \le i \le m} \mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(i)}$ となる．

以上の準備のもとで各 $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(i)}$ が $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G^{(i)},X)(\mathbb{C}) = G^{(i)}(\mathbb{Q})\backslash\bigl(X \times (G(\mathbb{A}_f)/K_pK^p)\bigr)$ と同一視されることを確かめよう．(G と $G^{(i)}$ は各素点上では同型なので $G(\mathbb{A}_f) = G^{(i)}(\mathbb{A}_f)$ などが成立することに注意せよ)．

ここでは簡単のため $i=1$ のときのみ扱う．$(A,\lambda,i,\overline{\eta^p}) \in \mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(1)}$ を任意にとる．$H = H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ とおくと，定義より H と V は歪エルミート B 加群として同型である．

歪エルミート B 加群の同型 $H \cong V$ を 1 つ固定する．このとき $T_pA \subset H_{\mathbb{Q}_p} \cong V_{\mathbb{Q}_p}$ は $\langle\,,\,\rangle$ の定める歪エルミート形式について自己双対な $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ 部分加群なので，ある $g_p \in G(\mathbb{Q}_p)$ により $T_pA = g_p\Lambda_{\mathbb{Z}_p}$ とかける．さらに g_p は $G(\mathbb{Q}_p)/K_p$ の元として一意に定まる．また固定した同型 $H_{\mathbb{A}_f^p} \cong V_{\mathbb{A}_f^p}$ のもとで $\overline{\eta^p}$ は $g^p \in G(\mathbb{A}_f^p)/K^p$ を一意的に定める．最後に $B_{\mathbb{R}}$ 加群の同型 $H_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}}$ のもとで $H_{\mathbb{R}} = \mathrm{Lie}\,A$ のもつ $\mathbb{C}$ 加群の構造は $V_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{C}$ 加群の構造を定め，これは $*$ 準同型 $h'\colon \mathbb{C} \to C_{\mathbb{R}}$ を定める．h' は h と共役なので X の元を定める．以上より同型 $H \cong V$ から $X \times (G(\mathbb{A}_f)/K_pK^p)$ の元 $\bigl(h', g_pg^p\bigr)$ が定まった．

この構成は歪エルミート B 加群の同型 $H \cong V$ に依存し，同型を $H \cong V \xrightarrow{g} V$ $(g \in G(\mathbb{Q}))$ によりとりかえると，対応する元は $(ghg^{-1}, g\circ(g_pg^p))$ になる．よって，$(A,\lambda,i,\overline{\eta^p})$ から $G(\mathbb{Q})\backslash\bigl(X \times (G(\mathbb{A}_f)/K_pK^p)\bigr)$ の元が一意的に定まることがわかった．この構成は逆にたどることができるので全単射

$$\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(1)} \cong G(\mathbb{Q})\backslash\bigl(X \times (G(\mathbb{A}_f)/K_pK^p)\bigr) = \mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)(\mathbb{C})$$

を得る．

最後に $i>1$ のときは G の中心 Z をとり $\ker^1(\mathbb{Q},Z) \to \ker^1(\mathbb{Q},G)$ を調べることで，自然な同型 $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(i)} \cong \mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(1)}$ が存在することがわかる（詳細は [Kot92, p.400] を参照せよ）． $\square$

系 4.20 $\mathcal{S}_{K^p}$ の一般ファイバーは

$$\mathcal{S}_{K^p} \otimes E = \coprod_{|\ker^1(\mathbb{Q},G)|} \mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$$

と直和分解する．

証明の概略 定理 4.17 の証明の全単射 $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(i)} \cong G^{(i)}(\mathbb{Q})\backslash\bigl(X\times(G(\mathbb{A}_f)/K_pK^p)\bigr)$ および $\mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(i)} \cong \mathcal{S}_{K^p}(\mathbb{C})^{(1)}$ は $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$ 作用と整合的であることが確かめられ

るので，E スキームとしての直和分解

$$\mathcal{S}_{K^p} \otimes E = \coprod_{1 \le i \le m} \mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G^{(i)}, X)$$

および同型 $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G, X) \cong \mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G^{(i)}, X)$ を得る．詳細は [越川, 今井]（Siegel モジュラー多様体のとき）および [Kot92, p. 400] を参照せよ（脚注*15 に注意せよ）． □

次に $\mathcal{S}_{K^p}$ の直和分解を考えよう．記号の区別をしやすくするため上の証明に現れた E スキームの直和分解 $\mathcal{S}_{K^p} \otimes E = \coprod_{1 \le i \le m} \mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G^{(i)}, X)$ を用いる．$\mathcal{S}_{K^p}$ における $\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G^{(i)}, X)$ の閉包を $\mathscr{S}_{K_pK^p}(G^{(i)}, X)$ とおく．$\mathcal{S}_{K^p}$ は $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上分離的かつ平坦なので，これは $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ スキームの直和分解

$$\mathcal{S}_{K^p} = \coprod_{1 \le i \le m} \mathscr{S}_{K_pK^p}(G^{(i)}, X)$$

を定める（分離性より右辺の合併が直和であること，平坦性より右辺が $\mathcal{S}_{K^p}$ を尽くすことがしたがう）．これより特に $\mathscr{S}_{K_pK^p}(G, X) := \mathscr{S}_{K_pK^p}(G^{(1)}, X)$ は $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 上滑らかかつ準射影的であることもわかる．

$\mathscr{S}_{K_pK^p}(G, X)$ を用いて $\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ の整正準モデルを構成しよう．v を p の上にある E の素点とする．$\mathcal{O}_E$ の v における局所化を $\mathcal{O}_{E,v}$ とおく．

定理 4.21 $\mathscr{S}_{K_p} \otimes \mathcal{O}_{E,v} = \varprojlim_{K^p} \mathscr{S}_{K_pK^p}(G, X) \otimes \mathcal{O}_{E,v}$ は志村多様体 $\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ の $\mathcal{O}_{E,v}$ 上の整正準モデルである．

証明 $\mathscr{S}_{K_p} \otimes \mathcal{O}_{E,v}$ が滑らかな整モデルであることは定理 4.3 の帰結としてすでに確かめた．よって，この整モデルが延長条件を満たすことを示せばよい．

$\mathcal{O}_{E,v}$ 上の形式的滑らかな正則スキーム T と射 $T_E \to \mathscr{S}_{K_p} \otimes E$ が任意に与えられたとする．

$$\varprojlim_{K^p} \mathscr{S}_{K_pK^p}(G, X) \otimes E = \varprojlim_{N \ge 3, (N,p)=1} \mathscr{S}_{K_pK^p_N}(G, X) \otimes E$$

よりこれは p と互いに素な $N \ge 3$ について整合的な射 $T_E \to \mathscr{S}_{K_pK^p_N}(G, X) \otimes E$ を考えることに他ならない．ここで各 $\mathscr{S}_{K_pK^p}(G, X) \otimes E \subset \mathcal{S}_{K^p_N} \otimes E = \mathcal{S}_{B,N} \otimes E$ の（同型類としての）モジュライ解釈より次を得る：アーベルスキーム $A_E \to T_E$，$*$ 準同型 $i_E \colon \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A_E)$，次数が p と互いに素な A_E 偏極 $A_E \to A_E^\vee$，p と互いに素な

N について A_E のシンプレクティック・レベル N 構造 $\eta_{N,E}\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2n}_{T_E} \to A_E[N]$ であって，$N|M$ のとき $\eta_{M,E} \otimes_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \eta_{N,E}$ を満たすもの．

定理 3.14 の証明と同様にして，定理 3.10 および定理 3.13 より $A_E \to T_E$ が T 上のアーベルスキーム $A \to T$ に一意的に延長されることがわかる．また A_E 上の偏極 λ_E は A 上の次数が p と素な偏極に一意的に延長される．実際 $(A_E)^\vee = (A^\vee)_E$ に注意すると，命題 3.12 より λ_E は A 上の偏極 λ に延長される．ここで $\mathrm{Ker}\,\lambda$ は T 上の有限平坦群スキームであり，T_E 上では階数が p と素になるので，T 上でも階数は p と素となり主張がしたがう．

また，$i_E\colon \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A_E)$ は $*$ 準同型 $\mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A)$ に一意的に延長される．実際，Néron モデルの性質より i_E は T の余次元 1 の点上にのびる．これはさらに T の稠密な開集合上にのびるので，命題 3.11 より $*$ 準同型 $\mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A)$ が一意的に定まる．

最後に A_E のシンプレクティック・レベル構造 $(\eta_{N,E})_N$ の延長について考える．定理 3.14 の証明と同様にして，$(\eta_{N,E})_N$ は N について整合的に A 上のシンプレクティック・レベル構造 $(\eta_N)_N$ へ一意的に延長されることがわかる．T は $\mathcal{O}_{E,v}$ 上平坦なので，T の各連結成分と T_E との交わりは空でない．特に，その交わり上の幾何的点については持ち上げ条件が満たされるので，シンプレクティック・レベル N 構造 η_N は持ち上げ条件を満たす．

以上より射 $T_E \to \mathscr{S}_{K_pK^p_N}(G,X) \otimes E$ は N について整合的に射 $T \to \mathcal{S}_{K^p_N} \otimes \mathcal{O}_{E,v}$ に延長されることがわかった．これは明らかに $\mathscr{S}_{K_pK^p_N} \otimes \mathcal{O}_{E,v} \subset \mathcal{S}_{K^p_N} \otimes \mathcal{O}_{E,v}$ を経由する．よって，射 $T_E \to \mathscr{S}_{K_p} \otimes E$ は射 $T \to \mathscr{S}_{K_p} \otimes \mathcal{O}_{E,v}$ に一意的に延長される．すなわち整モデル $\mathscr{S}_{K_p} \otimes \mathcal{O}_{E,v}$ は $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の整正準モデルである． □

5 アーベル型の志村多様体の整正準モデル

この節ではアーベル型の志村多様体の整正準モデルの存在について解説する．

5.1 アーベル型の志村多様体の整正準モデルの存在定理

(G,X) を志村データとし，$E = E(G,X)$ をそのリフレックス体，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_E$ を E の整数環とする．p を素数とし，p の上にある E の素点 v を 1 つとる．G は p で不

分岐であるとし，K_p を $G(\mathbb{Q}_p)$ の超特殊部分群とする（定義 3.4）．今までと同様に

$$\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)=\varprojlim_{K^p}\mathrm{Sh}_{K_pK^p}(G,X)$$

とおく．

定理 5.1 $p>2$ かつ (G,X) がアーベル型[*23]のとき，$\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ は $\mathcal{O}_{(v)}$ 上の整正準モデルをもつ．

注意 5.2 [Kis10] において定理 5.1 が示されている（なお [KMP16] において $p=2$ でも主張が正しいことが示されている）．また [Kis17] では [Kis10] の手法を用いて整正準モデルの特殊ファイバーの点を記述し，Langlands–Rapoport 予想への応用を与えている（これは Kottwitz 予想への進展と言える）．

注意 5.3 [KP18] では K_p が $G(\mathbb{Q}_p)$ のパラホリック部分群である場合に（G についていくつか仮定を置いた上で）ある種の延長条件を満たす整モデルが構成されている．[KP18] の整モデルは以下で述べる超特殊部分群の場合の構成と同様の方法で定義され，さらにその特異点の様子は局所モデルにより記述される．局所モデルを用いた整モデルの研究とその応用については [Rap05] も参照せよ．なお [KP18] を含めた整モデルの研究の概説論文として [Kis20, Pap18] がある．

アーベル型の場合の証明は Hodge 型の場合の証明に帰着される．そこでまずは Hodge 型の場合を考えよう．なお Hodge 型の志村多様体の定義や例については [今井, §4.2] を参照せよ．

Hodge 型のとき

以下では $p>2$ かつ (G,X) を Hodge 型とする．よって，ある有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 V および V 上の非退化交代形式 ψ について志村データの埋め込み $i\colon (G,X)\hookrightarrow(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})$ がとれる（ただし $\mathrm{GSp}:=\mathrm{GSp}(V,\psi)$ とおいた）．

GSp に伴う志村多様体 (Siegel モジュラー多様体) の整モデルにおける $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の閉包の正規化として Hodge 型志村多様体 $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の整モデルを構成し，その平滑性を示すことが定理 5.1 の証明の方針である．そのために次のように補助的なデータをとる（[Kis10, 2.3.2]）．

[*23] アーベル型の志村多様体の定義や例については [今井, §4.3] を参照せよ．

V の $\mathbb{Z}$ 格子 $V_{\mathbb{Z}}$ であって，次を満たすものが存在する：$\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}_{(p)}})$ における G の閉包として定まる $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の代数群 $G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ は一般ファイバーが G となる簡約群になり，さらに $K_p = G_{\mathbb{Z}_{(p)}}(\mathbb{Z}_p)$ となる[*24]．

また $G(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群 K^p を十分小さくとると $K = K_pK^p$ は $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ を保つ．そこで $K'_p \subset \mathrm{GSp}(\mathbb{Q}_p)$ を $V_{\mathbb{Z}_p}$ の固定化群とする．さらに $\mathrm{GSp}(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群 K'^p を十分小さくとり $K' = K'_pK'^p$ とおくと，閉埋め込み $\mathrm{Sh}_K(G,X) \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})_E$ が誘導され，K' は $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ を保つようにできる．このとき適切なモジュライ問題を考えることで $\mathrm{Sh}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の整モデル $\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})$ を構成することができる（注意 2.34）．さらに定理 3.14 の証明と同様の議論により，$\mathscr{S}_{K'_p}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm}) := \varprojlim_{K'^p} \mathscr{S}_{K'_pK'^p}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})$ は $\mathrm{Sh}_{K'_p}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の整正準モデルであることがわかる．

$\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})_{\mathcal{O}_{(v)}}$ における $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の閉包を $\mathscr{S}_K^-(G,X)$ とおく．このとき次が成り立つ．

定理 5.4（[Kis10, Proposition 2.3.5]） 閉点 $x \in \mathscr{S}_K^-(G,X)$ を任意にとる．このとき，$\mathscr{S}_K^-(G,X)$ の x における完備化の各既約成分は $\mathcal{O}_{(v)}$ 上形式的に滑らかである．

ここではまず定理 5.4 を認めて，定理 5.1 の証明を完結させる．定理 5.4 の証明は次小節で説明する．

$\mathscr{S}_K^-(G,X)$ の正規化を $\mathscr{S}_K(G,X)$ とおき，$\mathscr{S}_{K_p} = \varprojlim_{K^p} \mathscr{S}_{K_pK^p}(G,X)$ とおく．Hodge 型の場合の定理 5.1 は次の定理よりしたがう．

定理 5.5 $\mathscr{S}_K(G,X)$ は $\mathcal{O}_{(v)}$ 上滑らかである．また，$\mathscr{S}_{K_p}$ は延長条件を満たす．特に，$\mathscr{S}_{K_p}$ は $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の $\mathcal{O}_{(v)}$ 上の整正準モデルである．

証明 $\mathscr{S}_K^-(G,X)$ はエクセレントスキームなので，定理 5.4 より $\mathscr{S}_K(G,X)$ は $\mathcal{O}_{(v)}$ 上滑らかである（[EGAIV-II, 7.8.3(iii)]）．このことと構成より $\mathscr{S}_{K_p}$ は $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の $\mathcal{O}_{(v)}$ 上滑らかな整モデルであることが確かめられる．あとは $\mathscr{S}_{K_p}$ が延長条件を満たすことをいえばよい．

