Hermite 対称領域の数論的商と保型形式

大島 芳樹 *

概要

モジュラー曲線や Siegel モジュラー多様体は「Hermite 対称領域の数論的商」の例になっている．この稿では Hermite 対称領域の数論的商とそのコホモロジーについて，特に次の二つの結果を紹介する：数論的商は準射影的多様体になる (Baily–Borel の定理)；数論的商の特異コホモロジーを，保型表現の $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーによって記述する (松島–村上の公式).

1 数論的部分群

この節では数論的部分群の定義とその性質を述べる.

G を $\mathbb{Q}$ 上の連結な線型代数群とする.

定義 1.1 2 つの部分群 $\Gamma, \Gamma' \subset G(\mathbb{Q})$ が通約的 (commensurable) とは，$[\Gamma : \Gamma \cap \Gamma'] < \infty$ かつ $[\Gamma' : \Gamma \cap \Gamma'] < \infty$ が成り立つこととする.

通約的であることは部分群の間の同値関係を定める.

$\mathbb{Q}$ 上定義された忠実表現 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n$ をとる．単射 $\rho(\mathbb{Q})\colon G(\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ が定まっている.

定義 1.2 部分群 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ が数論的部分群であるとは，Γ と $\rho(\mathbb{Q})^{-1}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}))$ が通約的であることとする.

注意 1.3 ([Bor69, 7.13. Corollaire]) 数論的部分群であることは，ρ のとり方によらない．部分群 $\rho(\mathbb{Q})^{-1}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}))$ 自体は ρ のとり方によるが，異なる ρ に対してそれらは通約的になる.

* 大阪大学大学院情報科学研究科 e-mail: oshima@ist.osaka-u.ac.jp

例 1.4　次の Γ は数論的部分群である．

- $G = \mathrm{GL}_n$，$\Gamma = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
- $G = \mathrm{GL}_n$，$\Gamma = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid g \equiv I_n \pmod N\}$ (合同部分群).
- $G = \mathrm{Sp}_{2n}$，$\Gamma = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$.

以下，この稿では $G(\mathbb{R})$ に古典位相を入れ Lie 群とみなす．定義より Γ を数論的部分群とすると Γ は $G(\mathbb{R})$ の離散部分群である．G が簡約群ならば $G(\mathbb{R})$ には両側不変な測度 (Haar 測度) があるが，これは商 $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ に右 $G(\mathbb{R})$ 不変な測度を定める．

定理 1.5 ([Bor69, 13.2. Corollaire, 8.4. Théorème, 17.4. Proposition])　G を $\mathbb{Q}$ 上の連結な簡約線型代数群とする．数論的部分群 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ について次が成立する．

(1) $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ は有限の体積をもつ．$\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{代数群}(G, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = 1$.

(2) $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ はコンパクト．
　$\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{代数群}(G, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = 1$ かつ $G(\mathbb{Q})$ の冪単元が単位元のみ．
　$\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{代数群}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, G) = 1$.

(3) 部分群 $\Gamma' \subset \Gamma$ で $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$ かつ Γ' がねじれ元をもたないものが存在する．

(2) の条件に現れる $\mathrm{Hom}_{代数群}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, G)$ のランクは G の極大分裂トーラスのランクと等しく，G の $\mathbb{Q}$ ランクという．(2) の条件は G の $\mathbb{Q}$ ランクが 0 ということである．

$X = G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+$ を非コンパクト型 Riemann 対称空間とする．数論的部分群 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})^+$ による商 $\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+$ が，数論的商 (arithmetic quotient) とよばれ次節以降で考察する対象である．Γ がねじれ元をもたないならば，Γ の X への作用は自由で $\Gamma\backslash X$ は C^∞ 多様体になる．X が Hermite 型のとき $\Gamma\backslash X$ は複素多様体になる．さらに，X の計量は Kähler なので $\Gamma\backslash X$ は Kähler 多様体になる．Γ がねじれ元をもつときは $\Gamma\backslash X$ はオービフォールドになる．

例 1.6　B を $\mathbb{Q}$ 上の可除な四元数環で $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R})$ とする．$G = \{b \in B \mid b\bar{b} = 1\}$ とすると，G は $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群で $G(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ となる．このとき数論的部分群 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ に対して，$\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ はコンパクトになる．実際，定理 1.5(2) の条件を容易に確かめることができる．$\Gamma\backslash X$ は上半平面の商で，志村曲線とよばれる．

2 Baily–Borel の定理

G を $\mathbb{Q}$ 上の連結な簡約線型代数群とする．前節で述べたように，非コンパクト型対称空間 $X = G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+$ が Hermite 型のとき，数論的商 $\Gamma\backslash X$ は複素多様体 (またはオービフォールド) になる．次の定理は $\Gamma\backslash X$ に $\mathbb{C}$ 上の代数多様体の構造が入ることを主張する．

定理 2.1 ([BB66], [Mil05, Theorem 3.12], Baily–Borel の定理, 佐武–Baily–Borel のコンパクト化) $X = G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+$ を非コンパクト型 Hermite 対称空間とする．$\Gamma \subset G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})^+$ を数論的部分群とする．このとき，ある射影空間 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ への埋め込み $\Gamma\backslash X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ が存在して次を満たす．

- 閉包 $\overline{\Gamma\backslash X} \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ は正規射影多様体．
- $\Gamma\backslash X \subset \overline{\Gamma\backslash X}$ は稠密な Zariski 開集合．

特に，$\Gamma\backslash X$ は準射影多様体になる．

以下，[BB66] に書かれている証明の要約を試みる．[BJ06]，[Sat99] にも解説がある．

Step 1: Hermite 対称領域 X の閉包の記述 ([Sat60a])．

Hermite 対称領域 $X = G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+$ は，Harish-Chandra 分解により線型空間 $P^+(\mathbb{C})$(阿部氏の稿の記号に倣う) の有界開集合として実現される．Harish-Chandra 分解，および次で述べる (制限) ルート系，放物型部分群については阿部氏の稿を参照していただきたい．$P^+(\mathbb{C})$ 内での X の閉包 $\overline{X}$ について [Sat60a] で詳しく調べられている．$\overline{X}$ は有限個の $G(\mathbb{R})^+$ 軌道に分かれ：$\overline{X} = X \sqcup \bigsqcup_j X_j$，さらに境界の軌道の集合 $\{X_j\}$ は $G_{\mathbb{R}}$ の極大放物型部分群の $G_{\mathbb{R}}$ 共役類でパラメトライズされる．

具体的な分解の様子を記述するためには，ルート系についての情報が必要である．記述を簡単にするため $G(\mathbb{R})$ は連結単純 Lie 群であると仮定する．$G(\mathbb{R}) \neq G(\mathbb{R})^+$ の場合には，以下に現れる $G(\mathbb{R})$ の部分群を $G(\mathbb{R})^+$ との共通部分で置き換えればよい．まず $G_{\mathbb{R}}$ の極大分裂トーラス S を阿部氏の稿の岩澤分解の節にあるようにとる．$G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ が Hermite 型ならば制限ルート系 Φ は C_n 型もしくは BC_n 型であることが知られているため，S の次元を n とすれば Φ の単純ルートの集合

$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ は $X^*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の直交基底 $e_1, \dots, e_n$ を用いて