$\mathcal{O}_{(v)}$ 上形式的滑らかな正則スキーム T と射 $T_E \to \mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ を任意にとる．

[*24] なお Zarhin's trick により $V_{\mathbb{Z}}$ を $\mathrm{Hom}(V_{\mathbb{Z}},V_{\mathbb{Z}})^4$ に取り替えることで $V_{\mathbb{Z}}$ が ψ について自己双対となるようにすることもできる（[Kis17, 1.3.3]）．

$\mathscr{S}_{K'_p}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})$ は $\mathrm{Sh}_{K'_p}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の整正準モデルであるので，合成射 $T_E \to \mathrm{Sh}_{K_p}(G, X) \to \mathrm{Sh}_{K'_p}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})_E$ は $T \to \mathscr{S}_{K'_p}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})_{\mathcal{O}_{(v)}}$ に一意的に延長される．

各 $\mathscr{S}^{-}_{K}(G, X)$ は $\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp}, \mathfrak{H}^{\pm})_{\mathcal{O}_{(v)}}$ における $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ の閉包として定義されていたので，射 $T_E \to \mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ は $T \to \varprojlim_{K^p} \mathscr{S}^{-}_{K_pK^p}(G, X)$ に一意的に延長されることがわかる．最後に，T は正則，特に正規なので，この射は $T \to \mathscr{S}_{K_p} \to \varprojlim_{K^p} \mathscr{S}^{-}_{K_pK^p}(G, X)$ と一意的に経由する．これが延長条件に他ならない． □

注意 5.6 $\mathscr{S}_K(G, X)$ は延長条件を満たすことから，特にこの構成は (G, X) および K_p のみにより，志村データの埋め込み i には依存しないこともわかる．

アーベル型のとき

アーベル型志村多様体についての定理 5.1 を Hodge 型の場合へ帰着する議論の方針を簡単に説明する．基本的にはアーベル型志村多様体の正準モデルの存在を Hodge 型の場合に帰着させる議論と同じことを行う．詳細は [Kis10, §3] を参照せよ．

(G, X) がアーベル型であるとする．すなわち，Hodge 型の志村データ (G', X') と中心的同種 $G'^{\,\mathrm{der}} \to G^{\mathrm{der}}$ であって，同型 $(G'^{\,\mathrm{ad}}, X'^{\,\mathrm{ad}}) \xrightarrow{\cong} (G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$ を誘導するものが存在するとする．このとき次の 3 つを示すことで定理 5.1 が (G, X) について成り立つことがわかる．

- 中心的同種 $G'^{\,\mathrm{der}} \to G^{\mathrm{der}}$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の簡約群の中心的同種 $G'^{\,\mathrm{der}}_{\mathbb{Z}_{(p)}} \to G^{\mathrm{der}}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ に延長される．
- $G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ および $G'_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ から定まる群 $\mathcal{A} := \mathcal{A}(G_{\mathbb{Z}_{(p)}})$ および $\mathcal{A}' := \mathcal{A}(G'_{\mathbb{Z}_{(p)}})^{\circ}$ が存在して，$\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X)$ は $\mathrm{Sh}_{K'_p}(G', X')$ の幾何的連結成分 $\mathrm{Sh}_{K'_p}(G', X')^{+}$ から次のように復元される：

$$\mathrm{Sh}_{K_p}(G, X) \xrightarrow{\cong} [\mathcal{A} \times \mathrm{Sh}_{K'_p}(G', X')^{+}]/\mathcal{A}'.$$

主張にでてくる記号等の詳細は [Kis10, §3] を参照せよ．(G', X') は Hodge 型なので $\mathrm{Sh}_{K'_p}(G', X')$ の幾何的連結成分 $\mathrm{Sh}_{K'_p}(G', X')^{+}$ も滑らかな整モデル $\mathscr{S}_{K'_p}(G', X')^{+}$ をもち，さらに整正準モデルと同様の延長条件を満たす．そこで

$$\mathscr{S}_{K_p}(G, X) := [\mathcal{A} \times \mathscr{S}_{K'_p}(G', X')^{+}]/\mathcal{A}'$$

とおき，これを $\mathcal{O}_{(v)}$ 上に降下させることで $\mathrm{Sh}_{K_p}(G,X)$ の整正準モデルが構成される（[Kis10, Theorem 3.4.10]）．

5.2　定理 5.4 の証明

定理 5.4 の証明の方針について

定理 5.4 の証明をはじめる前に証明の方針を述べておこう．証明のポイントは $\mathscr{S}_K(G,X)$ の閉点での完備局所環を p 可除群の「G 構造付き」変形環と結びつけることにある．

$\mathscr{S}_K(G,X)$ の閉点での完備局所環は，対応する剰余体上のアーベル多様体とその付加構造の変形の様子を記述する．ここで剰余体は標数 p の有限体であり，アーベル多様体の変形は，対応する p 可除群の変形でわかる．そこで付加構造をどう捉えるかがポイントになる．

Hodge 型の志村多様体は閉埋め込み $G \subset \mathrm{GSp}$ をもち，この閉埋め込みはテンソルの有限集合により定義される．よって志村多様体の $\mathbb{C}$ 値点は（偏極とレベル構造付き）アーベル多様体と，テンソルの有限集合の組としてとらえられる．同様にして Faltings は [Fal99, §7] において，p 可除群の変形問題の文脈で「テンソル付きの変形問題」を考え，その変形環が形式的に滑らかであることを示した．

[Kis10] の方針は $\mathscr{S}_K(G,X)$ の閉点での完備局所環の各既約成分が Faltings の変形環と同型であることを示すことで，その形式的平滑性を導くというものである（なおこのアイデアは [Vas99] による．[Vas99] も定理 5.4 の証明を与えているが，その一部にはギャップがあるといわれている．これについては [Moo98] をみよ）．

この方針の証明では $G \subset \mathrm{GSp}$ を定義するテンソルから Faltings の理論に用いるテンソルを構成することが難しい．[Kis10] では Breuil–Kisin 加群という整 p 進 Hodge 理論の道具を用いることで所望のテンソルを構成する（命題 5.10）．

以下では 6 つのステップに分けて定理 5.4 の証明を紹介する．なお証明に用いる p 可除群や Breuil–Kisin 加群の基本性質についてはそれぞれ付録 A，付録 B にまとめておいたので必要に応じて参照されたい．

Step 1. 種々のコホモロジーのテンソルについての準備

前小節の定理 5.4 までに導入した記号を引き続き用いる．テンソルの有限集合

$\{s_{\alpha,B}\} \subset V_{\mathbb{Z}_{(p)}}^{\otimes}$ *25であって，その固定部分群が簡約部分群 $G_{\mathbb{Z}_{(p)}} \subset \mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}_{(p)}})$ となるものを 1 つ固定する．Step 1 の目標は $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の各点に対応するアーベル多様体の種々のコホモロジー上に $s_{\alpha,B}$ に対応するテンソルを定めることである．

$f\colon A^{\mathrm{univ}} \to \mathrm{Sh}_K(G,X)$ を普遍アーベルスキームとし，$\mathcal{V} := R^1 f_* \Omega^\bullet$ をその相対 1 次 de Rham コホモロジーとする．これは $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ 上の局所自由層であり，$\mathcal{V}$ に伴うベクトル束は可積分接続（Gauss–Manin 接続）をもつ*26．$\mathcal{V}$ の $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ への引き戻しを $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ とかくことにする．

複素解析空間としての射

$$X \times G(\mathbb{A}_f)/K \to \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$$

を考えよう．$f\colon A^{\mathrm{univ}} \to \mathrm{Sh}_K(G,X)$ の $X \times G(\mathbb{A}_f)/K$ への引き戻しを $\tilde{f}_{\mathbb{C}}\colon \tilde{A}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{univ}} \to X \times G(\mathbb{A}_f)/K$ とおき，$\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ の $X \times G(\mathbb{A}_f)/K$ への引き戻しを $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{C}}$ とおく．これらはそれぞれ複素解析空間の射および局所自由層であり，$\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{C}} \cong R^1 \tilde{f}_{\mathbb{C},*}\Omega^\bullet$ となる．

X はエルミート対称領域，特に単連結であるので $R^1 \tilde{f}_{\mathbb{C},*}(\mathbb{Z}_{(p),\tilde{A}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{univ}}})$ は定数層であり，$X \times G(\mathbb{A}_f)/K$ のモジュライ解釈より同型

$$R^1 \tilde{f}_{\mathbb{C},*}(\mathbb{Z}_{(p),\tilde{A}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{univ}}}) \cong V_{\mathbb{Z}_{(p)},X \times G(\mathbb{A}_f)/K}$$

がある（ここで $\mathbb{Z}_{(p),\tilde{A}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{univ}}}$ および $V_{\mathbb{Z}_{(p)},X \times G(\mathbb{A}_f)/K}$ は定数層を表す）．これと de Rham 同型より

$$\begin{aligned}(V_{\mathbb{Z}_{(p)},X \times G(\mathbb{A}_f)/K}) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathcal{O}_{X \times G(\mathbb{A}_f)/K} &\cong R^1 \tilde{f}_{\mathbb{C},*}(\mathbb{Z}_{(p),\tilde{A}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{univ}}}) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathcal{O}_{X \times G(\mathbb{A}_f)/K} \\ &\xrightarrow{\cong} R^1 \tilde{f}_{\mathbb{C},*}\Omega^\bullet \cong \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

を得る．

この同型により $s_{\alpha,B} \in V_{\mathbb{Z}_{(p)}}^{\otimes}$ は $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbb{C}}^{\otimes}$ の解析的切断 $s_{\alpha,\mathrm{dR}}$ を定める．また $s_{\alpha,B}$ は定義より $G(\mathbb{Q})$ の作用で不変なので，$s_{\alpha,\mathrm{dR}}$ は $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}^{\otimes}$ の解析的切断に降下する．さらに，de Rham 同型と Gauss–Manin 接続 ∇ の関係より，$s_{\alpha,\mathrm{dR}}$ は $\nabla(s_{\alpha,\mathrm{dR}}) = 0$ を満たす．よって，$s_{\alpha,\mathrm{dR}}$ は $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}^{\otimes}$ の（代数的）切断を与えることがわかる（可積分接続

*25 一般に環 R と，その有限階数自由 R 加群 M に対して，$M^{\otimes}$ で，M から双対，テンソル積，対称積，外積をとるという操作で得られるすべての R 加群を直和したものを表す．以下では同様の記号を層などにも用いる．

*26 接続についての基礎事項は [大下, 付録 B] を参照せよ．

付き解析的ベクトル束と，確定特異点をもつ可積分接続付き代数的ベクトル束の間の Riemann–Hilbert 対応).

以下，$\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathbb{C}$ を 1 つ固定する．E を含む体 F と E 準同型 $\sigma\colon \overline{F} \to \mathbb{C}$ を任意にとる．F 値点 $y \in \mathrm{Sh}_K(G,X)(F)$ を任意にとり，y に対応する F 上のアーベル多様体を A_y とおく．A_y 上の de Rham およびエタールコホモロジー上にテンソルを定めよう．

$\mathbb{Z}_{(p)}$ 加群 $V_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ と $H^1_B(A_{y,\sigma}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}_{(p)})$ との間には $G(\mathbb{Z}_{(p)})$ の作用の差を除いて標準的な同型がある．定義より $s_{\alpha,B} \in V_{\mathbb{Z}_{(p)}}^{\otimes}$ は $G(\mathbb{Z}_{(p)})$ の作用で不変なので，$s_{\alpha,B}$ は $H^1_B(A_{y,\sigma}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}_{(p)})^{\otimes}$ の元を定める．これを $s_{\alpha,B,y}$ とおく．

比較同型

$$\begin{aligned} H^1_B(A_{y,\sigma}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}_{(p)}) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{Z}_p &\cong H^1_{\text{ét}}(A_{y,\overline{F}},\mathbb{Z}_p), \\ H^1_B(A_{y,\sigma}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}_{(p)}) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{C} &\cong H^1_{\mathrm{dR}}(A_y) \otimes_{F,\sigma} \mathbb{C}. \end{aligned}$$

を考える．これらの同型を通じて $s_{\alpha,B,y}$ はテンソル

$$\begin{aligned} s_{\alpha,\text{ét},y} &\in H^1_{\text{ét}}(A_{y,\overline{F}},\mathbb{Z}_p)^{\otimes}, \\ s_{\alpha,\mathrm{dR},y} &\in (H^1_{\mathrm{dR}}(A_y) \otimes_{F,\sigma} \mathbb{C})^{\otimes} \end{aligned}$$

を定める．なお $s_{\alpha,\mathrm{dR},y}$ は $\operatorname{Spec}\mathbb{C} \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Spec} F \xrightarrow{y} \mathrm{Sh}_K(G,X)$ による $s_{\alpha,\mathrm{dR}}$ の引き戻しに一致する．

定理 5.7　テンソル $s_{\alpha,\text{ét},y}$, $s_{\alpha,\mathrm{dR},y}$ について次が成り立つ．

(1) $s_{\alpha,\text{ét},y}$ は $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の作用で不変である．
(2) $s_{\alpha,\mathrm{dR},y}$ は $H^1_{\mathrm{dR}}(A_y)^{\otimes}$ に含まれる．

証明の概略　(1) を示す．$\mathrm{Sh}_{K^p}(G,X) := \varprojlim_{K'_p} \mathrm{Sh}_{K^pK'_p}(G,X)$ とおく（ただし K'_p は K_p のコンパクト開部分群を動く）．$K = K_pK^p$ であったので，$\mathrm{Sh}_{K^p}(G,X) \to \mathrm{Sh}_K(G,X)$ は K_p 捻子である．$\mathrm{Sh}_{K^p}(G,X)$ では普遍アーベルスキームの p 冪等分点は自明化されていることと $H^1_{\text{ét}}(A_{y,\overline{F}},\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(T_pA_{y,\overline{F}},\mathbb{Z}_p)$ より，$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の $H^1_{\text{ét}}(A_{y,\overline{F}},\mathbb{Z}_p)$ への作用は，K_p 捻子 $\mathrm{Sh}_{K^p}(G,X) \to \mathrm{Sh}_K(G,X)$ から定まる準同型 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to K_p$ と，自然な K_p の $H^1_{\text{ét}}(A_{y,\overline{F}},\mathbb{Z}_p)$ への作用の合成としてかける．一方で，$s_{\alpha,B}$ が $G(\mathbb{Z}_{(p)})$ の作用で不変であることから，$s_{\alpha,\text{ét},y}$ は $K_p \subset G(\mathbb{Z}_p)$ の作用で不変であることを確かめることができる．以上を合わせて主張を得る．

(2) の証明には Deligne の絶対 Hodge サイクルの理論（[DMOS82]）を用いる．絶対 Hodge サイクルの理論より $s_{\alpha,\mathrm{dR},y} \in \bigl(H^1_{\mathrm{dR}}(A_y) \otimes_F \overline{F}\bigr)^{\otimes}$ を得る．さらに (1) と，絶対 Hodge サイクルがエタール成分，de Rham 成分どちらからでも一意的に決まることを用いることで，

$$s_{\alpha,\mathrm{dR},y} \in \Bigl(\bigl(H^1_{\mathrm{dR}}(A_y) \otimes_F \overline{F}\bigr)^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\Bigr)^{\otimes} = H^1_{\mathrm{dR}}(A_y)^{\otimes}$$

を得る．

(1)(2) ともに議論の詳細は [Kis10, 2.2.1] を参照せよ．　□

この定理において F として $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の既約成分の生成点をとることで次を得る（σ は任意にとる）．

系 5.8　$\mathcal{V}_{\mathbb{C}}^{\otimes}$ の切断 $s_{\alpha,\mathrm{dR}}$ は E 上定義される，すなわち，$\mathcal{V}^{\otimes}$ の切断を定める．

F が E の有限拡大体であるときは，任意の埋め込み $\sigma_p\colon \overline{F} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して比較同型

$$H^1_{\text{ét}}(A_{y,\sigma_p,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathrm{dR}}(A_y) \otimes_{F,\sigma_p} B_{\mathrm{dR}}$$

がある*27．次の定理 5.9 は Step 5 の命題 5.17 の証明で用いられる．

定理 5.9（[Bla94]，[Moo98，Theorem 5.6.3]）　この比較同型の下で $s_{\alpha,\mathrm{dR},y}$ は $s_{\alpha,\text{ét},y}$ にうつる．

Step 2．定理 5.4 の設定の復習

定理 5.4 の設定を思い出しておこう．$\mathrm{Sh}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})$ の $\mathcal{O}_{(v)}$ 上の整正準モデル $\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})_{\mathcal{O}_{(v)}}$ を考え，$\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})_{\mathcal{O}_{(v)}}$ における $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の閉包を $\mathscr{S}_K^-(G,X)$ と定義した．このとき任意の閉点 $x \in \mathscr{S}_K^-(G,X)$ について $\mathscr{S}_K^-(G,X)$ の x における完備化の各既約成分が，$\mathcal{O}_{(v)}$ 上形式的に滑らかであることを示すことが目標である．

k を x の剰余体とし，$W = W(k)$ とおく．x が定める k 上のアーベル多様体を A_x とおき，A_x に対応する k 上の p 可除群 $A_x[p^\infty]$ を $\mathcal{G}_0$ とおく（p 可除群の定義や基本性質は付録 A.1 をみよ）．

*27 これは [Tsu99, Fal02, Niz08] からしたがう（*cf.* [Tsu02, Theorem A.1]）．なおこれらの論文で得られている比較同型は一致する（[Niz09]）．

$\mathscr{S}_K^-(G,X)$ は $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の閉包として定義したので E の有限拡大体 $F \subset \overline{E}$ および F 値点 $\tilde{x} \in \mathscr{S}_K^-(G,X)(F) = \mathrm{Sh}_K(G,X)(F)$ であってその特殊化が x になるものがとれる．$\tilde{x}$ に対応する F 上のアーベル多様体を $A_{\tilde{x}}$ とおく．

Step 1 の議論を $y = \tilde{x}$ に適用することでテンソル $s_{\alpha,B,\tilde{x}}, s_{\alpha,\mathrm{dR},\tilde{x}}, s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}}$ を得る．定理 5.7 より $s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}} \in H^1_{\text{ét}}(A_{\tilde{x},\overline{E}}, \mathbb{Z}_p)^{\otimes}$ は $\mathrm{Gal}(\overline{E}/F)$ 不変である．

素点 v を延長する埋め込み $\overline{E} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ をとり，これもまた v と表すことにする．v による F の像の閉包を L とおく．このとき $L \supset W[1/p]$ は有限完全分岐拡大である．

$$\Lambda := H^1_{\text{ét}}(A_{\tilde{x},\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p) = H^1_{\text{ét}}(A_{\tilde{x},\overline{E}}, \mathbb{Z}_p)$$

とおき，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ の表現 $\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p = H^1_{\text{ét}}(A_{\tilde{x},\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p)$ を考える．$\tilde{x}$ のとり方より $A_{\tilde{x}} \otimes_F L$ の Néron モデルは特殊ファイバーが A_x となる $\mathcal{O}_L$ 上のアーベルスキームである．よって，$\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p$ はクリスタリン表現であり，Λ は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ 作用で安定な $\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p$ の $\mathbb{Z}_p$ 格子である．

比較同型

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{\mathrm{cris}} \cong H^1_{\mathrm{cris}}(A_x/W) \otimes_W B_{\mathrm{cris}} = \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W) \otimes_W B_{\mathrm{cris}}$$

を考える．ここで $\mathbb{D}(\mathcal{G}_0)$ は $\mathcal{G}_0$ に伴う Dieudonné クリスタルである (Dieudonné 理論については付録 A.2 を参照せよ)．この同型により $s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}}$ に対応する $(\mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W) \otimes_W B_{\mathrm{cris}})^{\otimes}$ の元を s'_α とおく．$s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}}$ は $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ 不変であるので，$B_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)} = W[1/p]$ より

$$s'_\alpha \in ((\mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W) \otimes_W B_{\mathrm{cris}})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)})^{\otimes} = (\mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W) \otimes_W W[1/p])^{\otimes}$$

となることがわかる．構成より s'_α は φ 不変である．

Step 3. テンソルの定める代数群の簡約性

以下，簡単のため $M_W := \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W)$ とおく．Breuil–Kisin 加群を用いて $s'_\alpha \in (M_W[1/p])^{\otimes}$ の性質を調べよう．Breuil–Kisin 加群の定義および基本定理は付録 B を参照せよ．

$s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}}$ を $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ 同変な射 $s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}}\colon \mathbb{Z}_p \to \Lambda^{\otimes}$ とみなすと，対応する Breuil–Kisin 加群の間の射 $\mathfrak{M}(s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}})\colon \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_p) = \mathfrak{S} \to \mathfrak{M}^{\otimes}$ は φ 不変な $\mathfrak{M}^{\otimes}$ の元を定める．これを $s'_{\alpha,\mathfrak{M}}$ とかくことにする．定理 B.6 の同型 $M_W \cong \varphi^*(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})$ により $(\varphi^*(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}))^{\otimes} \subset (M_W[1/p])^{\otimes}$ とみなす．このとき $\varphi^*(s'_{\alpha,\mathfrak{M}} \bmod u)$ は s'_α に一致する．よって $s'_\alpha \in M_W^{\otimes}$ を得る．

命題 5.10 テンソルの有限集合 $\{s'_\alpha\} \subset M_W^{\otimes}$ の固定部分群 $G' \subset \mathrm{GL}(M_W)$ は連結簡約部分群である．

命題 5.10 の証明は複雑である．まず $\{s'_{\alpha,\mathfrak{M}} \mod u\} \subset (\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})^{\otimes}$ の固定部分群が $\mathrm{GL}(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})$ の連結簡約部分群であることを示せばよいことに注意しよう．よって命題 5.10 は次に帰着される．

主張 5.11 ある W 線形同型

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \xrightarrow{\cong} \mathfrak{M}/u\mathfrak{M}$$

であって，$s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}}$ を $s'_{\alpha,\mathfrak{M}} \bmod u$ にうつすものが存在する．

主張 5.11 を示す．簡単のため $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{S}$ を $\mathfrak{M}'$ とおく．$\mathfrak{S}$ 上のスキーム $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ を考える．その部分スキーム

$$P \subset \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$$

を，「$\mathfrak{S}$ 代数 R に，R 同型 $\mathfrak{M} \otimes R \to \mathfrak{M}' \otimes R$ であって $s'_\alpha \otimes 1$ を $s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}} \otimes 1$ に対応させるもののなす集合を対応させる関手」として定める．これは $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ の部分スキームで表現される．このとき $P \to \operatorname{Spec} \mathfrak{S}$ の各ファイバーは空集合であるか G 捻子である．よって，主張 5.11 は次からしたがう．

補題 5.12 $P \to \operatorname{Spec} \mathfrak{S}$ は自明 G 捻子である．すなわち射は平坦で，各ファイバーは空でない．

補題 5.12 の証明の方針を述べる．まず P を $\operatorname{Spec} \mathfrak{S}_{(p)}$ に制限すると G 捻子になることをみる．定理 B.5 (2) よりこれは $P \times_{\operatorname{Spec} \mathfrak{S}} \operatorname{Spec} \mathfrak{S}_{(p)}$ を忠実平坦射 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \to \operatorname{Spec} \mathfrak{S}_{(p)}$ で引き戻すと自明な G 捻子になることからしたがう．この事実を出発点にして Breuil–Kisin 加群のもつ構造と $\mathfrak{S}$ が 2 次元局所正則環であることを用いて P が G 捻子であることを示す．詳細は [Kis10, 1.3.4] を参照せよ．

以上で命題 5.10 の証明の説明を終える．

Step 4. φ 不変テンソル付き変形環

$\mathscr{S}_K(G, X)$ の x における完備化を記述したい．そのために $\mathcal{G}_0 = \mathcal{A}_x[p^\infty]$ の φ 不変テンソル付きの変形環として得られる形式的滑らかな完備局所環を考え，それと比較することにする．

引き続き $M_W = \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W)$ とおく．命題 5.10 で示したように $\{s'_\alpha\}$ の固定部分群 G' は $\mathrm{GL}(M_W)$ の連結簡約部分群である[*28]．このとき次が成り立つ（証明は [Kis10, 1.4.3 (4)] を参照せよ）．

補題 5.13 $M_k := M_W \otimes_W k = \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(k)$ のフィルトレーション

$$\mathrm{Fil}^1_k := \mathrm{Fil}^1 \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(k) \subset \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(k)$$

は $G' \otimes_W k$ を経由する指標 $\mu_0 \colon \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathrm{GL}(M_k)$ によって定まる．すなわち，ある直和分解 $M_k = \mathrm{Fil}^1_k \oplus N_k$ が存在して，それに対応する指標 $\mu_0 \colon \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathrm{GL}(M_k)$ （$\mu_0(z)$ は Fil^1_k 上 z 倍で，N_k 上 id で作用する）は $G' \otimes_W k \subset \mathrm{GL}(M_k)$ を経由する．

補題の条件を満たす直和分解 $M_k = \mathrm{Fil}^1_k \oplus N_k$ を固定する．このとき W 加群の直和分解 $M_W = \mathrm{Fil}^1_W \oplus N_W$ であって，$\mathrm{Fil}^1_W \otimes_W k = \mathrm{Fil}^1_k$, $N_W \otimes_W k = N_k$ が成り立ち，さらに対応する指標 $\mu \colon \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathrm{GL}(M_W)$ が $G' \subset \mathrm{GL}(M_W)$ を経由するようなものが存在する．

$\mathcal{G}_0$ の普遍変形環の記述（付録 A.3）を思い出そう．$N_W \subset M_W$ の固定部分群を P° とおく．P° は $\mathrm{GL}(M_W)$ の放物型部分群であり，その冪単部分群を U° とかき，U° の単位元での完備化を $\hat{U}^\circ$ とおく．このとき $R^\mathrm{univ} := \Gamma(\hat{U}^\circ, \mathcal{O}_{\hat{U}^\circ})$ は $\mathcal{G}_0$ の普遍変形環と自然に同型になる．以下では R^univ 上の普遍変形を $\mathcal{G}_{R^\mathrm{univ}}$ とおく．

次に φ 不変テンソル $\{s'_\alpha\}$ 付き変形環について考えよう[*29]．G' における N_W の固定部分群 $P'^\circ \subset G'$ は放物型部分群となる（[Kis10, 1.1.1]）．この冪単根基を U'° とおき，U'° の単位元における完備局所環を $R^\mathrm{univ}_{G'}$ とおく．構成より次が成り立つ．

命題 5.14 $R^\mathrm{univ}_{G'}$ は R^univ の商であり，W 上形式的に滑らかでその相対次元は

$$\dim U'^\circ = \mathrm{rank}_W \, \mathrm{gr}^{-1} \operatorname{Lie} G'$$

となる．

$R^\mathrm{univ}_{G'}$ 加群 $M_{R^\mathrm{univ}_{G'}} := M_W \otimes_W R^\mathrm{univ}_{G'}$ を考える．また，$\{s'_\alpha\} \subset M_W^\otimes$ の像としてテンソルの集合 $\{s'_{\alpha, R^\mathrm{univ}_{G'}}\} \subset M^\otimes_{R^\mathrm{univ}_{G'}}$ を定める．このとき各 $s'_{\alpha, R^\mathrm{univ}_{G'}}$ は $R^\mathrm{univ}_{G'}$ 上の自明

[*28] 本稿の G' は [Kis10] では G_W とかかれる．

[*29] [Fal99] では Tate サイクルという概念が導入され，本稿の φ 不変テンソル付きの変形環は，Tate サイクル付きの変形環とよばれている．

なクリスタルからの射 $1 \to \mathbb{D}(\mathcal{G}_{R^{\mathrm{univ}}\otimes_{R^{\mathrm{univ}}}} R^{\mathrm{univ}}_{G'})^{\otimes}$ を与えることがわかる（[Kis10, 1.5.4]）．

L の素元 $\pi \in L$ をとり，$E(u) \in W[u]$ を π の最小多項式とする．W 代数 $W[u, E(u)^n/n!]_{n\geq 1} \subset (\mathrm{Frac}\, W)[u]$ の p 進完備化を S とおく*30．S は $\varphi(u) = u^p$ を満たす Frobenius 射 φ をもつ．また $u \mapsto \pi$ により定まる全射 $S \to \mathcal{O}_L$ の核は自然な PD 構造をもつ（例えば $\gamma_n(E(u)) = E(u)^n/n!$ となる）．

このとき次が成り立つ（証明は [Kis10, 1.5.8] および [Kis17, (E.1)-(E.4)] を参照せよ）．

命題 5.15 $p > 2$ とする．$\varpi\colon R^{\mathrm{univ}} \to \mathcal{O}_L$ が $R^{\mathrm{univ}} \to R^{\mathrm{univ}}_{G'}$ を経由することと，次の条件は同値である：φ 不変なテンソルの集合 $\{\tilde{s}'_\alpha\} \subset \mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(S)^{\otimes}$ で，以下を満たすものが存在する．

(1) $\tilde{s}'_\alpha$ は $s'_\alpha \in M_W^{\otimes} = \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W)^{\otimes}$ の持ち上げである．

(2) $\tilde{s}'_\alpha$ の $\mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(\mathcal{O}_L)^{\otimes}$ への像を $s'_{\alpha,\mathcal{O}_L}$ とおくとき，

$$s'_{\alpha,\mathcal{O}_L} \in \mathrm{Fil}^0(\mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(\mathcal{O}_L)^{\otimes})$$

が成り立つ．

(3) $(\tilde{s}'_\alpha)$ の固定部分群 $G'_S \subset \mathrm{GL}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(S))$ は連結簡約部分群である．

命題 5.16 L' を L の有限拡大体とする．また射 $\varpi\colon R^{\mathrm{univ}} \to \mathcal{O}_{L'}$ が与えられたとし，$\Lambda' := T_p(\mathcal{G}^{\vee}_{R^{\mathrm{univ}}} \otimes_{R^{\mathrm{univ}},\varpi} \mathcal{O}_{L'})(-1)$ とおく．さらに $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L')$ 不変なテンソルの集合 $\{s_{\alpha,\text{ét},\varpi}\} \subset \Lambda'^{\otimes}$ であって次を満たすものが存在すると仮定する．