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1}\ (1 \le i \le n-1), \qquad \alpha_n = \begin{cases} 2e_n & (\Phi\text{: } C_n \text{ 型}) \\ e_n & (\Phi\text{: } BC_n \text{ 型}) \end{cases}$$

と書ける．$G_{\mathbb{R}}$ の極大放物型部分群の $G_{\mathbb{R}}$ 共役類は n 個あり，その完全代表系は $P_{\Pi \setminus \{\alpha_j\}} (1 \le j \le n)$ で与えられる．$P_j := P_{\Pi \setminus \{\alpha_j\}}$ に対応する $\overline{X}$ の $G(\mathbb{R})$ 軌道を X_j とすれば，$\overline{X} = X \sqcup \bigsqcup_{j=1}^n X_j$ となり，$\overline{X}$ は $n+1$ 個の $G(\mathbb{R})$ 軌道からなる．

$G(\mathbb{R})$ 軌道 X_j のある点の固定部分群は次のように記述される．Φ_j を $\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n$ の線型和で書ける Φ の元全体の集合として，Lie 環 $\mathfrak{l}_j$ を

$$\mathfrak{l}_j := \sum_{\alpha \in \Phi_j} \mathfrak{g}_\alpha + [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$$

と定義する．$P_j = M_j N_j$ を Levi 分解として，Levi 成分 M_j の連結部分群 L_j で Lie 環 $\mathfrak{l}_j$ をもつものをとると M_j はさらに $M_j = L_j L_j'$ と分解できる．ただし L_j' は M_j の正規部分群で，$L_j \cap L_j'$ は L_j の中心に含まれる有限群である．すると元 $x_j \in X_j$ を適当にとれば，x_j の固定部分群は $(L_j(\mathbb{R}) \cap K(\mathbb{R})) L_j'(\mathbb{R}) N_j(\mathbb{R})$ で与えられる．従って $X_j \simeq G(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R}) \cap K(\mathbb{R})) L_j'(\mathbb{R}) N_j(\mathbb{R})$ となる．

全射 $G(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R}) \cap K(\mathbb{R})) L_j'(\mathbb{R}) N_j(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R})/P_j(\mathbb{R})$ の点 $eP_j(\mathbb{R})$ 上のファイバーは，同型

$$P_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R}) \cap K(\mathbb{R})) L_j'(\mathbb{R}) N_j(\mathbb{R}) \simeq L_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R}) \cap K(\mathbb{R}))$$

により Riemann 対称空間の構造が入り，さらに Hermite 型になることもわかる．$F_j := L_j(\mathbb{R}) \cdot x_j$ とおくと $F_j \simeq L_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R}) \cap K(\mathbb{R}))$ で，$P_j(\mathbb{R}) = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid g \cdot F_j = F_j\}$ となり，また

$$X_j = \bigsqcup_{gP_j(\mathbb{R}) \in G(\mathbb{R})/P_j(\mathbb{R})} g \cdot F_j$$

と分解する．ここに現れる各 $g \cdot F_j$ を境界成分という．$G(\mathbb{R})/P_j(\mathbb{R})$ は，P_j と $G_{\mathbb{R}}$ 共役な放物型部分群全体と一対一対応するので，境界成分 F に対して正規化群 $N(F) := \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid g \cdot F = F\}$ は $G_{\mathbb{R}}$ の極大放物型部分群になり，$F \mapsto N(F)$ は境界成分全体の集合と $G_{\mathbb{R}}$ の極大放物型部分群全体の集合との一対一対応を与える．

Step 2: $\Gamma \backslash X$ の位相的コンパクト化 ([Sat60b]，[BB66, §4])．

境界成分 F はその正規化群 $N(F)$ が $\mathbb{Q}$ 上定義されるとき，有理的であるという．有理的な境界成分全体は，$G_{\mathbb{Q}}$ の極大放物型部分群全体と一対一に対応している．集

合 X^* を

$$X^* := X \sqcup \bigsqcup_{F:\text{有理的}} F$$

と定義する．X^* には $G(\mathbb{Q})$，特に Γ が作用している．[Sat60b] では，Γ の X への作用に対する基本領域を使って X^* に Γ 不変な位相を定義し，そこから誘導される $\Gamma\backslash X^*$ の商位相に関して $\Gamma\backslash X^*$ がコンパクト Hausdorff 空間になることが示された．なお [Sat60b] ではより一般の設定で位相空間としてのコンパクト化が構成されており (佐武コンパクト化)，ここで用いるのはその特別な場合である．

$Y := \Gamma\backslash X$，$Y^* := \Gamma\backslash X^*$ とおく．X^* の境界成分への分解に応じて Y^* に stratification が入る：

$$Y^* := Y \sqcup \bigsqcup_{t\in\mathcal{T}} Y_t.$$

Strata の集合 $\mathcal{T}$ は有限集合で，全単射

$$\mathcal{T} \simeq \Gamma\backslash\{G_{\mathbb{Q}} \text{ の極大放物型部分群 }\}$$

がある．商写像を $\pi\colon X^* \to Y^*$ とすると，$t \in \mathcal{T}$ に対してある有理的な境界成分 F が存在して $\pi^{-1}(Y_t) = \Gamma\cdot F$ となる．従って $(\Gamma\cap N(F))\backslash F \simeq Y_t$ である．

各 strata Y_t は低次元の Hermite 対称領域の数論的商になっている．いま F_j が有理的で，$\pi^{-1}(Y_t) = \Gamma\cdot F_j$ としよう．つまり Y_t は $\Gamma\cdot F_j$ の Γ による商であり，$Y_t \simeq (\Gamma\cap P_j(\mathbb{R}))\backslash P_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R})\cap K(\mathbb{R}))L'_j(\mathbb{R})N_j(\mathbb{R})$ となる．ここで $\Gamma\cap P_j(\mathbb{R})$ の $P_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R})\cap K(\mathbb{R}))L'_j(\mathbb{R})N_j(\mathbb{R}) \simeq L_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R})\cap K(\mathbb{R}))$ への作用は，$P_j(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow P_j(\mathbb{R})/L'_j(\mathbb{R})N_j(\mathbb{R}) \simeq L_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R})\cap L'_j(\mathbb{R}))$ を経由する．この写像による $\Gamma\cap P_j(\mathbb{R})$ の像 (の $L_j(\mathbb{R})$ への引き戻し) を Γ_j とおくと，$Y_t \simeq \Gamma_j\backslash L_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R})\cap K(\mathbb{R}))$ となり，Hermite 対称領域の数論的商であることがわかる．正確には，一般に L_j をあるコンパクト群の分だけ増やす必要がある (詳しくは [BB66, §3] を参照)．他の全ての strata Y_t $(t\in\mathcal{T})$ も同様の表示をもつ．

また Y^* の任意の点 y に対して，その基本近傍系 $\{U_i\}$ を $U_i\cap Y$ が連結となるようにとれることも示せる．

Step 3: Poincaré–Eisenstein 級数 ([BB66, §5–8])．

複素多様体 X の標準直線束 ω_X は $G(\mathbb{R})$ 同変になる．これは Borel 埋め込み $X \hookrightarrow G(\mathbb{C})/K(\mathbb{C})P^-(\mathbb{C})$ を使って次のように表せる．$G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P^-$ の標準直線束は

$G_{\mathbb{C}}$ 同変になり，$K_{\mathbb{C}}P^-$ の指標 ξ を

$$\xi(kp) = \det \mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{p}^-} \quad (k \in K_{\mathbb{C}},\ p \in P^-)$$