(1) $\{s_{\alpha,\text{ét},\varpi}\}$ の固定部分群は $\mathrm{GL}(\Lambda')$ の連結簡約部分群を定める．

(2) 比較同型

$$\Lambda' \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\cong} M_W \otimes_W B_{\mathrm{cris}}$$

で，$s_{\alpha,\text{ét},\varpi}$ は $s'_\alpha \in M_W^{\otimes}$ にうつる．

このとき $\varpi\colon R^{\mathrm{univ}} \to \mathcal{O}_{L'}$ は $R^{\mathrm{univ}} \to R^{\mathrm{univ}}_{G'}$ を経由する．

証明 必要なら L および $\mathrm{Frac}\, W$ をとりかえることで，$L' = L$ の場合に帰着できる．$\mathcal{G}_\varpi := \mathcal{G}_{R^{\mathrm{univ}}} \otimes_{R^{\mathrm{univ}},\varpi} \mathcal{O}_L$ とおく．

---

*30 この S は付録 B でも用いられる．

Breuil–Kisin 加群 $\mathfrak{M}' := \mathfrak{M}(\Lambda')$ を考える．Step 3 の議論と同様に $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ 同変な射 $s_{\alpha,\mathrm{\acute{e}t},\varpi}\colon \mathbb{Z}_p \to \Lambda'^{\otimes}$ は φ 不変なテンソル $s'_{\alpha,\mathfrak{M}'} \in \mathfrak{M}'^{\otimes}$ を定め，さらにテンソルの集合 $\{s'_{\alpha,\mathfrak{M}'}\}$ の固定部分群は $\mathrm{GL}(\mathfrak{M}')$ の連結簡約部分群になることがわかる．

定理 B.6 より $\varphi^*\mathfrak{M}'$ をさらに係数拡大した $\mathcal{M}(\mathfrak{M}')$ についてフィルトレーションを保つ φ 同変同型

$$\mathcal{M}(\mathfrak{M}') \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(S)$$

が存在する．特に $\varphi^* s'_{\alpha,\mathfrak{M}'}$ から底変換により φ 不変なテンソル $\tilde{s}'_\alpha \in \mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(S)^{\otimes}$ が定まり，$\{\tilde{s}'_\alpha\}$ の固定部分群は $\mathrm{GL}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(S))$ の連結簡約部分群になる．あとは $\{\tilde{s}'_\alpha\}$ が命題 5.15 の仮定 (1)(2) を満たすことを示せば十分である．

$\mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(S)^{\otimes} \to \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W)^{\otimes} \subset (M_W \otimes_W B_{\mathrm{cris}})^{\otimes}$ において $\tilde{s}'_\alpha \in \mathbb{D}(\mathcal{G}_\varpi)(S)^{\otimes}$ は s'_α にうつることがわかる．よって仮定 (1) を得る．また定理 B.5 (2) の 2 つ目の同型はフィルトレーションを保つので仮定 (2) が満たされることもわかる．よって命題 5.15 より主張がしたがう． □

Step 5. $R^{\mathrm{univ}}_{G'}$ による $\mathscr{S}^-_K(G,X)$ の完備局所環の記述

$\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})$ の x における完備化を $\hat{U}'_x$ とおき，$\hat{U}'_x \hookrightarrow \mathrm{Spf}\, R^{\mathrm{univ}}$ を $\mathscr{S}_{K'}(\mathrm{GSp},\mathfrak{H}^{\pm})$ 上の普遍アーベルスキームに伴う p 可除群から誘導される射とする．Serre–Tate の定理（定理 A.36）より，アーベル多様体 A_x の変形と，p 可除群 $\mathcal{G}_0 = A_x[p^\infty]$ の変形は等価である．また A_x の変形には A_x の偏極とシンプレクティック・レベル構造が一意的に持ち上がる．よって，$\hat{U}'_x \hookrightarrow \mathrm{Spf}\, R^{\mathrm{univ}}$ は閉埋め込みである．

$\mathscr{S}^-_K(G,X)$ の x における完備化を $\hat{U}_x$ とおき，その既約成分で $\tilde{x}$ の像を含むものを Z とおく．これにより閉埋め込み

$$j\colon Z \hookrightarrow \hat{U}_x \hookrightarrow \hat{U}'_x \hookrightarrow \mathrm{Spf}\, R^{\mathrm{univ}}$$

を得る．特に，Z はアフィン形式スキームであり，$Z = \mathrm{Spf}\, R_Z$ とかける（R_Z は R^{univ} の商である）．R_Z が W 上形式的に滑らかであることを示せば定理 5.4 の証明は完了する．

命題 5.17 j は $\mathrm{Spf}\, R^{\mathrm{univ}}_{G'} \hookrightarrow \mathrm{Spf}\, R^{\mathrm{univ}}$ を経由する．

証明 射 $R^{\mathrm{univ}} \to R_Z$, $R^{\mathrm{univ}} \to R^{\mathrm{univ}}_{G'}$ はともに全射なので，次を示せば十分である：

L' を L の有限拡大体とする．任意の射 $\varpi\colon R^{\mathrm{univ}} \to \mathcal{O}_{L'}$ は $R^{\mathrm{univ}} \to R^{\mathrm{univ}}_{G'}$ を経由する．

F の有限拡大体 $F' \subset \overline{E}$ を任意にとる．$F' \hookrightarrow \overline{E} \overset{v}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{Q}}_p$ も v とかく．F' 値点 $\tilde{x}' \in \mathrm{Sh}_K(G,X)(F')$ を $\operatorname{Spec} F'_v \to \operatorname{Spec} F' \overset{\tilde{x}'}{\to} \mathrm{Sh}_K(G,X)$ の特殊化が Z に入るものとする．

$\Lambda' := T_p(\mathcal{G}^\vee_{R^{\mathrm{univ}}} \otimes_{R^{\mathrm{univ}},\varpi} \mathcal{O}_{L'})(-1)$ とおくと，$\Lambda' = H^1_{\text{ét}}(A_{\tilde{x}',\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p)$ である．Step 1 の議論を $y = \tilde{x}'$ に適用することで $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L')$ 不変なテンソル $s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}'} \in \Lambda'^{\otimes}$ を得る．$\{s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}'}\} \subset \Lambda'^{\otimes}$ が命題 5.16 の仮定 (1)(2) を満たすことを示せば主張がしたがう．

Step 1 における $s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}'}$ の構成より，$\{s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}'}\}$ の固定部分群は $G_{\mathbb{Z}_{(p)}} \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{Z}_p$ に同型となるので，$\mathrm{GL}(\Lambda')$ の連結簡約部分群である．よって仮定 (1) が成り立つ．

仮定 (2) を確かめるには比較同型

$$H^1_{\text{ét}}(A_{\tilde{x}',\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathrm{cris}}(A_x/W) \otimes_W B_{\mathrm{cris}}$$

で $s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}'}$ が s'_α にうつることをいえばよい．

比較同型 $H^1_{\text{ét}}(A_{\tilde{x}',\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathrm{dR}}(A_{\tilde{x}'}) \otimes_{F',v} B_{\mathrm{dR}}$ で $s_{\alpha,\text{ét},\tilde{x}'}$ は $s_{\alpha,\mathrm{dR},\tilde{x}'}$ にうつることを思い出そう（定理 5.9）．したがって Berthelot–Ogus の比較同型 $H^1_{\mathrm{dR}}(A_{\tilde{x}'}) \otimes_{F'} F'_v \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathrm{cris}}(A_x/W) \otimes_W F'_v$ で $s_{\alpha,\mathrm{dR},\tilde{x}'}$ が s'_α にうつることをいえばよい．

s'_α の定義と定理 5.9 より比較同型 $H^1_{\mathrm{dR}}(A_{\tilde{x}}) \otimes_F F_v \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathrm{cris}}(A_x/W) \otimes_W F_v$ で $s_{\alpha,\mathrm{dR},\tilde{x}}$ は s'_α にうつる．よって仮定 (2) は次の主張からしたがう．

主張 $s_{\alpha,\mathrm{dR},\tilde{x}}$ と $s_{\alpha,\mathrm{dR},\tilde{x}'}$ の $(H^1_{\mathrm{cris}}(A_x/W) \otimes_W F'_v)^{\otimes}$ での像は一致する．

主張は [Ogu84, Theorem 3.10] を用いて次の 2 つを比較することで示される*31：

- Gauss–Manin 接続付き相対 1 次 de Rham コホモロジー $\mathcal{V}|_{\mathrm{Sh}_K(G,X)_{F'_v}}$．
- $\mathscr{S}^-_K(G,X)$ 上の普遍アーベルスキームから定まる収束アイソクリスタル．

□

*31 [Kis10, 2.3.5] では [BO83, 2.9] を引用しているが，この結果には Z の平滑性が必要なためそのまま適用することはできない．この事実および [Ogu84, Theorem 3.10] を用いる議論については伊藤和広氏，伊藤哲史氏，越川皓永氏にご教示いただいた．

Step 6. 次元の計算

命題 5.17 より全射 $R_{G'}^{\mathrm{univ}} \twoheadrightarrow R_Z$ を得る．$R_{G'}^{\mathrm{univ}}$, R_Z はともに完備局所環であり，$R_{G'}^{\mathrm{univ}}$ は整域である．よって，あとはこれらの環の W 上の相対次元が等しいことをいえば，$R_{G'}^{\mathrm{univ}} \cong R_Z$ となり，R_Z の形式的平滑性がしたがう．

まず $R_{G'}^{\mathrm{univ}}$ の相対次元を考えよう．命題 5.14 より相対次元は $\mathrm{rank}_W \operatorname{gr}^{-1} \operatorname{Lie} G'$ に等しい．

次に R_Z の相対次元を考える．$Z = \operatorname{Spf} R_Z \to \operatorname{Spf} W$ は $\mathscr{S}_K^-(G,X)$ の x における完備化の既約成分として得られたことを思い出そう．また $\tilde{x} \in \mathrm{Sh}_K(G,X)$ の特殊化は $x \in \mathscr{S}_K^-(G,X)$ であるので， R_Z の W 上の相対次元は $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の $\tilde{x}$ における次元に等しく，これは $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の次元に他ならない．$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ が定める局所対称空間を考えることで，$\dim \mathrm{Sh}_K(G,X) = \dim \operatorname{gr}^{-1} \operatorname{Lie} G$ を得る．

主張 5.11 より $G_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \cong G'$ となる同型が存在する．さらに Step 1 の構成から $\mathrm{rank}_W \operatorname{gr}^{-1} \operatorname{Lie} G' = \dim \operatorname{gr}^{-1} \operatorname{Lie} G$ となることがわかる．よって $R_{G'}^{\mathrm{univ}}$ と R_Z の W 上の相対次元は等しい．

以上の議論より定理 5.4 は示された．

付録 A　p 可除群

本付録では p 可除群についてまとめる．付録 A.1 では p 可除群に関連した定義をまとめる．付録 A.2 では p 可除群を記述する Dieudonné 理論について解説する．はじめに正標数の完全体上の p 可除群を記述する Dieudonné 理論を紹介する．その後，クリスタリンサイトについての用語を導入し，より一般的な Dieudonné クリスタルの理論を述べる．その後は，応用として p 可除群の変形を Dieudonné クリスタルにより記述する Grothendieck–Messing 理論を説明する．最後に付録 A.3 では第 5 節で必要となる p 可除群の普遍変形環について簡単に紹介する．

A.1　p 可除群の基礎

定義 A.1　$h \geq 0$ とし，S をスキームとする．S 上の高さ h の p **可除群** (p-divisible group) [*32] とは，次を満たす帰納系 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n, i_n \colon \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_{n+1})_{n \geq 0}$ のことをいう．

[*32] Barsotti–Tate 群ともよばれる．

(1) $\mathcal{G}_n$ は S 上の階数が p^{nh} となる有限局所自由可換群スキーム.

(2) $0 \longrightarrow \mathcal{G}_n \xrightarrow{i_n} \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{p^n} \mathcal{G}_{n+1}$ は完全.

$\mathcal{G}$ の高さを $\operatorname{ht}\mathcal{G}$ で表す.

p 可除群 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n, i_n), \mathcal{H} = (\mathcal{H}_n, i_n)$ の間の射 $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ とは S 上の群スキームの射 $f_n\colon \mathcal{G}_n \to \mathcal{H}_n$ の系であって $i_n \circ f_n = f_{n+1} \circ i_n$ を満たすものをいう.

以下,$(\mathcal{G}_n, i_n)$ を $(\mathcal{G}_n)$ と略記することが多い.

S 上の p 可除群 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)$ に対して,$\varinjlim_n \mathcal{G}_n$ は S 上の fppf アーベル層を定める.またこの fppf アーベル層から

$$\mathcal{G}_n = \operatorname{Ker}\bigl(p^n\colon \varinjlim_n \mathcal{G}_n \to \varinjlim_n \mathcal{G}_n\bigr)$$

により $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)$ を復元することができる.よって,fppf アーベル層 $\varinjlim_n \mathcal{G}_n$ のことを p 可除群といい,$\mathcal{G}$ と表すこともある.

例 A.2 (1) 定数群スキーム $\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p (\cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ とその間の自然な包含射の組 $(\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p, i_n)$ は高さ 1 の p 可除群を定める.これを $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ とかく.

(2) 1 の p^n 冪根のなす群スキーム μ_{p^n} とその間の自然な包含射の組 (μ_{p^n}, i_n) は高さ 1 の p 可除群を定める.これを μ_{p^∞} とかく.

(3) アーベルスキーム $A \to S$ に対して $A[p^\infty] = (A[p^n], i_n)$ は S 上の高さ $2\dim A$ の p 可除群になる.

定義 A.3 p 可除群 $\mathcal{G}$ に対して,fppf アーベル層 $T_p\mathcal{G}$ を

$$T_p\mathcal{G} := \varprojlim_n \mathcal{G}_n$$

で定める.ただし射影極限は p 倍射 $p\colon \mathcal{G}_{n+1} \to \mathcal{G}_n$ についてとる.$T_p\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}$ の Tate 加群とよぶ.

例 A.4 (1) $T_p(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p, T_p(\mu_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_p(1)$ である.

(2) アーベルスキーム $A \to S$ が与えられたとき,アーベルスキームの p 進 Tate 加群 T_pA と p 可除群 $A[p^\infty]$ の Tate 加群 $T_p(A[p^\infty])$ は自然に同一視される.

命題 A.5 $\mathcal{G}$ を S 上の p 可除群とする.このとき fppf アーベル層 $\underline{\operatorname{Ext}}^1_S(\mathcal{G}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ は p 可除群により表現される.これを $\mathcal{G}^\vee$ とかき,$\mathcal{G}$ の**双対**とよぶ.このとき $(\mathcal{G}^\vee)_n$ は

$\mathcal{G}_n$ の Cartier 双対である[*33]．また自然な同型 $\mathcal{G} \cong (\mathcal{G}^\vee)^\vee$ がある．

例 A.6 (1) $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ と μ_{p^∞} は互いに双対である．

(2) アーベルスキーム $A \to S$ とその双対アーベルスキーム $A^\vee \to S$ が与えられたとき，それらに伴う p 可除群 $A[p^\infty]$ と $(A^\vee)[p^\infty]$ は互いに双対である．

S を p が局所冪零となるスキームとする．S 上の p 可除群に対して，その不変微分形式のなす層 $\omega_{\mathcal{G}}$（[Mes72, II.3.3.19]）および $\mathcal{G}$ の接空間が定める層 $\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathcal{G}$ （[Mes72, III.2.2.1, 2.2.7]）を定義することができる．これらは S 上の有限階数局所自由 $\mathcal{O}_S$ 加群であり，$\omega_{\mathcal{G}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathcal{G}, \mathcal{O}_S)$ が成り立つ（[BBM82, 3.3] の冒頭も参照せよ）．

また S が剰余体の標数が p となる完備局所ネーター環のスペクトラムのときにも $\omega_{\mathcal{G}}$ や $\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathcal{G}$ を定義することができる．

定義 A.7 S 上の p 可除群 $\mathcal{G}$ に対して，$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}_S} \underline{\mathrm{Lie}}\,\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}$ の**次元**という．このとき次が成り立つ

$$\dim \mathcal{G} + \dim \mathcal{G}^\vee = \mathrm{ht}\,\mathcal{G} = \mathrm{ht}\,\mathcal{G}^\vee.$$

標数 p のスキーム上の p 可除群

S を標数 p のスキームとし，G を S 上平坦な可換群 S スキームとする．S 上の p 乗 Frobenius 射 $F_S \colon S \to S$ を用いて，

$$G^{(p/S)} := S \times_{F_S, S} G$$

と定める．$G^{(p/S)}$ は S 上平坦な可換群 S スキームである．可換図式

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{F_G} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

より S 上の群スキームの射

$$F_G \colon G \to G^{(p/S)}$$

が定まる．このとき，さらに S 上の群スキームの射

$$V_G \colon G^{(p/S)} \to G$$

[*33] このため $\mathcal{G}_n$ の Cartier 双対 $(\mathcal{G}_n)^\vee$ を用いて，$\mathcal{G}$ の双対を $((\mathcal{G}_n)^\vee)_{n \geq 0}$ と定義することも多い．

であって，

$$F_G \circ V_G = p\,\mathrm{id}_{G^{(p/S)}}, \qquad V_G \circ F_G = p\,\mathrm{id}_G$$

を満たすものが存在する（[SGA3-I, VIIA.4.3]）．これを **Verschiebung** という．F_G, V_G は G について関手的である．

$\mathcal{G}$ が標数 p のスキーム S 上の p 可除群とする．このとき

$$\mathcal{G}^{(p/S)} := (\mathcal{G}_n^{(p/S)}, i_n^{(p/S)})$$

は S 上の p 可除群になる．さらに $F_{\mathcal{G}_n}, V_{\mathcal{G}_n}$ から p 可除群の射

$$F_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(p/S)}, \qquad V_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G}^{(p/S)} \to \mathcal{G}$$

が定まり，

$$F_{\mathcal{G}} \circ V_{\mathcal{G}} = p\,\mathrm{id}_{\mathcal{G}^{(p/S)}}, \qquad V_{\mathcal{G}} \circ F_{\mathcal{G}} = p\,\mathrm{id}_{\mathcal{G}}$$

を満たす．

A.2 Dieudonné 理論

p 可除群に対して不変量を与えることを考えよう．

完全体上の p 可除群と Dieudonné 加群

k を標数 p の完全体とする．このとき k 上の p 可除群は Dieudonné 加群で分類されるという結果を紹介する．$W(k)$ を k の Witt ベクトルのなす環とし，$W(k)$ 上の Frobenius を σ で表す．

定義 A.8 k 上の **Dieudonné 加群**とは長さ有限 $W(k)$ 加群 M と，$W(k)$ 準同型

$$F_M \colon M^\sigma \to M, \qquad V_M \colon M \to M^\sigma$$

の組 (M, F_M, V_M) であって，

$$F_M \circ V_M = p\,\mathrm{id}_M, \qquad V_M \circ F_M = p\,\mathrm{id}_{M^\sigma}$$

を満たすものをいう．ただし $M^\sigma := W(k) \otimes_{\sigma, W(k)} M$ とおいた．

Dieudonné 加群の間の射は $W(k)$ 準同型であって，F_M, V_M と可換なものとして定める．

Dieudonné 加群 M が $W(k)$ 加群として有限階数自由加群であるとき，$M^\vee :=$ $\mathrm{Hom}_{W(k)}(M, W(k))$ にも自然な Dieudonné 加群の構造がはいる．

定理 A.9（Dieudonné） k を標数 p の完全体とする．このとき，k 上の p 可除群の圏から，Dieudonné 加群のなす圏への反変関手 D であって，次を満たすものが存在する．

- $D(\mathcal{G})$ は有限階数自由 $W(k)$ 加群であり，その階数は $\mathrm{ht}\,\mathcal{G}$ となる．
- $D(F_{\mathcal{G}}) = F_{D(\mathcal{G})}, D(V_{\mathcal{G}}) = V_{D(\mathcal{G})}$.
- $D(\mathcal{G}^\vee) = D(\mathcal{G})^\vee$
- D は k 上の p 可除群のなす圏と，Dieudonné 加群であって $W(k)$ 加群として有限階数自由なもののなす圏との間の反変圏同値を与える．

注意 A.10 証明は [Dem72] や [Fon77] などをみよ．方針としては k 上の有限可換群スキームに対し，Dieudonné 加群を対応させる関手を作り，p 可除群をその場合に帰着させる．

Dieudonné クリスタルの理論

より一般に S を標数 p のスキームとし，次のような問題を考えよう：

> S 上の可換群スキームあるいは fppf アーベル層に対して，もとの対象より扱いやすい代数構造を与える関手はつくれるか？さらに構成した関手は忠実充満か？

Dieudonné の結果は，S が標数 p の完全体のスペクトラムで，考えるクラスが p 可除群（あるいは有限平坦可換群スキーム）のときに上の問いに答えている．

Grothendieck は Dieudonné の結果を標数 p のスキーム上の p 可除群に一般化するプログラムを発表した（[Gro71]，[Gro74] ）．これは一般の標数 p のスキーム上の p 可除群に，Dieudonné クリスタルを対応させる関手として定式化され，Dieudonné クリスタルの理論とよばれる．以下ではまず Dieudonné クリスタルの理論に必要となるクリスタリンサイトおよびクリスタルについて簡単に復習する．その後，p 可除群に伴う Dieudonné クリスタルの構成について紹介する．そして，Dieudonné クリスタルの理論の応用として，p 可除群の変形を Dieudonné クリスタルにより記述する Grothendieck–Messing の理論を述べる．

クリスタリンサイトとクリスタル

詳細は [Ber74] や [BO78] を参照せよ．

定義 A.11　R を環とし，I をそのイデアルとする．I 上の **PD 構造**[*34] とは写像の集まり $\gamma_m\colon I \to R$ $(m \geq 0)$ であって，$x, y \in I$, $r \in R$ に対して以下を満たすもののことである．

(1) $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_1(x) = x$ かつ，$m \geq 1$ のとき $\gamma_m(x) \in I$.
(2) $\gamma_m(x+y) = \sum_{i+j=m} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$.
(3) $\gamma_m(rx) = r^m \gamma_m(x)$.
(4) $\gamma_m(x)\gamma_n(x) = \frac{(m+n)!}{m!n!}\gamma_{m+n}(x)$.
(5) $\gamma_m(\gamma_n(x)) = \frac{(mn)!}{m!(n!)^m}\gamma_{mn}(x)$.

なお (4) (5) において $\frac{(m+n)!}{m!n!}, \frac{(mn)!}{m!(n!)^m} \in \mathbb{Z}$ であることに注意せよ．

(I, γ) を **PD イデアル**とよんだり，(R, I, γ) を **PD 環**とよんだりする．

さらに，ある自然数 N が存在して，任意の自然数 k，$x_1, \ldots, x_k \in I$ および $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ に対し，$m_1 + \cdots + m_k \geq N$ ならば

$$\gamma_{m_1}(x_1) \cdots \gamma_{m_k}(x_k) = 0$$

となるとき，γ は**冪零**であるという．

PD 環の間の射 $f\colon (R, I, \gamma) \to (R', I', \gamma')$ とは，環準同型 $f\colon R \to R'$ であって $f(I) \subset I'$ かつ $\gamma'_m(f(x)) = f(\gamma_m(x))$ $(x \in I)$ を満たすもののことをいう．

例 A.12　(1) R が $\mathbb{Q}$ 代数のとき，R の任意のイデアルは唯一の PD 構造 $\gamma_m(x) = x^m/m!$ をもつ．なお PD 構造の条件は $x^m/m!$ のもつ性質を抜き出したものに他ならない．

(2) $\mathbb{Z}_p$ のイデアル $I = (p)$ を考える．$m \geq 1$ に対し $\mathbb{Q}_p$ の元 $p^m/m!$ は常に I に含まれることがわかるので，$\gamma_m(x) = x^m/m!$ は I の PD 構造を定めることがわかる．より一般に混標数 $(0, p)$ の離散付値環 R とその極大イデアル I を考える．このとき簡単な計算により $\gamma_m(x) = x^m/m!$ が I の PD 構造を定める必要十分条件は R の絶対分岐指数が $p-1$ 以下であることが確かめられる．(たとえば [BO78, 3.2.3].)

[*34] PD はフランス語 puissances divisées からきている．

(3) R が p 冪零であるとする．このとき任意の PD 環 (R, I, γ) に対し，I は冪零イデアルになる．実際，$p^n R = 0$ とすると，任意の $x \in I$ に対し $x^{p^n} = (p^n)!\gamma_{p^n}(x) = 0$ となる．特に閉埋め込み $\operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$ は同相である．

定義 A.13 (R, I, γ) を PD 環とし，R' を R 代数とする．R' のイデアル IR' の PD 構造 γ' であって，構造射 $R \to R'$ が PD 環の射 $(R, I, \gamma) \to (R', IR', \gamma')$ を誘導するものが存在するとき，γ は R' に**延長される**という．

γ' は存在すれば一意である．また I が単項イデアルのとき，γ は任意の R 代数に延長される（[Ber74, I.2.1.1]，[BO78, 3.15]）．

定義 A.14 (R, I, γ) を PD 環とする．R' を R 代数とし，(I', δ) を R' の PD イデアルとする．γ と δ が**両立する**とは，γ が R' 上に延長され，その延長 γ' と δ が $IR' \cap I'$ 上で一致することをいう．

注意 A.15 以上の概念はスキーム Σ とその準連接イデアル層 I に対しても自然に定義することができる．詳細は [Ber74, I.4] や [BO78, above 3.30] を参照せよ．

定義 A.16 (Σ, I, γ) を PD スキームとする．p が局所冪零となり，さらに γ が延長されるような Σ スキーム S を考える．S の (Σ, I, γ) に関する**クリスタリンサイト** $\operatorname{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ を以下のように定める．

- $\operatorname{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の対象は以下のような組 $(U \hookrightarrow T, \delta)$ とする．U は S の開部分スキーム，T は p が局所冪零となる Σ スキームで，$U \hookrightarrow T$ は Σ 閉埋め込み．$U \hookrightarrow T$ の定義イデアルを J とおくとき，δ は J の PD 構造であって，γ と両立するもの．
- $\operatorname{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の射 $u\colon (U \hookrightarrow T, \delta) \to (U' \hookrightarrow T', \delta')$ とは，可換図式

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, "u_U"] & T \arrow[d, "u_T"] \\ U' \arrow[r, hook] & T' \end{tikzcd}$$

  であって，さらに射 $u_U\colon U \to U'$ は S の開部分スキームとしての包含写像であり，$u_T\colon T \to T'$ は Σ-PD スキームの射 $(T, J, \delta) \to (T', J', \delta')$ を誘導するものとする．
- $\operatorname{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の射の集まり $\{f_i\colon (U_i \hookrightarrow T_i, \delta_i) \to (U \hookrightarrow T, \delta)\}$ が被覆であ

るとは，$T_i \to T$ が開埋め込みであり，さらに $T = \bigcup_i T_i$ となることをいう．これは $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ のプレトポロジーを定める．以後，$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ にはこのプレトポロジーから定まるトポロジーを考える．

$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ はサイトになる．$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ に伴うトポスを $(S/\Sigma, I, \gamma)_{\mathrm{cris}}$ とかく．

$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の対象 $(U \hookrightarrow T, \delta)$ について，p は T において局所冪零という条件が課されているので例 A.12 (3) より閉埋め込み $U \hookrightarrow T$ は同相である．

$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の層 $\mathcal{F}$ を与えることは，以下のデータであって，さらに自然な整合性の条件を満たすものを与えることに他ならない（詳細は例えば [Ber74, III.1.4] または [BO78, 5.1] をみよ）．

- $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の対象 $(U \hookrightarrow T, \delta)$ に対して T 上の Zariski 層 $\mathcal{F}_{(U \hookrightarrow T, \delta)}$．
- $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の射 $u\colon (U \hookrightarrow T, \delta) \to (U' \hookrightarrow T', \delta')$ について層の射 $\rho_u\colon u_T^{-1}\mathcal{F}_{(U' \hookrightarrow T', \delta')} \to \mathcal{F}_{(U \hookrightarrow T, \delta)}$．

例 A.17 $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の層の例を挙げる．

(1) 関手 $(U \hookrightarrow T, \delta) \mapsto \mathcal{O}_T$ は $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の環の層を定める．これを $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ とかく．

(2) 同様に関手 $(U \hookrightarrow T, \delta) \mapsto \mathcal{O}_U$ および関手 $(U \hookrightarrow T, \delta) \mapsto \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_U)$ は $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の環の層を定める．これはそれぞれ $i_{S/\Sigma *}\mathcal{O}_S$, $\mathcal{J}_{S/\Sigma}$ とかかれる．このとき自然な完全系列がある：

$$0 \to \mathcal{J}_{S/\Sigma} \to \mathcal{O}_{S/\Sigma} \to i_{S/\Sigma *}\mathcal{O}_S \to 0.$$

クリスタリントポスの関手性について述べる．可換図式

$$\begin{CD} S' @>{g}>> S \\ @VVV @VVV \\ \Sigma' @>{f}>> \Sigma \end{CD}$$

であって，$f\colon \Sigma' \to \Sigma$ が PD スキームの射 $(\Sigma', I', \gamma') \to (\Sigma, I, \gamma)$ を誘導するものが与えられたとき，トポスの射 $g_{\mathrm{cris}}\colon (S'/\Sigma', I', \gamma')_{\mathrm{cris}} \to (S/\Sigma, I, \gamma)_{\mathrm{cris}}$ が定まる[*35]．

[*35] 一般にはサイト $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$，$\mathrm{Cris}(S'/\Sigma', I', \gamma')$ の間に射は定まらないため，トポスを用いる