で定義すると $G_{\mathbb{C}} \times_{K_{\mathbb{C}}P^-} \xi \to G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P^-$ と表される．ω_X はこれを開埋め込み $X \hookrightarrow G(\mathbb{C})/K(\mathbb{C})P^-(\mathbb{C})$ で引き戻したものである．k を正の整数とすると，直線束 $\omega_X^{\otimes k}$ は $G(\mathbb{R}) \times_{K(\mathbb{R})} \xi^k \to G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ と書けるので，$\omega_X^{\otimes k}$ の正則大域切断は $G(\mathbb{R})$ 上の関数 h で $h(gg') = \xi^{-k}(g')h(g)$ $(g \in G(\mathbb{R}), g' \in K(\mathbb{R}))$ を満たし，さらに正則性条件 (Cauchy–Riemann 方程式) を満たすものと同一視できる．

ξ^k を極小 K タイプにもつような $G(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現を π_k と書くと，$\omega_X^{\otimes k}$ の正則大域切断は π_k の実現ともみなせる．(正則離散系列表現とは次節で定義する $G(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現のうちのひとつのクラスである．) π_k の極小 K タイプに属するベクトル $v_{\min} \in \pi_k$ をとる．また $C^\infty(G(\mathbb{R}))$ を $G(\mathbb{R})$ の右からの積で表現とみなす (右正則表現)．表現の埋め込み $\pi_k \hookrightarrow C^\infty(G(\mathbb{R}))$ (正確には π_k の K 有限部分からの埋め込み, (3.1) 参照) があれば, $v_{\min}$ の行き先が $\omega_X^{\otimes k}$ の正則大域切断を定める．逆に $\omega_X^{\otimes k}$ の正則大域切断があれば，対応して表現の埋め込み $\pi_k \hookrightarrow C^\infty(G(\mathbb{R}))$ が定まる．

正の整数 k に対して，k に対応する重さをもつ正則保型形式は $\omega_X^{\otimes k}$ の Γ 不変な正則大域切断である．k がある自然数 k_0 の倍数のとき，Γ 不変な $\omega_X^{\otimes k}$ の正則切断は Y 上の正則直線束 $\mathscr{L}^k$ を定める．ここで k_0 の倍数というのはオービフォールドの商特異点の近傍で $\mathscr{L}^k$ が直線束になるための条件であり，k_0 が任意の Γ の捩れ元の位数の倍数であればよい．任意の点 $y \in Y^* \setminus Y$ に対して，Y^* におけるある近傍 U をとると $U \cap Y$ 上で $\mathscr{L}^k$ を自明化することができ，$\mathscr{L}^k$ を Y^* 上の直線束にのばすことができる．これも $\mathscr{L}^k$ と書くと，$\mathscr{L}^k$ は各 strata Y_t 上では次のように表せる．Step 2 で述べたように $\pi^{-1}(Y_t) = \Gamma \cdot F$ となるような有理的な境界成分 F をとると，$Y_t \simeq (\Gamma \cap N(F))\backslash F$ と書ける．F は $P^+(\mathbb{C})$ の部分多様体なので，特に $G(\mathbb{C})/K(\mathbb{C})P^-(\mathbb{C})$ の部分多様体でもある．直線束 $G_{\mathbb{C}} \times_{K_{\mathbb{C}}P^-} \xi^k \to G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P^-$ を F に引き戻した正則直線束について $(\Gamma \cap N(F))$ 不変な切断を考えることで，Y_t の正則直線束が定まる．これが $\mathscr{L}^k$ の延長により得られる Y_t の直線束と同型になる．

X 上の Poincaré 級数は次のように定義される．表現空間のベクトル $v \in \pi_k$ で，K 有限 (すなわち $kv\,(k \in K(\mathbb{R}))$ の張る空間が有限次元) なものをとる．$G(\mathbb{R})$ 上の関数 h を行列要素 $h(g) := (v, \pi(g)v_{\min})$ で定義すると，これは $\omega_X^{\otimes k}$ の正則大域切断になる．[BB66] では $\omega_X^{\otimes k}$ を自明化して X を $P^+(\mathbb{C})$ の有界領域として実現している

が，このとき h は $P^+(\mathbb{C})$ 上の多項式で表される．h に Γ を作用させて和をとったものが Poincaré 級数である：$f(g) := \sum_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma^{-1}g)$．この級数は k が十分大きければ収束して，$\omega_X^{\otimes k}$ の Γ 不変な正則大域切断を定める．また，k がある自然数の倍数ならば Poincaré 級数は $\Gamma\backslash X$ の異なる 2 点を分離する．すなわち任意の異なる 2 点 $x, y \in \Gamma\backslash X$ に対して，x で 0 かつ y で 0 でないような Poincaré 級数が存在する．さらに，Poincaré 級数は $\mathscr{L}^k$ の Y 上の正則切断を定めるが，これは Y^* の切断に連続にのびて $Y^* \setminus Y$ 上 0 になる．

一方 Eisenstein 級数は $G(\mathbb{R})$ の主系列表現と関係している．P を $G_\mathbb{R}$ の極小放物型部分群，χ を $P(\mathbb{R})$ の指標とする．$G(\mathbb{R})$ の主系列表現とは

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\chi) := \{h \in C^\infty(G(\mathbb{R})) \,|\, h(pg) = \chi(p)h(g)\ (p \in P(\mathbb{R}),\, g \in G(\mathbb{R}))\} \quad (2.1)$$

で $G(\mathbb{R})$ は $(\pi(g)h)(g') = h(g'g)$ で作用する．いま $h \in \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\chi)$ で，$\omega_X^{\otimes k}$ の正則大域切断に対応する関数があったとする．これは $G(\mathbb{R})$ の表現の埋め込み $\pi_k \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\chi)$ と対応し，実際 $v_{\min}$ の行き先が h を与える．さらに P および χ が $\mathbb{Q}$ 上定義されているとき，ある $\Gamma\cap P(\mathbb{R})$ の有限位数の部分群 Γ_0 が存在して $\chi(\Gamma_0) = 1$ となる．すると h は左 Γ_0 不変であり，Eisenstein 級数は $f(g) := \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_0} h(\gamma^{-1}g)$．で定義される．

[BB66] で Poincaré–Eisenstein 級数とよばれているのは，この 2 つを組み合わせたものである．Poincaré–Eisenstein 級数は Y^* の strata Y_t それぞれに対して定義される．簡単のため，F_j が有理的で $\pi^{-1}(Y_t) = \Gamma \cdot F_j$ として定義を述べる．そうでない場合も同様である．Step 2 で見たように，Y_t は Hermite 対称領域 $L_j(\mathbb{R})/(L_j(\mathbb{R})\cap K(\mathbb{R}))$ の数論的商になっている．$L_j(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現 $\sigma_{k'}$ と $L'_j(\mathbb{R})N_j(\mathbb{R})$ の指標 χ をとる．$\sigma_{k'}$ に対して Poincaré 級数の定義のところに出てきたように K 有限ベクトルについての行列要素 h_{F_j} を考える．また $G(\mathbb{R})$ 上の関数 h が存在して

$$h(plg) = \chi(p)h_{F_j}(l)\xi^{-k}(g) \quad (p \in L'_j(\mathbb{R})N_j(\mathbb{R}),\ l \in L_j(\mathbb{R}),\ g \in K(\mathbb{R}))$$

となり，さらに h が正則性 ($\omega_X^{\otimes k}$ の X 上の正則切断を定める) をみたすとする．すると，h は

$$\mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\sigma_{k'} \boxtimes \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(C^\infty(L_j(\mathbb{R})) \boxtimes \chi) \hookrightarrow C^\infty(G(\mathbb{R}))$$

の合成写像の像に入る．ここで $\mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\sigma_{k'} \boxtimes \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(C^\infty(L_j(\mathbb{R})) \boxtimes \chi)$ は，h_{F_j} に対応する (つまり極小 K タイプに属するベクトル $v_{\min} \in \sigma_{k'}$ を h_{F_j} に移す) 表

現の埋め込み $\sigma_{k'} \hookrightarrow C^\infty(L_j(\mathbb{R}))$ から定まる．また，$\mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(C^\infty(L_j(\mathbb{R})) \boxtimes \chi) \hookrightarrow C^\infty(G(\mathbb{R}))$ は，$C^\infty(L_j(\mathbb{R}))$ の元に対してその単位元 $e \in L_j(\mathbb{R})$ での値をとることで定まる．すると h に対応する正則離散系列表現の埋め込み $\pi_k \hookrightarrow C^\infty(G(\mathbb{R}))$ が，$\mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\sigma_{k'} \boxtimes \chi) \hookrightarrow C^\infty(G(\mathbb{R}))$ を経由することがわかり，正則離散系列表現の誘導表現への埋め込み $\pi_k \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\sigma_{k'} \boxtimes \chi)$ が得られる．さらに，$\chi(\Gamma \cap L'_j(\mathbb{R})N_j(\mathbb{R})) = 1$ となっているとき，Poincaré–Eisenstein 級数を

$$f(g) := \sum_{\gamma \in \Gamma/(\Gamma \cap L'_j(\mathbb{R})N_j(\mathbb{R}))} h(\gamma^{-1}g)$$

で定義する．実際 k がある自然数の倍数のとき, 表現の埋め込み $\pi_k \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P_j(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\sigma_{k'} \boxtimes \chi)$ があるような $\sigma_{k'}$ と χ が存在して，任意の h_{F_j} に対して Poincaré–Eisenstein 級数を定義できる．k と k' は定数倍の関係にある．Poincaré–Eisenstein 級数 f は $\mathscr{L}^k$ の Y 上の正則切断を定め，Y^* 上の切断に拡張される．f は各 strata 上正則になり，Y_t 上では h_{F_j} から作られる Poincaré 級数に一致し，$\overline{Y_{t'}} \not\supset Y_t$ のとき $Y_{t'}$ 上では 0 になる．

Step 4: $\Gamma\backslash X$ の位相的コンパクト化 Y^* は正規な射影多様体になる ([BB66, §9–10]).

Y^* 上の環の層 $\mathcal{O}_{Y^*}$ を次のように定義する：開集合 $U \subset Y^*$ に対して，$\mathcal{O}_{Y^*}(U)$ を U 上連続かつ各 strata との共通部分 $U \cap Y_t$ で正則な関数全体の空間とする．

Step 3 で述べたことから，各 strata Y_t に対する Poincaré–Eisenstein 級数 (ここでは X 上の Poincaré 級数自身も含める) を全て考えると，Y^* の任意の異なる 2 点は分離できる．するとある整数 k と Poincaré–Eisenstein 級数として得られる $\mathscr{L}^k$ の Y^* 上の切断 $f_1, \ldots, f_s$ が存在して，対応する射影空間への写像 $f\colon Y^* \to \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{C})$ が単射になる ([BB66, Lemma 10.8]). f は Y^* と像 $Z := f(Y^*)$ との同相写像を与える．また Z は $\mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{C})$ の解析的部分集合になり，よって Z は射影多様体になる．$\mathcal{O}_Z$ を Z の構造層とする．

$(Z, \mathcal{O}_Z)$ の正規化を $(\widetilde{Z}, \mathcal{O}_{\widetilde{Z}})$ とする．Step 2 で述べたように，任意の点 $y \in Y^*$ の十分小さな近傍 U で $U \cap Y$ が連結になるようなものが存在する．このことから底空間 Z と $\widetilde{Z}$ は自然に同相で，f により $(Y^*, \mathcal{O}_{Y^*})$ と $(\widetilde{Z}, \mathcal{O}_{\widetilde{Z}})$ が環つき空間として同型になることが示される．よって Y^* に正規な射影多様体の構造が入った．

なお定理にあるような埋め込み $Y^* \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ は，ある重さ k の $N+1$ 個の正則保型形式 (ここでは $\mathscr{L}^k$ の Y^* 上の正則切断を意味する) に対応する写像として構成で

きる ([BB66, Theorem 10.11])．これは非負な重さをもつ保型形式のなす次数つき環が整閉であることから従う．

例 2.2 $G = \mathrm{Sp}_{2g}$ で $\Gamma = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ のとき，$\Gamma\backslash X$ は Siegel モジュラー多様体 $\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ になる (越川氏の稿を参照)．この場合 stratification は $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, g-1\}$ で与えられ $Y_t \simeq \mathcal{A}_t(\mathbb{C})$ となる．従って $\overline{\mathcal{A}_g(\mathbb{C})} = \bigsqcup_{t=0}^{g} \mathcal{A}_t(\mathbb{C})$ が射影多様体になる．

次の定理は Borel による．

定理 2.3 ([Mil05, Theorem 3.14]) 定理 2.1 の設定で，さらに Γ はねじれ元をもたないとする．V を滑らかな $\mathbb{C}$ 上の代数多様体とし，$\Gamma\backslash X$ に定理 2.1(の証明) で構成された代数多様体の構造を入れる．このとき，任意の解析的な正則写像 $f\colon V \to \Gamma\backslash X$ は代数的になる．

この定理から $\Gamma\backslash X$ の代数多様体の構造の一意性が従う．実際，$\Gamma\backslash X$ 上に任意の代数多様体の構造を入れて V とし，f を恒等写像として定理を適用すればよい．

系 2.4 ([Mil05, Corollary 3.16]) 定理 2.1 の設定で，Γ はねじれ元をもたないとするとき，複素多様体 $\Gamma\backslash X$ の上にある代数多様体の構造は一意的である．

3 $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジー

以下，この稿の本節と次節では G を実簡約 Lie 群，K をその極大コンパクト群とする．たとえば前節までで $G(\mathbb{R})$ と書いていたものや，その Lie 群としての連結成分 $G(\mathbb{R})^+$ をここでは G として考える．G の Lie 環を $\mathfrak{g}$，K の Lie 環を $\mathfrak{k}$ と書く．

定義 3.1 複素ベクトル空間 V が Lie 環 $\mathfrak{g}$ の作用と群 K の作用をもち以下をみたすとき，V を $(\mathfrak{g}, K)$ 加群とよぶ．

- K の表現として V は K の連続な既約有限次元表現の直和と同型．
- $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\exp(tX)v - v) = Xv \quad (X \in \mathfrak{k},\ v \in V)$.
- $(\mathrm{Ad}(k)X)v = k(X(k^{-1}(v))) \quad (k \in K,\ X \in \mathfrak{g},\ v \in V)$.