すなわち，$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の層 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathrm{Cris}(S'/\Sigma', I', \gamma')$ 上の層 $g^*\mathcal{F}$ が定まり，また $\mathrm{Cris}(S'/\Sigma', I', \gamma')$ 上の層 $\mathcal{F}'$ に対して，$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の層 $g_*\mathcal{F}'$ が定まって，g^* は g_* の左随伴関手となる．詳細は [Ber74, III.2] または [BO78, 5.8] を参照せよ．

参考 A.18 参考として正標数の完全体上の代数多様体のクリスタリンコホモロジーの定義を述べておこう．

k を標数 p の完全体とし，$W := W(k)$ および $W_n(k) := W/p^n$ とおく．また $\Sigma_n = \operatorname{Spec} W_n$, $I_n = (p) \subset W_n$ とおく．このとき (Σ_n, I_n) は唯一の PD 構造 γ をもつ．k 上滑らかかつ固有なスキーム X に対して

$$H^*_{\mathrm{cris}}(X/W_n) := H^*\big((X/\Sigma_n, I_n, \gamma)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X/\Sigma_n}\big)$$

とおく．これは W_n 加群であり，n について射影系をなす．よって，

$$H^*_{\mathrm{cris}}(X/W) := \varprojlim_n H^*_{\mathrm{cris}}(X/W_n)$$

により W 加群を得る．$H^*_{\mathrm{cris}}(X/W)$ は X のクリスタリンコホモロジーとよばれることが多い．

クリスタリンコホモロジーの基本性質や比較定理などについてはこれ以上は述べない．これについては [Ber74] や [BO78] を参照せよ．また諸性質の解説として [Ill94] がある（比較定理については [辻] にも触れられている）．

さて $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群のなすクリスタルの定義を述べよう．

定義 A.19 サイト $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ **加群のなすクリスタル**とは，$\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群の層 $\mathcal{F}$ であって，任意の射 $u\colon (U \hookrightarrow T, \delta) \to (U' \hookrightarrow T', \delta')$ について T 上の $\mathcal{O}_T$ 加群層の射

$$\rho_u\colon u_T^*\mathcal{F}_{(U'\hookrightarrow T',\delta')} := \mathcal{O}_T \otimes_{u_T^{-1}\mathcal{O}_{T'}} u_T^{-1}\mathcal{F}_{(U'\hookrightarrow T',\delta')} \to \mathcal{F}_{(U\hookrightarrow T,\delta)}$$

が同型になるもののことをいう．各 $\mathcal{F}_{(U\hookrightarrow T,\delta)}$ が準連接あるいは有限階数局所自由 $\mathcal{O}_T$ 加群となるとき，$\mathcal{F}$ は準連接あるいは有限階数局所自由 $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群のなすクリスタルであるという．

必要がある．

注意 A.20 Grothendieck はサイト $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の数学的対象であって，結晶のように「剛的」であり，「成長する」ものをクリスタルと名付けた．上で定義した $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群のなすクリスタル以外にも，fppf 層のなすクリスタルなども定義することができる．より一般的なクリスタルの定義は [Ber74, IV.1.1.1] を参照せよ．なお本稿では $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群のなすクリスタルしか扱わないので，$\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群のなすクリスタルを単にクリスタルということにする．

注意 A.21 クリスタルは接続により捉えることができる（[Ber74, IV.1.6]， [BO78, 6.6]）．これは応用上重要な事実だが本稿では省略する．

以下では $\Sigma = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$, $I = (p)$ とする（γ は例 A.12 (2) ででてきた唯一の PD 構造であり，定義 A.13 より γ は任意の Σ スキーム上に延長される．また γ は任意の標数 p のスキーム上の PD 構造と両立する）．

S を標数 p のスキームとする．また S 上の p 乗 Frobenius 射を σ で表す．$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の層 $\mathcal{F}$ に対し，$\sigma^*\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}^\sigma$ とかく．

定義 A.22（[Gro74, p.108]） S 上の Dieudonné クリスタルとは次のデータからなる 3 つ組 $(\mathcal{E}, F, V)$ のことをいう：

- $\mathcal{E}$ は $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の有限階数局所自由クリスタル．
- $F\colon \mathcal{E}^\sigma \to \mathcal{E}$, $V\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}^\sigma$ はともに $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群層の射であって，$F \circ V = p\,\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, $V \circ F = p\,\mathrm{id}_{\mathcal{E}^\sigma}$ を満たすもの．

S 上の Dieudonné クリスタルの間の射は，$\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群層の射であって，F, V と可換なものとして定める．

特に $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の対象 $(U \hookrightarrow T, \delta)$ に対して $\mathcal{E}_{(U\hookrightarrow T,\delta)}$ は T の準連接層である．特に T がアフィンスキーム $\operatorname{Spec} R$ のとき，$\mathcal{E}_{(U\hookrightarrow T,\delta)}$ はその大域切断で決まる．対応する R 加群を $\mathcal{E}(R)$ とかくことにする．

注意 A.23 S を p が局所冪零となるスキームとする．このとき射 $S \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow S$ は $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群のなすクリスタルの圏と，$\mathrm{Cris}(S \otimes \mathbb{F}_p/\Sigma, I, \gamma)$ 上の $\mathcal{O}_{S\otimes\mathbb{F}_p/\Sigma}$ 加群のなすクリスタルの圏の間の圏同値を誘導する（[BBM82, 1.2.2]）．よって，$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上の $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ 加群のなすクリスタル $\mathcal{E}$ に対して，$\mathcal{E}^\sigma$ が定義される．特に，S 上の Dieudonné クリスタルを同様に定義することができる．

p 可除群に伴う Dieudonné クリスタル

S を標数 p のスキームとする．

定義 A.24（[BBM82, 3.3.6]） S 上の p 可除群 $\mathcal{G}$ に対し，

$$\mathbb{D}(\mathcal{G}) := \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

とおく．ここで，$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}$ は $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上のアーベル群の層のなす圏における $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ をさす．

これは $\mathcal{G}$ について関手的である．また S についても関手的であり，絶対 Frobenius 射 $\sigma\colon S \to S$ については $\mathbb{D}(\mathcal{G})^\sigma = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}^{(p/S)}, \mathcal{O}^\sigma_{S/\Sigma})$ となる．$(\mathcal{O}_{S/\Sigma})^\sigma = \mathcal{O}_{S/\Sigma}$ であるので，S 上の p 可除群の射 $F_\mathcal{G}\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(p/S)}$ から次が定まる：

$$F\colon \mathbb{D}(\mathcal{G})^\sigma = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}^{(p/S)}, \mathcal{O}^\sigma_{S/\Sigma}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, \mathcal{O}^\sigma_{S/\Sigma}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) = \mathbb{D}(\mathcal{G}).$$

同様にして，$V_\mathcal{G}\colon \mathcal{G}^{(p/S)} \to \mathcal{G}$ より次を得る：

$$V\colon \mathbb{D}(\mathcal{G}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, \mathcal{O}^\sigma_{S/\Sigma}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}^{(p/S)}, \mathcal{O}^\sigma_{S/\Sigma}) = \mathbb{D}(\mathcal{G})^\sigma.$$

定理 A.25（[BBM82, 3.3.10]） $(\mathbb{D}(\mathcal{G}), F, V)$ は S 上の Dieudonné クリスタルである．

完全系列 $0 \to \mathcal{J}_{S/\Sigma} \to \mathcal{O}_{S/\Sigma} \to i_{S/\Sigma *}\mathcal{O}_S \to 0$ から完全系列

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, i_{S/\Sigma *}\mathcal{O}_S)$$

が定まる．$\mathrm{id}\colon S \to S$ と零イデアル上の自明な PD 構造が定める $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の対象を S とかくとき，上の完全系列の S での値について次が成り立つ．

定理 A.26（[BBM82, 3.3.2, 3.3.4, 3.3.5]） $\mathcal{O}_S$ 加群の同型

$$\omega_\mathcal{G} \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_S, \qquad \underline{\mathrm{Lie}}\,\mathcal{G}^\vee \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(\mathcal{G}, i_{S/\Sigma *}\mathcal{O}_S)_S$$

がある．さらに，これは完全系列

$$0 \to \omega_\mathcal{G} \to \mathbb{D}(\mathcal{G})_S \to \underline{\mathrm{Lie}}\,\mathcal{G}^\vee \to 0$$

を定める．またこの構成は S および $\mathcal{G}$ について関手的であり，射 $S' \to S$ についての底変換と両立する．

注意 A.27 注意 A.23 より，以上のことは p が冪零となるスキーム S 上にも延長される．また，S 上の p 可除群 $\mathcal{G}$ に対して，Dieudonné クリスタル $\mathbb{D}(\mathcal{G})$ は $S \otimes \mathbb{F}_p$ 上の p 可除群 $\mathcal{G} \otimes \mathbb{F}_p$ のみに依存することもわかる（[BBM82, p.105, p.144]）．

注意 A.28 S が標数 p の完全体 k のスペクトラムのときを考える．このとき

$$\mathbb{D}(\mathcal{G})\bigl(W(k)\bigr) := \varprojlim_{n} \mathbb{D}(\mathcal{G})\bigl(W(k)/p^n\bigr)$$

とおく（$W(k)$ において p は局所冪零でないので，$S \hookrightarrow \operatorname{Spec} W(k)$ は $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の対象を定めないことに注意せよ）．以下では $W(k)$ 以外の p 進位相について完備な $W(k)$ 代数 R についても（定義が可能なときは）同様にして $\mathbb{D}(\mathcal{G})(R)$ を考えることがある．なお [BBM82, p.175] も参照せよ．

例 A.29 $f\colon A \to S$ をアーベルスキームとする．このとき $R^1 f_{\mathrm{cris}*}\mathcal{O}_{A/\Sigma} \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/\Sigma}(A, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$ が成り立ち，さらにこれは $\mathbb{D}(A[p^\infty])$ に等しい（[BBM82, 2.5.6, 3.3.7]）．特に S が標数 p の完全体 k のスペクトラムのとき

$$H^1_{\mathrm{cris}}\bigl(A/W(k)\bigr) \cong \mathbb{D}\bigl(A[p^\infty]\bigr)\bigl(W(k)\bigr)$$

となる．

S が標数 p の完全体のスペクトラムのときは，Dieudonné 加群と Dieudonné クリスタルは次のように関係づけられる．

定理 A.30（[BBM82, 4.2.14]） k を標数 p の完全体とし，$S = \operatorname{Spec} k$ とおく．k 上の p 可除群 $\mathcal{G}$ に対して，同型

$$D(\mathcal{G})^\sigma \cong \mathbb{D}(\mathcal{G})\bigl(W(k)\bigr)$$

が存在する．

注意 A.31 Dieudonné 関手は S がよい性質を満たせば忠実充満であると予想されており，実際に様々な条件下で忠実充満性が示されている．例えば S が標数 p の局所完全交叉エクセレント環のスペクトラムのとき Dieudonné 関手は忠実充満である．また f-半完全というクラスの環に対しても忠実充満性に関する結果が得られる（この場合は同種を考える必要がある）．これらの詳しい結果については [dJ98] や [SW13] を参照せよ．

注意 A.32 この付録で与えた $\mathbb{D}(\mathcal{G})$ の構成は [BBM82] による．ただし厳密には [BBM82] ではビッグ・クリスタリンサイト $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma, I, \gamma)$ を用いている．このサイトの対象は以下のような組 $(U \hookrightarrow T, \delta)$ である：U は S スキームで，$U \hookrightarrow T$ は Σ 閉埋め込み．$U \to T$ の定義イデアルを J とおくと，δ は J の PD 構造であって，γ と両立するもの．

このとき被覆 $\{f_i \colon (U_i \hookrightarrow T_i, \delta_i) \to (U \hookrightarrow T, \delta)\}$ として，Zariski 被覆（すなわち $T_i \to T$ が開埋め込みであることを要請する）以外にも，fppf 被覆や étale 被覆なども考えることができる．[BBM82] ではそれぞれのクラスの被覆の定めるトポロジーで Dieudonné クリスタルを導入しているが，$\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ 上に制限すればすべて同じになる（[BBM82, 1.1.8, p.32, 1.3.6] をみよ）．

注意 A.33 Grothendieck は Dieudonné クリスタルの構成について次の 2 つの方法を提示した（[Gro71]）：

(1) 普遍拡大および指数写像を使う方法．
(2) $\natural$ 拡大を使う方法．

これらの理論の詳細はそれぞれ [Mes72] および [MM74] で与えられている（[Mes72] では共変的な Dieudonné クリスタルが構成されている）．ただしこれらの文献では局所冪零な対象のみを考えた冪零クリスタリンサイト上で Dieudonné クリスタルを構成している．この付録の構成と [Mes72] の構成との比較については [BM90, §3] を参照せよ．

Grothendieck–Messing 理論

定理 A.26 より Dieudonné クリスタルにはフィルトレーションが定まる．このフィルトレーションにより p 可除群の変形を記述することができる．これは Grothendieck により提唱され，Messing（[Mes72]）により詳細が与えられたため Grothendieck–Messing 理論とよばれる．なお本稿ではアーベルスキームについて類似の結果として定理 2.26 を紹介した．本稿では述べないが，アーベルスキームについても p 可除群と同様の Grothendieck–Messing 理論があり（証明はアーベルスキームのほうが易しい），アーベルスキームに伴う p 可除群の Grothendieck–Messing 理論と一致する．これについては [Mes72, V.1.10] を参照されたい．

引き続き S を p が局所冪零となるスキームとし，$\mathcal{G}$ を S 上の p 可除群とする．こ

のとき定理 A.26 より局所自由 $\mathcal{O}_S$ 加群の完全系列

$$0 \to \omega_{\mathcal{G}} \to \mathbb{D}(\mathcal{G})_S \to \underline{\mathrm{Lie}}\,\mathcal{G}^\vee \to 0$$

がある．特に $\omega_{\mathcal{G}}$ は局所的には直和因子になっている．

$S \hookrightarrow S'$ を閉埋め込みとし，その定義イデアルは冪零 PD 構造 δ をもつとする．(よって，$(S \hookrightarrow S', \delta)$ は $\mathrm{Cris}(S/\Sigma, I, \gamma)$ の対象を定める)．S' 上の p 可除群 $\mathcal{G}'$ であって，$\mathcal{G}' \times_{S'} S = \mathcal{G}$ となるものを考える．このとき局所自由 $\mathcal{O}_{S'}$ 加群の同型

$$\mathbb{D}(\mathcal{G})_{(S \hookrightarrow S', \delta)} \cong \mathbb{D}(\mathcal{G}')_{S'}$$

が得られる（後者は $\mathrm{Cris}(S'/\Sigma, I, \gamma)$ 上のクリスタルから得られたものである．なお $\mathrm{id}\colon S' \to S'$ と零イデアル上の自明な PD 構造が定める $\mathrm{Cris}(S'/\Sigma, I, \gamma)$ の対象を S' とかいている)．局所自由 $\mathcal{O}_{S'}$ 加群の完全系列

$$0 \to \omega_{\mathcal{G}'} \to \mathbb{D}(\mathcal{G}')_{S'} \to \underline{\mathrm{Lie}}\,\mathcal{G}'^\vee \to 0$$

と上の同型より局所自由 $\mathcal{O}_{S'}$ 部分加群 $\omega_{\mathcal{G}'} \subset \mathbb{D}(\mathcal{G})_{(S \hookrightarrow S', \delta)}$ が得られる．さらにこれは次の性質を満たす：