K が連結なら 3 つ目の条件は前 2 つの条件から従う．

$(\mathfrak{g}, K)$ 加群は，G の連続な (一般には無限次元の) 表現の代数的対応物になっている．

定義 3.2 G のユニタリ表現 $(\pi, \mathscr{H})$ とは，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ への G の作用 π で，作用写像 $G \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}, (g, v) \mapsto \pi(g)v$ が連続かつ $\pi(g)$ がすべての $g \in G$ についてユニタリ作用素となるものである．

G の表現は，群の作用で閉じた真の閉部分空間が存在しないとき既約であるという．

事実 3.3（[Wal88, §3.3–3.4]） $(\pi, \mathscr{H})$ を G の既約ユニタリ表現とすると，$\mathscr{H}$ の K 有限ベクトルのなす部分空間

$$\{v \in \mathscr{H} \mid \pi(k)v\,(k \in K) \text{ の張る空間が有限次元}\} \tag{3.1}$$

に $\mathfrak{g}$ の作用が定義されて既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群になる．これを π_K で表す．また，(3.1) は $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間になっている．

事実 3.4（[Wal88, 3.4.11. Theorem]） 二つの G の既約ユニタリ表現 π, π' に対して，それらが同型であることと，上で定義した π_K, π'_K が $(\mathfrak{g}, K)$ 加群として同型になることは同値である．

よって π に π_K を対応させることで，既約ユニタリ表現の同値類の集合から既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の同型類の集合への単射が得られる．

定義 3.5 既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V がユニタリ化可能であるとは，V に正定値な Hermite 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ があって次をみたすことである．

- $\langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0 \quad (X \in \mathfrak{g},\ v, w \in V)$.
- $\langle kv, kw\rangle = \langle v, w\rangle \quad (k \in K,\ v, w \in V)$.

既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群に対して，上の条件をみたすような Hermite 内積は (存在すれば) 定数倍を除いて一意的である．

既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群がユニタリ化可能であることと既約ユニタリ表現から (3.1) で得られることは同値である．実際，既約ユニタリ表現が与えられたら Hilbert 空間の内積を制限することで $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の内積を得る．また既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の内積が与えられたら，完備化によってユニタリ表現が得られる．

一般の既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群に対応するような G の表現を考えることもできる．

定義 3.6 G の既約認容 (admissible) 表現 $(\pi, \mathscr{H})$ とは，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ への G の作用 π で，既約であり，作用写像 $G \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}, (g, v) \mapsto \pi(g)v$ が連続となり，かつ K の任意の既約有限次元表現 τ に対して $\mathrm{Hom}_K(\tau, \pi)$ が有限次元となるものである．

Hilbert 空間の代わりに，Banach 空間や Fréchet 空間等もしばしば考えられる．上の定義のように Hilbert 空間の場合には，特に既約認容な Hilbert 表現とよばれることもある．

事実 3.7（[Wal88, 3.4.10. Theorem]） 既約ユニタリ表現は既約認容表現である．

G の既約認容表現についても部分空間 (3.1) は既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群になる ([Wal88, 3.4.12. Theorem])．G の既約認容表現 π, π' について対応する $(\mathfrak{g}, K)$ 加群が同型になるとき，π と π' は無限小同値であるという．

事実 3.8 既約認容表現の無限小同値類と既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の同型類には 1 対 1 対応がある．また既約ユニタリ表現の同値類と既約ユニタリ化可能 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の同型類には 1 対 1 対応がある．

$$\begin{array}{ccc}
\{G \text{ の既約認容表現}\}/\sim & \underset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{既約 } (\mathfrak{g}, K) \text{ 加群}\}/\sim \\
\cup & & \cup \\
\{G \text{ の既約ユニタリ表現}\}/\sim & \underset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{既約ユニタリ化可能 } (\mathfrak{g}, K) \text{ 加群}\}/\sim
\end{array}$$

既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群は Langlands 等によって分類された．既約ユニタリ表現の分類は長年の問題だが，最近 Vogan 等の研究により進展があった．

既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群に対して定まる重要な量の一つが無限小指標である．V を既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群とする．$\mathfrak{g}$ の V への作用は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の作用に $\mathbb{C}$ 線型に拡張され，さらに普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の作用に拡張される．Schur の補題より $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中心 $Z(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ はスカラーで作用する．これによって定まる $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\chi\colon Z(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})) \to \mathbb{C}$ を，V の無限小指標という．Harish-Chandra 同型 $Z(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})) \simeq S(\mathfrak{t})^W$ を使うと $\chi \in \mathfrak{t}^\vee/W$ とみなせる．ここで $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分代数，W は Weyl 群である．

事実 3.9 $\chi\colon Z(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})) \to \mathbb{C}$ を固定すると，無限小指標 χ をもつような既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群は有限個しかない．

次に $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーを定義しよう．より詳しいことは [BW00, Chapter 1], [Wal88, Chapter 9] 等に書かれている．$(\mathfrak{g}, K)$ 加群の間の射を $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(V, W)$ で表す．これは V から W への線型写像で，$\mathfrak{g}$ および K の作用と可換なものである．$(\mathfrak{g}, K)$ 加群のなす圏は Abel 圏になり，十分単射的対象および射影的対象をもつ．$(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V に対して

$$V^{\mathfrak{g},K} := \{v \in V \mid Xv = 0\,(\forall X \in \mathfrak{g}) \text{ かつ } kv = v\,(\forall k \in K)\}$$

とすると，これは $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏から $\mathbb{C}$ 線型空間の圏への左完全関手を定める．この関手の n 次右導来関手を $H^n(\mathfrak{g}, K; V)$ で表し，$(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーとよぶ．$\mathbb{C}_{\mathrm{triv.}}$ を自明な $(\mathfrak{g}, K)$ 加群とすれば，

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv.}}, V) \simeq V^{\mathfrak{g},K}, \qquad \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv.}}, V) \simeq H^n(\mathfrak{g}, K; V)$$

である．なお，K が連結のときは $V^{\mathfrak{g},K} = V^{\mathfrak{g}}$ となるが，$(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーと $\mathfrak{g}$ コホモロジーは異なる．

$(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーは以下のように $\mathbb{C}_{\mathrm{triv.}}$ の射影分解を使って計算できる．まず $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とすると，$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ には K の随伴作用 Ad がある．これは交代テンソル $\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ への K および $\mathfrak{k}$ の作用を誘導する．$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$，$U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環として $P_n := U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})} \wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ と定義する．ここで $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ は $U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ の元を右からかけることにより $U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ 加群とみなしている．P_n の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の構造は，

$$\begin{aligned}
&X(y \otimes z) = (Xy) \otimes z, \qquad k(y \otimes z) = \mathrm{Ad}(k)y \otimes \mathrm{Ad}(k)z, \\
&(X \in \mathfrak{g},\ k \in K,\ y \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}),\ z \in \wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})
\end{aligned}$$

で定める．すると $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V に対して自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(P_n, V) \simeq \mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V)$$

がある．従って V から $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(P_n, V)$ への対応は完全関手になり，P_n は射影的である．さらに，$d_n \colon P_{n+1} \to P_n$ を

$$\begin{aligned}
&d_n(y \otimes X_0 \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \big(yX_i \otimes (X_0 \wedge \cdots \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge \cdots \wedge X_n)\big) \\
&\qquad (y \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}),\ X_0, \ldots, X_n \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})
\end{aligned}$$

と定義する．すると，d_n は $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の射になり

$$\mathrm{Ker}(d_n) = \mathrm{Im}(d_{n+1}) \ (n \geq 0), \quad P_0 / \mathrm{Im}(d_0) \simeq \mathbb{C}_{\mathrm{triv.}}$$

である．すなわち，完全系列

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_n} P_n \to \cdots \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \to \mathbb{C}_{\mathrm{triv.}} \to 0 \tag{3.2}$$

を得る．$(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(P_n, V) \simeq \mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V)$$

であるから，(3.2) は

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{d^{-1}} \mathrm{Hom}_K(\wedge^0 \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V) \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}_K(\wedge^1 \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V) \xrightarrow{d^1} \cdots \\ &\cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V) \xrightarrow{d^n} \mathrm{Hom}_K(\wedge^{n+1} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V) \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots \end{aligned} \tag{3.3}$$

を誘導する．d^n は具体的には

$$\begin{aligned} &(d^n f)(X_0 \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X_i \big(f(X_0 \wedge \cdots \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge \cdots \wedge X_n) \big) \\ &\qquad (f \in \mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V),\ X_0, \ldots, X_n \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

で与えられる．$(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジー $H^n(\mathfrak{g}, K; V) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv.}}, V)$ は $\mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1})$ で与えられる．

次節では，G の既約有限次元表現 (ξ, F_ξ) と既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V に対して $H^n(\mathfrak{g}, K; V \otimes F_\xi)$ を考える．これに関して次の 2 つの定理が成立する．ξ の反傾表現 $\xi^\vee$ の無限小指標と V の無限小指標をそれぞれ $\chi_{\xi^\vee}$ と χ_V で表す．

定理 3.10 ([BW00, Chapter I, 4.1. Theorem]) $\chi_{\xi^\vee} \neq \chi_V$ ならば，任意の整数 n について $H^n(\mathfrak{g}, K; V \otimes F_\xi) = 0$ である．

Casimir 元を $C \in Z(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ とすると，C は F_ξ および V にスカラーで作用する．このスカラーをそれぞれ λ_ξ，λ_V と書く．定義より $\chi_V(C) = \lambda_V$ で，また F_ξ と $F_\xi^\vee$ には C が同じスカラーで作用することに注意すると $\chi_{\xi^\vee}(C) = \lambda_\xi$ がわかる．特に，$\chi_{\xi^\vee} = \chi_V$ ならば $\lambda_\xi = \lambda_V$ である．

定理 3.11（[BW00, Chapter II, 3.1. Theorem]） V をユニタリ化可能とする．以下は同値である．

(1) $\lambda_\xi = \lambda_V$ かつある整数 n について $\mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V \otimes F_\xi) \neq 0$.
(2) $\chi_{\xi^\vee} = \chi_V$ かつある整数 n について $\mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V \otimes F_\xi) \neq 0$.
(3) ある整数 n について $H^n(\mathfrak{g}, K; V \otimes F_\xi) \neq 0$.

これら同値な条件が満たされているとき，任意の n について自然な同型

$$H^n(\mathfrak{g}, K; V \otimes F_\xi) \simeq \mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, V \otimes F_\xi)$$

がある．すなわち，(3.3) において $d^n = 0$ である．

事実 3.9 と定理 3.10 より，与えられた ξ に対して $H^n(\mathfrak{g}, K; V \otimes F_\xi) \neq 0$ となるような既約認容表現 V の同値類は有限個しかない．V がユニタリ化可能なとき，そのような V は分類されており，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のある種の放物型部分代数の同値類と一対一対応がある (Vogan–Zuckerman の定理，[BW00, Chapter VI, §5]，[Wal88, Chapter 9])．

より正確には次のように述べられる：簡単のため G を連結半単純 Lie 群とする．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の放物型部分代数 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ で，次の 3 条件を満たすものを考える．

(1) $\mathfrak{q}$ は θ 不変，すなわち $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \oplus (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ となる．
(2) $\xi^\vee$ は $\mathfrak{q}$ の作用で保たれるような 1 次元部分空間をもつ．
(3) (2) の 1 次元部分空間への $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の作用は自明．

このような放物型部分代数に対して同値関係を

$$\mathfrak{q}_1 \sim \mathfrak{q}_2 \iff \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \text{ と } \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \text{ が } K \text{ の作用で共役}$$

で定める．すると (1),(2),(3) を満たす放物型部分代数の同値類と，少なくとも 1 つの n について $H^n(\mathfrak{g}, K; V \otimes F_\xi) \neq 0$ となるような既約でユニタリ化可能な $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V との間に一対一対応がある．実際 $\mathfrak{q}$ に対応する V は，(2) に現れる $\mathfrak{q}$ の指標から $\mathfrak{g}$ へのある種の誘導 (Zuckerman 関手) によって定義される．$\mathfrak{q}$ の指標を λ としたとき，この誘導表現はしばしば $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ と書かれ，Vogan–Zuckerman 加群，導来関手加群，コホモロジカル表現などとよばれる．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のランクと $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ のランクが等しくかつ $\mathfrak{q}$ が Borel 部分代数と同値なとき，対応する V は離散系列表現 (の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群) になる．

(1) を満たすような $\mathfrak{q}$ に対して，$L = N_G(\mathfrak{q})$ を $\mathfrak{q}$ の正規化部分群とすると L は G の簡約部分 Lie 群になる．また $\mathfrak{u}$ を $\mathfrak{q}$ の nilradical とすると，$\mathfrak{q} = \mathfrak{l}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{q}$ の Levi 分解になる．ここで $s = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ とおくと，任意の整数 n について同型

$$H^{n+s}(\mathfrak{g}, K; V \otimes F_\xi) \simeq H^n(\mathfrak{l}, L \cap K; \mathbb{C}_{\mathrm{triv.}})$$

がある．従って $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーの次元の計算は自明表現の場合に帰着される．$H^n(\mathfrak{l}, L \cap K; \mathbb{C}_{\mathrm{triv.}})$ の次元は，コンパクト型対称空間の Betti 数に等しい．

4 松島–村上の公式

Γ を G の離散部分群とする．商 $\Gamma\backslash G$ には G が右から作用しているので，$L^2(\Gamma\backslash G)$ は G のユニタリ表現になる．松島–村上の公式は，$\Gamma\backslash G/K$ のコホモロジーを $L^2(\Gamma\backslash G)$ の既約分解に現れる表現の $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーを使って記述する．

$\Gamma\backslash G$ がコンパクトのとき，$L^2(\Gamma\backslash G)$ は次のように既約分解される．

定理 4.1（[GGPS, Chapter I, § 2.3]） $\Gamma\backslash G$ をコンパクトとする．このとき G のユニタリ表現としての直和分解

$$L^2(\Gamma\backslash G) \simeq \sum\nolimits^{\oplus} \pi^{\oplus m(\pi)}, \qquad 0 \leq m(\pi) < \infty$$

がある．ここで，π は G の既約ユニタリ表現の同値類全体を走る．

定理は，G 上のコンパクト台をもつ連続関数はコンパクト作用素として $L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用するという一般的な議論から示される．実際 [GGPS] では，より一般に G を局所コンパクト Hausdorff な位相群としている．

$\Gamma\backslash G$ がコンパクトでないときは，$L^2(\Gamma\backslash G)$ の既約ユニタリ表現への分解は一般に連続スペクトルを含む．