(1) $\omega_{\mathcal{G}'} \subset \mathbb{D}(\mathcal{G})_{(S \hookrightarrow S', \delta)}$ は局所的には直和因子である．
(2) $\omega_{\mathcal{G}'} \subset \mathbb{D}(\mathcal{G})_{(S \hookrightarrow S', \delta)}$ を $S \hookrightarrow S'$ で引き戻すと $\omega_{\mathcal{G}} \subset \mathbb{D}(\mathcal{G})_S$ になる．

このフィルトレーションによって $\mathcal{G}'$ を特徴付けることが Grothendieck–Messing 理論の主張である．その定式化のために用語を 1 つ導入する．

定義 A.34 $\mathcal{G}$ および $(S \hookrightarrow S', \delta)$ を上の通りとする．$\mathbb{D}(\mathcal{G})_{(S \hookrightarrow S', \delta)}$ の局所自由 $\mathcal{O}_{S'}$ 部分加群 Fil^1 が $\mathcal{G}$ の**許容フィルトレーション**であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう：

(1) $\mathrm{Fil}^1 \subset \mathbb{D}(\mathcal{G})_{(S \hookrightarrow S', \delta)}$ は局所的には直和因子である．
(2) $\mathrm{Fil}^1 \subset \mathbb{D}(\mathcal{G})_{(S \hookrightarrow S', \delta)}$ を $S \hookrightarrow S'$ で引き戻すと $\omega_{\mathcal{G}} \subset \mathbb{D}(\mathcal{G})_S$ になる．

定理 A.35（Grothendieck–Messing 理論） 関手 $\mathcal{G}' \mapsto (\mathcal{G}' \times_{S'} S, \omega_{\mathcal{G}'})$ は S' 上の p 可除群の圏から，S 上の p 可除群とその許容フィルトレーションの組のなす圏への圏同値を与える．

なお後者の圏の射 $(\mathcal{G}_1, \mathrm{Fil}_1^1) \to (\mathcal{G}_2, \mathrm{Fil}_2^1)$ は，S 上の p 可除群の射 $f\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ と $\mathcal{O}_{S'}$ 加群の射 $g\colon \mathrm{Fil}_2^1 \to \mathrm{Fil}_1^1$ の組 (f, g) であって，図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}_2^1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & \mathbb{D}(\mathcal{G}_2)_{(S \hookrightarrow S', \delta)} \arrow[d, "\mathbb{D}(f)_{(S \hookrightarrow S', \delta)}"] \\ \mathrm{Fil}_1^1 \arrow[r, hook] & \mathbb{D}(\mathcal{G}_1)_{(S \hookrightarrow S', \delta)} \end{tikzcd}$$

を可換にし，さらに，この図式の $S \hookrightarrow S'$ による引き戻しが

$$\begin{tikzcd} \omega_{\mathcal{G}_2} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^*"] & \mathbb{D}(\mathcal{G}_2)_S \arrow[d, "\mathbb{D}(f)_S"] \\ \omega_{\mathcal{G}_1} \arrow[r, hook] & \mathbb{D}(\mathcal{G}_1)_S \end{tikzcd}$$

に一致するものと定める．

アーベルスキームとそれに伴う p 可除群

定理 A.36（Serre–Tate） S を p が局所冪零なスキームとし，$S_0 \hookrightarrow S$ を局所冪零な準連接イデアル層で定まる S の閉部分スキームとする．このとき，次の 2 つの圏は圏同値である：

(1) S 上のアーベルスキームのなす圏．
(2) S_0 上のアーベルスキーム A_0，S 上の p 可除群 $\mathcal{G}$ および S_0 上の p 可除群の同型 $\varepsilon\colon A_0[p^\infty] \cong \mathcal{G} \times_S S_0$ からなる組 $(A_0, \mathcal{G}, \varepsilon)$ のなす圏．

なお圏同値は S 上のアーベルスキーム A に対して，$(A \times_S S_0, A[p^\infty], \mathrm{id})$ を対応させる関手により与えられる．

定理の証明は貼り合わせの議論から S がアフィンの場合に帰着される．さらに S_0 の定義イデアルが PD 構造をもつ場合に帰着できるので，アーベルスキームと p 可除群の Grothendieck–Messing 理論をくらべることで定理を証明することができる．このアイデアによる Serre–Tate の証明については [Mes72, V.2.3] をみよ．ただし，その後，Drinfeld により非常に簡潔な別証明が与えられている．この別証明については [Kat81, 1.2.1] をみよ．

A.3 標数 p の完全体上の変形環

k を標数 p の完全体とし，$\mathcal{G}_0$ を k 上の p 可除群とする．剰余体が k となる局所 Artin $W(k)$ 代数 R に対して，$\mathcal{G}_0$ の R 上の変形 $(\mathcal{G}_R, \mathcal{G}_R \otimes_R k \cong \mathcal{G}_0)$ のなす集合を対応させる関手 F を考える．

定理 A.37（Illusie） 剰余体が k となる局所 Artin $W(k)$ 代数のなす圏から集合の圏への $\mathcal{G}_0$ の変形関手 F は表現可能（pro-representable）である．すなわち，ある $W(k)$ 代数 R^{univ} が存在して，任意の剰余体が k となる局所 Artin $W(k)$ 代数 R に対して，

$$F(R) = \mathrm{Hom}_{W(k)}(R^{\mathrm{univ}}, R)$$

が成り立つ．さらに R^{univ} は $(\dim \mathcal{G}_0)(\dim \mathcal{G}_0^{\vee})$ 変数形式的冪級数環 $W(k)[[t_{ij}]]$ $(1 \leq i \leq \dim \mathcal{G}_0, 1 \leq j \leq \dim \mathcal{G}_0^{\vee})$ と同型である．

証明は余接複体の理論を用いて Illusie により与えられた（[Ill85, 4.8]）．なお変形理論の観点からみて自然な同型 $R^{\mathrm{univ}} \cong W(k)[[t_{ij}]]$ をとることができる（[Ill85, 4.8.2]）．

以下では Faltings による R^{univ} のより具体的な表示を述べる．議論の詳細は [Fal99, § 7] および [Moo98, § 4.1-4.4] を参照せよ．

簡単のため $W = W(k)$ とおく．$\mathrm{Cris}(\mathrm{Spec}\, k/\Sigma, I, \gamma)$ 上の Dieudonné クリスタル $\mathbb{D}(\mathcal{G}_0)$ を考える．また $M_k := \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(k)$, $M_W := \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(W)$ とおく．クリスタルの性質より $M_W \otimes_W k = M_k$ となる．

$\omega_{\mathcal{G}_0} \subset \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)_{\mathrm{Spec}\, k}$ は M_k の部分ベクトル空間 Fil^1_k を定める．$M_k = \mathrm{Fil}^1_k \oplus N_k$ となる部分ベクトル空間 $N_k \subset M_k$ を固定する．また W 加群の直和分解 $M_W = \mathrm{Fil}^1_W \oplus N_W$ で，$\mathrm{Fil}^1_W \otimes_W k = \mathrm{Fil}^1_k$, $N_W \otimes_W k = N_k$ となるものをとる．

W 上の代数群 $\mathrm{GL}(M_W)$ を考える．$N_W \subset M_W$ の固定部分群は $\mathrm{GL}(M_W)$ の放物型部分群となる．これを P° とおく．P° の冪単部分群を U° とかき，U° の単位元での完備化を $\hat{U}^\circ$ とおく．

このとき次が成り立つ．

- $\hat{U}^\circ$ 上への $\mathcal{G}_0$ の変形が自然に定まる．
- 変形環 R^{univ} の普遍性より定まる射 $R^{\mathrm{univ}} \to \Gamma(\hat{U}^\circ, \mathcal{O}_{\hat{U}^\circ})$ は同型である．

議論の詳細については [Moo98, 4.5] を参照せよ．以下では $\Gamma(\hat{U}^\circ, \mathcal{O}_{\hat{U}^\circ})$ を R^{univ} とかくことにする．また R^{univ} 上の普遍変形を $\mathcal{G}_{R^{\mathrm{univ}}}$ とおく．

注意 A.38　なお上の事実の証明や第 5.2 小節の Step 4 の議論では W 上形式的に滑らかな完備局所環 R 上でも Dieudonné クリスタルを考え，それを R 加群と付加構造（接続，Frobenius，フィルトレーション）で記述することが重要になる．本稿ではこれに関する議論は全く触れずに導かれる結果のみを述べている．詳細については [Moo98, 4.1-4.5] および [Kis10, 1.5] を参照されたい．

練習 A.39　Grothendieck–Messing 理論が使える状況で $\mathrm{Hom}\big(\Gamma(\hat{U}^\circ, \mathcal{O}_{\hat{U}^\circ}), R\big)$ が R 上への $\mathcal{G}_0$ の変形全体と対応することを確かめてみよう．

R を剰余体が k となる局所 Artin W 代数とする．また $\operatorname{Spec} k \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$ に（冪零）PD 構造が与えられているとする（特に Dieudonné クリスタルの理論や Grothendieck–Messing の理論を適用できる）．$M_R := \mathbb{D}(\mathcal{G}_0)(R)$ とおくと $M_R = M_W \otimes_W R$ が成り立つ．$\mathrm{Fil}^1_R := \mathrm{Fil}^1_W \otimes_W R$, $N_R := N_W \otimes_W R$ とおく．

このとき次の集合の間に自然な対応があることを示せ．

(1) $\mathcal{G}_0$ の R 上への変形全体．
(2) 自由 R 部分加群 $\mathrm{Fil}^1 \subset M_R$ であって，$\mathrm{Fil}^1 \otimes_R k = \mathrm{Fil}^1_k$ かつ M_R/Fil^1 も自由 R 加群になるもの全体．
(3) $\{f \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Fil}^1_R, N_R) \mid f \otimes_R k = 0\}$.
(4) $\mathrm{Hom}_W\big(\Gamma(\hat{U}^\circ, \mathcal{O}_{\hat{U}^\circ}), R\big)$.

ヒント：(2) と (3) の対応の構成は以下の通り．(2) の Fil^1 が与えられたとする．$\mathrm{Fil}^1 \hookrightarrow M_R = \mathrm{Fil}^1_R \oplus N_R \twoheadrightarrow \mathrm{Fil}^1_R$ は同型であることがわかる．よって，これの逆写像 $\mathrm{Fil}^1_R \to \mathrm{Fil}^1$ と $\mathrm{Fil}^1 \hookrightarrow M_R = \mathrm{Fil}^1_R \oplus N_R \twoheadrightarrow N_R$ の合成は (3) の条件を満たす．逆に (3) の $f\colon \mathrm{Fil}^1_R \to N_R$ が与えられたとき，$(\mathrm{id}_{\mathrm{Fil}^1_R} \oplus f)(\mathrm{Fil}^1_R) \subset \mathrm{Fil}^1_R \oplus N_R = M_R$ は (2) の条件を満たす．

付録 B　Breuil–Kisin 加群

本付録では第 5 節の証明で必要となる Breuil–Kisin 加群の定義とその性質を [Kis06]，[Kis10, §1] に沿って簡単に説明する．

p 進 Hodge 理論の表現論的な立場では $\mathbb{Q}_p$ やその有限拡大体の絶対 Galois 群の p 進表現を理解することが大きな目標の 1 つである．Fontaine はエタールコホモロジーを用いて幾何学的に構成される p 進表現を捉えるため周期環 B_{cris}，B_{dR} を構成し，クリスタリン表現，de Rham 表現という p 進表現のクラスを定義した．例えば，よい還元をもつ代数多様体のエタールコモロジーや，よい還元をもつ p 可除群の Tate 加群から得られる p 進表現はクリスタリン表現になる．また，クリスタリン表現に対してその不変量としてフィルトレーション付き φ 加群が定義され，さらにクリスタリン表現のなす圏と，弱許容という性質を満たすフィルトレーション付き φ 加群のなす圏とが圏同値になる．

この付録で扱う Breuil–Kisin 加群とはクリスタリン表現の Galois 作用で安定な $\mathbb{Z}_p$ 格子を記述する理論であり[*36]，整 p 進 Hodge 理論の基礎理論になっている．例えば応用としてよい還元をもつ p 可除群を Breuil–Kisin 加群で記述することができる（定理 B.6）．

なお本稿では周期環やクリスタリン表現，de Rham 表現の基本性質について割愛せざるを得なかった．これらについては日本語による解説（[辻]，[中村]）もあるので，本付録を読む際には上記の文献を参照していただきたい．また Breuil–Kisin 加群が導入された論文 [Kis06] については [望月] で詳しく解説されている．

k を標数 p の完全体とする．$W := W(k)$ を k の Witt ベクトルのなす環とし，その商体を L_0 とおく．L を L_0 の有限完全分岐拡大体とする．L の素元 π を 1 つ固定する．π の L_0 上の最小多項式（Eisenstein 多項式）を $E(u) \in W[u]$ とおく．

定義 B.1　$\mathfrak{S} := W[[u]]$ とおく．さらに $\mathfrak{S}$ 上の Frobenius 射 φ を W 上には通常の Frobenius 射であり，$\varphi(u) = u^p$ となるものとして定める．

$\mathfrak{S}$ 上の **Breuil–Kisin 加群**とは，有限自由 $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{S}$ 同型

$$1 \otimes \varphi \colon \varphi^*(\mathfrak{M})[1/E(u)] \xrightarrow{\cong} \mathfrak{M}[1/E(u)]$$

の組 $(\mathfrak{S}, 1 \otimes \varphi)$ をいう．ここで $\varphi^*(\mathfrak{M}) := \mathfrak{S} \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}[1/E(u)] := \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[1/E(u)]$ とおいた．

Breuil–Kisin 加群の間の射は $\mathfrak{S}$ 準同型であって，$1 \otimes \varphi$ と可換なものとして定める．$\mathfrak{S}$ 上の Breuil–Kisin 加群のなす圏を $\mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ とおく．

[*36] より一般に半安定表現についても Breuil–Kisin 加群で捉えることができるが，本稿では省略する．

Breuil–Kisin 加群 $(\mathfrak{S}, 1\otimes\varphi)$ について，$\varphi^*(\mathfrak{M})$ のフィルトレーションを

$$\mathrm{Fil}^i\,\varphi^*(\mathfrak{M}) := (1\otimes\varphi)^{-1}\bigl(E(u)^i\mathfrak{M}\bigr)\cap\varphi^*(\mathfrak{M})$$

で定める．

注意 B.2 Breuil–Kisin 加群は [Kis06] において導入された．なお [Kis06] の定義では $\mathfrak{S}$ 準同型 $1\otimes\varphi\colon\varphi^*\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ であって，$\mathrm{Coker}(1\otimes\varphi)$ が $E(u)$ の冪で消えるもののみを考えている．本稿で与えた定義は [Kis10, 1.2] による．

注意 B.3 Breuil–Kisin 加群 $(\mathfrak{M}, 1\otimes\varphi)$ に対し $\mathfrak{S}$ 同型 $1\otimes\varphi\colon\varphi^*(\mathfrak{M})[1/E(u)]\xrightarrow{\cong}\mathfrak{M}[1/E(u)]$ を環準同型 $\mathfrak{S}\to W, u\mapsto 0$ により底変換することで $L_0=\mathrm{Frac}\,W$ 上の同型

$$\varphi^*(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})[1/p]\xrightarrow{\cong}(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})[1/p] \qquad \text{(B.1)}$$