(ξ, F_ξ) を G の既約有限次元表現，π を G の既約ユニタリ表現とする．Casimir 元 $C \in Z(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ は F_ξ および π_K にそれぞれスカラー λ_ξ，λ_π で作用するとする．

Γ はねじれ元をもたないとすると，Riemann 対称空間 $X = G/K$ への作用は自由になる．G の既約有限次元表現 (ξ, F_ξ) に対して，自明な局所系 $X \times F_\xi \to X$ の Γ による商をとって局所系 $\Gamma\backslash(X \times F_\xi) \to \Gamma\backslash X$ を定義する．これを $\mathcal{F}_\xi$ と書く．$\pi\colon X \to \Gamma\backslash X$ を商写像，$U \subset \Gamma\backslash X$ を開集合とすると，$\mathcal{F}_\xi(U)$ は $\pi^{-1}(U)$ 上の F_ξ に値をもつ Γ 同変な局所定数関数全体である．

定理 4.2（[Mat67], [MM63], [MM68], 松島–村上の公式） 上の仮定の下で，同型

$$H^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi) \simeq \bigoplus_{\substack{\pi \\ \lambda_\pi=\lambda_\xi}} \mathbb{C}^{m(\pi)} \otimes \mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C}, \pi_K \otimes F_\xi)$$

がある．ここで π は $\lambda_\pi = \lambda_\xi$ となるような既約ユニタリ表現の同値類全体を走る．

証明の概略 以下の議論の前半部分は [MM63]，後半部分は [MM68] にある．F_ξ が自明表現の場合は，[Mat67] で扱われている．

Hodge の定理より，左辺は $\Gamma\backslash X$ 上 $\mathcal{F}_\xi$ に値をもつ調和 n 形式の空間 $\mathcal{H}^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi)$ と同型である．

$\Gamma\backslash X$ 上の $\mathcal{F}_\xi$ に値をもつ C^∞ 関数は，X 上の F_ξ に値をもつ C^∞ 関数 f で $f(\gamma x) = \xi(\gamma)f(x)$ $(\gamma \in \Gamma)$ を満たすものと等しい．f を $G \to G/K = X$ で引き戻せば，これは

$$\{f \in C^\infty(G) \otimes F_\xi \mid f(gk) = f(g)\,(k \in K),\ f(\gamma g) = \xi(\gamma)f(g)\,(\gamma \in \Gamma)\}$$

と同一視される．さらに $f'(g) = \xi(g^{-1})f(g)$ と変換すると

$$\{f' \in C^\infty(G) \otimes F_\xi \mid f'(gk) = \xi(k^{-1})f'(g)\,(k \in K),\ f'(\gamma g) = f'(g)\,(\gamma \in \Gamma)\}$$

と同型であることがわかる．これはベクトル束 $\Gamma\backslash G \times_K F_\xi \to \Gamma\backslash X$ の切断とみなせる．

一方 X 上の n 形式は G 同変ベクトル束 $G \times_K \wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C}^\vee \to X$ の切断であるが，これを Γ で割れば $\Gamma\backslash X$ 上の n 形式は $\Gamma\backslash G \times_K \wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C}^\vee \to \Gamma\backslash X$ の切断とみなせる．従って $\Gamma\backslash X$ 上 $\mathcal{F}_\xi$ に値をもつ n 形式は，$\Gamma\backslash G \times_K (F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C}^\vee) \to \Gamma\backslash X$ の切断と同一視できる．$\Gamma\backslash G \times_K (F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C}^\vee)$ の切断の空間は $(C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C}^\vee)^K$ と表せる．

n 形式への Laplacian の作用は，上の同一視を追っていくと $f \in (C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C}^\vee)^K$ に対して

$$\Delta f = -(R(C) \otimes 1 \otimes 1)f + (1 \otimes \xi(C) \otimes 1)f$$

となることがわかる．ここで $R(C)$ は，$C^\infty(\Gamma\backslash G)$ への G の作用を微分して得られる $C \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ に対応する微分作用素である．また定義より $\xi(C) = \lambda_\xi$ であるから，

$$\mathcal{H}^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi) \simeq \{f \in (C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C}^\vee)^K \mid (R(C) \otimes 1 \otimes 1)f = \lambda_\xi f\}$$

となる．

定理 4.1 の分解により射影 $p_\pi\colon L^2(\Gamma\backslash G) \to \pi^{\oplus m(\pi)}$ があり，$f \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$ に対して $p_\pi(R(C)f) = \lambda_\pi p_\pi(f)$ が成り立つ．従って射影

$$p_\pi\colon (C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^\vee)^K \to (\pi^{\oplus m(\pi)} \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^\vee)^K$$

を考えると，調和形式 $f \in (C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^\vee)^K$ について，$\lambda_\pi \neq \lambda_\xi$ ならば $p_\pi(f) = 0$ である．よって $\bigoplus p_\pi$ で定まる写像

$$\mathcal{H}^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi) \to \bigoplus_{\substack{\pi \\ \lambda_\pi = \lambda_\xi}} (\pi^{\oplus m(\pi)} \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^\vee)^K$$

は単射である．

一方，既約ユニタリ表現 π が $L^2(\Gamma\backslash G)$ の部分表現であるとき，K 有限ベクトル $f \in \pi_K$ は $\Gamma\backslash G$ の楕円型微分作用素の解になることがわかり，特に C^∞ 級である．このことから $\lambda_\pi = \lambda_\xi$ となるような既約ユニタリ表現 π について，$(\pi^{\oplus m(\pi)} \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^\vee)^K$ の元が調和形式を定めることがわかる．同型

$$(\pi^{\oplus m(\pi)} \otimes F_\xi \otimes \wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^\vee)^K \simeq \mathbb{C}^{m(\pi)} \otimes \mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \pi_K \otimes F_\xi)$$

により定理が示される． □

注意 4.3 Γ がねじれ元をもつ場合，開集合 $U \subset \Gamma\backslash X$ に対して $\mathcal{F}_\xi(U)$ を $\pi^{-1}(U)$ 上の F_ξ に値をもつ Γ 同変な局所定数関数として層 $\mathcal{F}_\xi$ を定義すると，$\mathcal{F}_\xi$ が局所系になるとは限らないが定理は成立する ([MM63, I §6])．

ξ の反傾表現 $\xi^\vee$ の無限小指標と π_K の無限小指標をそれぞれ $\chi_{\xi^\vee}$ と χ_π で表す．定理 3.10，3.11 により，定理 4.2 の同型の右辺を書き換えることができて次が成り立つ．

定理 4.4（[BW00, Chapter VII, 6.1. Theorem]） 定理 4.2 の仮定の下で，同型

$$H^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi) \simeq \bigoplus_{\pi} \mathbb{C}^{m(\pi)} \otimes H^n(\mathfrak{g}, K; \pi_K \otimes F_\xi)$$

がある．ここで π は既約ユニタリ表現の同値類全体を走る．

定理 4.2 の証明の前半で $\mathcal{F}_\xi$ に値をもつ n 形式は $\mathrm{Hom}_K(\wedge^n \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes F_\xi)$ と同一視された．この空間は $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ をその K 有限ベクトルの空間 $C^\infty(\Gamma\backslash G)_K$

に置き換えても変わらない．この同一視により $\mathcal{F}_\xi$ に値をもつ de Rham 複体は，$V = C^\infty(\Gamma\backslash G)_K$ についての複体 (3.3) と一致する．従って

$$H^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi) \simeq H^n(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash G)_K)$$

が成り立つ．これを定理 4.1 の分解に応じて π 成分に分解すれば定理 4.4 が直接示される．ただし，分解

$$C^\infty(\Gamma\backslash G)_K \simeq \hat{\bigoplus_{\pi}} \pi_K^{\oplus m(\pi)}$$

の右辺は代数的直和でなく無限和も含まれている (K タイプを固定すると Hilbert 空間の直和になる) のでやや議論が必要である ([BW00] を参照).

注意 4.5　前節で見たように定理 4.4 の右辺に寄与する π はコホモロジカル表現とよばれる表現であり，分類されている．

注意 4.6　ここでは $\Gamma\backslash G$ がコンパクトの場合を扱った．非コンパクトの場合については [Bor06] にサーベイがある．

定理 4.2 の設定でさらに X が Hermite 型のとき $\Gamma\backslash X$ のコホモロジーに Hodge 分解がある：

$$H^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi).$$

また分解 $\mathfrak{p}_\mathbb{C} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ があるため，

$$\wedge^n \mathfrak{p}_\mathbb{C} \simeq \bigoplus_{p+q=n} \wedge^p \mathfrak{p}^+ \otimes \wedge^q \mathfrak{p}^-$$

により定理 4.2 の右辺も直和分解がある．さらに定理 3.11 の同型を介して $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーの分解

$$H^n(\mathfrak{g}, K; \pi_K \otimes F_\xi) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(\mathfrak{g}, K; \pi_K \otimes F_\xi)$$

がある．

定理 4.7（[MM63], [BW00, 6.2]） 定理 4.2 と定理 4.4 の同型は，bidegree (p,q) を保つ：

$$H^{p,q}(\Gamma\backslash X,\mathcal{F}_\xi)\simeq\bigoplus_{\substack{\pi\\ \lambda_\pi=\lambda_\xi}}\mathbb{C}^{m(\pi)}\otimes\mathrm{Hom}_K(\wedge^p\mathfrak{p}^+\otimes\wedge^q\mathfrak{p}^-,\pi_K\otimes F_\xi)$$
$$\simeq\bigoplus_{\pi}\mathbb{C}^{m(\pi)}\otimes H^{p,q}(\mathfrak{g},K;\pi_K\otimes F_\xi).$$

$q=0$ の場合，$H^{p,0}(\Gamma\backslash X,\mathcal{F}_\xi)$ は $\Gamma\backslash X$ 上の $\mathcal{F}_\xi$ に値をもつ正則 p 形式の空間と同型である ([MM65]).

最後に例として $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の場合を考える．G の部分群 P および P の指標 $\chi_{+,s},\chi_{-,s}(s\in\mathbb{C})$ を

$$P=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{R}^\times,b\in\mathbb{R}\right\},$$
$$\chi_{+,s}\colon\begin{pmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\mapsto|a|^s,\quad\chi_{-,s}\colon\begin{pmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\mapsto\mathrm{sgn}(a)|a|^s$$

と定義する．(2.1) で定義される G の表現 $I_{\pm,s}:=\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\pm,s})$ は G の主系列表現とよばれる．$I_{\pm,s}$ $(s\in\mathbb{C})$ のうち $I_{(-1)^{k+1},k}(k\in\mathbb{Z})$ は可約であり，その他は既約である．正の整数 k に対して $I_{(-1)^k,k-1}$ は 2 つの既約表現 $D_{+,k}$, $D_{-,k}$ を部分表現にもつ．$D_{+,k}$, $D_{-,k}$ は $k\geq 2$ のとき離散系列表現とよばれる．

G の既約ユニタリ表現 π は次のいずれかと同値であることが知られている．

(1) $\pi\simeq I_{+,s},I_{-,s}$ $(s\in i\mathbb{R})$, ユニタリ主系列表現.
(2) $\pi\simeq D_{+,k}$ (正則), $D_{-,k}$ (反正則), k は正の整数で，$k\geq 2$ のとき離散系列表現，$k=1$ のとき離散系列表現の極限.
(3) $\pi\simeq I_{+,s}$ $(0<s<1)$, 補系列表現.
(4) $\pi\simeq\mathrm{triv.}$, 自明表現.

より正確には，(1),(2),(3) の $I_{\pm,s}$, $D_{\pm,k}$ は上で定義した $I_{\pm,s}$, $D_{\pm,k}$ に G 不変な内積を入れて表現空間を完備化したものである．(1) と (2) が緩増加表現である．ξ を G の有限次元既約表現とするとき，$\pi_K\otimes F_\xi$ の $(\mathfrak{g},K)$ コホモロジーが消えないのは次のいずれかの場合のみである．

(a) $\pi\simeq D_{+,k}$ で ξ は $(k-1)$ 次元既約表現，$k\geq 2$.

(b) $\pi \simeq D_{-,k}$ で ξ は $(k-1)$ 次元既約表現，$k \geq 2$.

(c) π も ξ も自明表現.

それぞれの場合のコホモロジーの次元 (Hodge 数) $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(\mathfrak{g}, K; \pi_K \otimes F_\xi)$ は次のとおり.

$$\begin{array}{ccc} & h^{11} & \\ h^{10} & & h^{01} \\ & h^{00} & \end{array} = \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & 0 & \end{array} \quad \text{(a) の場合,} \qquad \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{array} \quad \text{(b) の場合,}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & & 0 \\ & 1 & \end{array} \quad \text{(c) の場合.}$$

ξ が $(k-1)$ 次元既約表現のとき，$H^{1,0}(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi)$ は重さ k の正則保型形式の空間と同型である．松島–村上の公式より，この空間の次元は $m(D_{+,k})$ で与えられる (Eichler–志村同型).

参考文献

[BB66] W. L. Baily, Jr., and A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math., **84** (1966), 442–528.

[Bor69] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1341, Hermann, Paris, 1969.

[Bor06] A. Borel, *Introduction to the cohomology of arithmetic groups*, Lie groups and automorphic forms, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 51–86.

[BJ06] A. Borel and L. Ji, *Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.

[BW00] A. Borel and N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[GGPS] I. M. Gel′fand, M. I. Graev, and I. Piatetski-Shapiro, *Representation theory and automorphic functions*, W. B. Saunders, Philadelphia, 1969.

[Mat67] Y. Matsushima, *A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry, **1** (1967), 99–109.

[MM63] Y. Matsushima and S. Murakami, *On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds*, Ann. of Math., **78** (1963), 365–416.

[MM65] Y. Matsushima and S. Murakami, *On certain cohomology groups attached to Hermitian symmetric spaces*, Osaka J. Math., **2** (1965), 1–35.

[MM68] Y. Matsushima and S. Murakami, *On certain cohomology groups attached to Hermitian symmetric spaces. II*, Osaka J. Math., **5** (1968), 223–241.

[Mil05] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 265–378.

[Sat60a] I. Satake, *On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces*, Ann. of Math., **72** (1960), 77–110.

[Sat60b] I. Satake, *On compactifications of the quotient spaces for arithmetically defined discontinuous groups*, Ann. of Math., **72** (1960), 555–580.

[Sat99] 佐武 一郎, コンパクト化の今昔, 数学, **51** (1999), 129–141.

[Wal88] N. Wallach, *Real reductive groups I*, Pure and Applied Mathematics, vol. 132, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.