を得る．この同型により $(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})[1/p]$ は（L_0 上の）φ 加群とみなせる．同様に (B.1) をさらに W の Frobenius で底変換した射を考えることで，$\varphi^*(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})[1/p]$ も φ 加群となる．さらに (B.1) は φ 加群 $\varphi^*(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})[1/p]$ と $(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})[1/p]$ の間の同型となる．

次にクリスタリン表現と de Rham 表現の定義を思い出そう．簡単のため L の絶対 Galois 群を Gal_L とかくことにする．B_{cris}, B_{dR} を Fontaine の定義した L に伴う周期環とする．B_{dR} は Gal_L が作用する体で，降下フィルトレーションをもつ．また B_{cris} は Gal_L が作用する B_{dR} の部分環で，B_{dR} から定まるフィルトレーションをもち，さらに Gal_L 作用と可換な Frobenius 射をもつ（より詳しい説明は [辻]，[中村] をみよ）．

定義 B.4 V を Gal_L の連続作用付き有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間とする．

(1) $D_{\mathrm{dR}}(V):=(B_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{\mathrm{Gal}_L}$ とおく．$D_{\mathrm{dR}}(V)$ は次元が $\dim_{\mathbb{Q}_p}V$ 以下の L ベクトル空間であり，さらに B_{dR} から誘導されるフィルトレーションをもつ．$\dim_L D_{\mathrm{dR}}(V)=\dim_{\mathbb{Q}_p}V$ が成り立つとき V は **de Rham 表現**であるという．

(2) $D_{\mathrm{cris}}(V):=(B_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{\mathrm{Gal}_L}$ とおく．$D_{\mathrm{cris}}(V)$ は次元が $\dim_{\mathbb{Q}_p}V$ 以下の L_0 ベクトル空間であり，さらに B_{cris} から誘導される Frobenius をもつ．また $D_{\mathrm{cris}}(V)\otimes_{L_0}L\subset D_{\mathrm{dR}}(V)$ である．$\dim_{L_0}D_{\mathrm{cris}}(V)=\dim_{\mathbb{Q}_p}V$ が成り立つ

とき V は**クリスタリン表現**であるという．なおクリスタリン表現は de Rham 表現である．このとき $D_{\mathrm{cris}}(V) \otimes_{L_0} L = D_{\mathrm{dR}}(V)$ となる．

Gal_L の連続作用付き有限自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群 Λ であって $\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p$ がクリスタリン表現となるもののなす圏を $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}\circ}_{\mathrm{Gal}_L}$ とおく．例えば $\mathcal{O}_L$ 上の p 可除群 $\mathcal{G}$ に対し，$T_p\mathcal{G}$ および $T_p\mathcal{G}^\vee$ は $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}\circ}_{\mathrm{Gal}_L}$ の対象となる．

定理 B.5（[Kis10，Theorem 1.2.1]） 忠実充満テンソル関手 $\mathfrak{M}\colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}\circ}_{\mathrm{Gal}_L} \longrightarrow \mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ で以下の性質を満たすものが存在する：$\Lambda \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}\circ}_{\mathrm{Gal}_L}$ とする．

(1) Frobenius 作用を保つ自然な同型

$$D_{\mathrm{cris}}(\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p) \cong \big(\mathfrak{M}(\Lambda)/u\mathfrak{M}(\Lambda)\big)[1/p]$$

およびフィルトレーションを保つ自然な同型

$$D_{\mathrm{dR}}(\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p) \cong \varphi^*\mathfrak{M}(\Lambda) \otimes_{\mathfrak{S}} L$$

がある．ただし 2 つ目の同型において $\mathfrak{S} \to L$ は u を π にうつすものであり，$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(\Lambda \otimes \mathbb{Q}_p)$ は $\mathrm{Fil}^i \varphi^*\mathfrak{M}(\Lambda) \otimes_{\mathfrak{S}} L$ に対応する．

(2) 自然な同型

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}(\Lambda)$$

がある[*37]．

p 可除群の場合に Breuil–Kisin 加群と Dieudonné クリスタルを比べよう．W 代数 $W[u, E(u)^n/n!]_{n\geq 1} \subset (\mathrm{Frac}\, W)[u]$ の p 進完備化を S とおく．S は $\varphi(u) = u^p$ を満たす Frobenius φ をもつ．また $\mathrm{Fil}^1 S := \mathrm{Ker}(S \to \mathcal{O}_L, u \mapsto \pi)$ とおく．このとき Fil^1 は自然な PD 構造をもつ．さらに $u \mapsto u$ により S は $\mathfrak{S}$ 代数となる．

$\mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ の充満部分圏 $\mathrm{BT}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ を次の条件で定める：$\mathrm{BT}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ の対象は $1 \otimes \varphi\colon \varphi^*(\mathfrak{M})[1/E(u)] \xrightarrow{\cong} \mathfrak{M}[1/E(u)]$ が準同型 $\varphi^*(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$ を誘導し，さらにその余核が $E(u)$ で消えるものとする．

$\mathfrak{M} \in \mathrm{BT}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ に対し

$$\mathcal{M}(\mathfrak{M}) := S \otimes_{\mathfrak{S}} \varphi^*\mathfrak{M}$$

*37 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ は p 進 Hodge 理論にでてくる環で，$\mathfrak{S}_{(p)}$ を p 進完備化した環上忠実平坦かつ形式的エタールである．特に $\mathfrak{S}_{(p)}$ 上忠実平坦である．定義は例えば [Kis06, 2.1.1]，[望月, 設定その二] にある．

とおき，さらに

$$\mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}(\mathfrak{M}) := \{x \in \mathcal{M}(\mathfrak{M}) \mid (\mathrm{id}_S \otimes (1 \otimes \varphi))(x) \in (\mathrm{Fil}^1 S) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \subset S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}\}$$

とおく．また $\mathcal{M}(\mathfrak{M})$ にも Frobenius が誘導される．

定理 B.6（[Kis10, 1.4.2]） $p > 2$ とする．$\mathcal{O}_L$ 上の p 可除群 $\mathcal{G}$ に対し $\mathfrak{M}(\mathcal{G}) := \mathfrak{M}(T_p\mathcal{G}^\vee(-1))$*38，$\mathbb{D}(\mathcal{G}) := \mathbb{D}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_L} k)$ とおく．このとき $\mathfrak{M}$ は $\mathcal{O}_L$ 上の p 可除群のなす圏と $\mathrm{BT}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ との圏同値を誘導する．また自然なフィルトレーションを保つ φ 同変な同型

$$\mathbb{D}(\mathcal{G})(S) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(\mathfrak{M}(\mathcal{G}))$$

が存在する．特に環準同型 $S \to W; u \mapsto 0$ でさらに係数拡大することにより φ 同変な同型

$$\mathbb{D}(\mathcal{G})(W) \xrightarrow{\cong} \varphi^*(\mathfrak{M}(\mathcal{G})/u\mathfrak{M}(\mathcal{G}))$$

を得る．

注意 B.7 定理 B.6 は $p = 2$ でも成り立つことが知られている．[Kim12, Lau14, Lau19, Liu13] および [IIK18, §11.4] を参照せよ．

謝辞 本稿は 2015 年度整数論サマースクール「志村多様体とその応用」における筆者の講演「志村多様体の整モデル」に基づいている．原稿にコメントを下さった伊藤哲史氏，越川皓永氏，時本一樹氏，松本雄也氏に感謝する．なお本稿の最終校正は筆者が Institute for Advanced Study に所属している間に行われた．その際に筆者は National Science Foundation の研究費 DMS-1638352 から支援を受けている．

参考文献

[Ber74] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

*38 ただし (-1) は Tate ひねり $\mathbb{Z}_p(-1)$ を表す．特に $T_p\mathcal{G}^\vee(-1)$ は $T_p\mathcal{G}$ の反傾表現となる．なお [Kis10, 1.4.2] では Tate ひねりは見過ごされている．[Kis17, Footnote 8] を参照せよ．

[BBM82] P. Berthelot, L. Breen, and W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 930, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[BM90] P. Berthelot and W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline. III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 173–247.

[BO78] P. Berthelot and A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978.

[BO83] P. Berthelot and A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology. I*, Invent. Math. **72** (1983), no. 2, 159–199.

[Bla94] D. Blasius, *A p-adic property of Hodge classes on abelian varieties*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 293–308.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[dJ98] A. J. de Jong, *Barsotti-Tate groups and crystals*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), no. Extra Vol. II, 1998, pp. 259–265 (electronic).

[DMOS82] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, and K.-. Shih, *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 900, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[Dem72] M. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 302, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Fal99] G. Faltings, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 1, 117–144.

[Fal02] G. Faltings, *Almost étale extensions*, no. 279, 2002, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II, pp. 185–270.

[FC90] G. Faltings and C.-L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 22, Springer-

Verlag, Berlin, 1990, With an appendix by David Mumford.

[Fon77] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Société Mathématique de France, Paris, 1977, Astérisque, No. 47-48.

[GN09] A. Genestier and B. C. Ngô, *Lectures on Shimura varieties*, Autour des motifs—École d'été Franco-Asiatique de Géométrie Algébrique et de Théorie des Nombres/Asian-French Summer School on Algebraic Geometry and Number Theory. Volume I, Panor. Synthèses, vol. 29, Soc. Math. France, Paris, 2009, pp. 187–236.

[Gro71] A. Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 431–436.

[Gro74] A. Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1974, Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 45 (Été, 1970).

[Gro95] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, Vol. 6, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. Exp. No. 221, 249–276.

[Hid04] H. Hida, *p-adic automorphic forms on Shimura varieties*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004.

[Ill85] L. Illusie, *Déformations de groupes de Barsotti-Tate (d'après A. Grothendieck)*, Astérisque (1985), no. 127, 151–198, Seminar on arithmetic bundles: the Mordell conjecture (Paris, 1983/84).

[Ill94] L. Illusie, *Crystalline cohomology*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 43–70.

[Ill05] L. Illusie, *Grothendieck's existence theorem in formal geometry*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, With a letter (in French) of Jean-Pierre Serre, pp. 179–233.

[IIK18] K. Ito, T. Ito, and T. Koshikawa, *CM liftings of K3 surfaces over finite fields and their applications to the Tate conjecture*, arXiv eprints (2018), arXiv:1809.09604.

[Kat81] N. Katz, *Serre-Tate local moduli*, Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78), Lecture Notes in Math., vol. 868, Springer, Berlin-New York, 1981, pp. 138–202.

[Kim12] W. Kim, *The classification of p-divisible groups over 2-adic discrete valuation rings*, Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 1, 121–141.

[KMP16] W. Kim and K. Madapusi Pera, *2-adic integral canonical models*, Forum Math. Sigma **4** (2016), e28, 34.

[Kis06] M. Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, Algebraic geometry and number theory, Progr. Math., vol. 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, pp. 459–496.

[Kis10] M. Kisin, *Integral models for Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 4, 967–1012.

[Kis17] M. Kisin, mod p *points on Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 3, 819–914.

[Kis20] M. Kisin, *Integral canonical models of shimura varieties: an update*, London Mathematical Society Lecture Note Series, ch. 5, pp. 151–165, Cambridge University Press, 2020.

[KP18] M. Kisin and G. Pappas, *Integral models of Shimura varieties with parahoric level structure*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **128** (2018), 121–218.

[Kot92] R. E. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 373–444.

[Lan13] K.-W. Lan, *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013.

[Lau14] E. Lau, *Relations between Dieudonné displays and crystalline Dieudonné theory*, Algebra Number Theory **8** (2014), no. 9, 2201–2262.

[Lau19] E. Lau, *Displayed equations for Galois representations*, Nagoya Math. J. **235** (2019), 86–114.

[Liu13] T. Liu, *The correspondence between Barsotti-Tate groups and Kisin* *modules when* $p = 2$, J. Théor. Nombres Bordeaux **25** (2013), no. 3, 661–676.

[Lov17] T. Lovering, *Integral canonical models for automorphic vector bundles of abelian type*, Algebra Number Theory **11** (2017), no. 8, 1837–1890.

[MM74] B. Mazur and W. Messing, *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 370, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[Mes72] W. Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Mil92] J. S. Milne, *The points on a Shimura variety modulo a prime of good reduction*, The zeta functions of Picard modular surfaces, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992, pp. 151–253.

[Mil94] J. S. Milne, *Shimura varieties and motives*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 447–523.

[Mil05] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 265–378.

[Moo98] B. Moonen, *Models of Shimura varieties in mixed characteristics*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 267–350.

[Mum70] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1970.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Nit05] N. Nitsure, *Construction of Hilbert and Quot schemes*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 105–137.

[Niz08] W. Nizioł, *Semistable conjecture via K-theory*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 1, 151–178.

[Niz09] W. Nizioł, *On uniqueness of p-adic period morphisms*, Pure Appl. Math. Q. **5** (2009), no. 1, 163–212.

[Ogu84] A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology. II. Convergent isocrystals*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 4, 765–850.

[Oor71] F. Oort, *Finite group schemes, local moduli for abelian varieties, and lifting problems*, Compositio Math. **23** (1971), 265–296.

[Pap18] G. Pappas, *Arithmetic models for Shimura varieties*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 377–398.

[Rap05] M. Rapoport, *A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties*, no. 298, 2005, Automorphic forms. I, pp. 271–318.

[SW13] P. Scholze and J. Weinstein, *Moduli of p-divisible groups*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 2, 145–237.

[ST68] J.-P. Serre and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 492–517.

[Tit79] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 29–69.

[Tsu99] T. Tsuji, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. **137** (1999), no. 2, 233–411.

[Tsu02] T. Tsuji, *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: a survey*, no. 279, 2002, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II, pp. 323–370.

[Vas99] A. Vasiu, *Integral canonical models of Shimura varieties of preabelian type*, Asian J. Math. **3** (1999), no. 2, 401–518.

[VZ10] A. Vasiu and T. Zink, *Purity results for p-divisible groups and abelian* *schemes over regular bases of mixed characteristic*, Doc. Math. **15** (2010), 571–599.

[EGAII] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 8, 222.

[EGAIV-II] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1965), no. 24, 231.

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud.

[SGA3-I] *Schémas en groupes. I: Propriétés générales des schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[石塚] 石塚裕大, Abel 多様体の基礎, 本報告集.

[今井] 今井直毅, 志村多様体入門, 本報告集.

[大下] 大下達也, アーベル多様体の周期への応用, 本報告集.

[越川] 越川皓永, Siegel モジュラー多様体, 本報告集.

[千田] 千田雅隆, L 関数の微分値と志村多様体上のサイクル, 本報告集.

[辻] 辻雄, *Introduction to the theory of Fontaine on p-adic Galois representations*, 数理解析研究所講究録 **1097** (1999), 1–26.

[中村] 中村健太郎, p-進表現論入門, ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論.

[三枝] 三枝洋一, 志村多様体のエタールコホモロジー, 本報告集.

[望月] 望月哲史, 整 p 進 Hodge 理論入門, $R = T$ の最近の発展, vol. 1, pp. 380–407.