# アーベル多様体の周期への応用

大下 達也 *

**概要**

本稿では，アーベル多様体に関する問題を「志村多様体上の族にのばして解決する」という手法の例として，Gross による「Chowla–Selberg 公式の別証明および一般化」と，Deligne による「アーベル多様体の Hodge サイクルが絶対 Hodge サイクルになることの証明」という 2 つの話題を解説する．

## 1 序

本稿は 2015 年度整数論サマースクール「志村多様体とその応用」での筆者の講演「アーベル多様体の周期への応用」に関する報告記事である．当講演では，志村多様体の理論の周期の研究への応用の例として，Gross による Chowla–Selberg 公式の別証明と一般化 [Gro78] を紹介した．また，関連する話題として，Deligne による「アーベル多様体の Hodge サイクルは絶対 Hodge サイクルである」という定理の紹介も行った．この 2 つの結果の証明の中には，**「考察対象を（アーベル多様体をパラメータ付けしている）Hodge 型の志村多様体上の族にのばして問題を解決する」**という共通のアイデアがある[*1]．本稿の主目的は，「志村多様体がどのように使われているか」を意識しつつ，サマースクールの講演で紹介した Gross と Deligne の結果を，講演当時説明しきれなかった内容の補足も含めて解説することである．

以下では，本稿で解説する Gross [Gro78] と Deligne [DMOS82, Chapter I] の結果がそれぞれどのようなものであるかについて，簡単に触れておこう．

Chowla–Selberg 公式は，虚数乗法を持つ楕円曲線の周期をガンマ関数の特殊値を

---

* 慶應義塾大学理工学部数理科学科　e-mail: `ohshita@math.keio.ac.jp`

[*1] Hodge 型の志村多様体は，その定義から Siegel モジュラー多様体に埋め込まれる．その埋め込みを通して普遍アーベル多様体を引き戻すことで，Hodge 型の志村多様体をアーベルスキームの底空間と見做せる．

用いて記述する公式である．この公式は最初，19 世紀末に Lerch [Ler97] によって発見された後，Chowla と Selberg [CS67] により再発見され，更に Gross [Gro78] により別証明とアーベル多様体への一般化がなされた．Chowla と Selberg によるこの公式の証明は，Kronecker の極限公式を用いる解析的なものである．一方，本稿で解説する Gross の証明では数論幾何的な道具立て，特に（連結）志村多様体を用いる．ここでは説明の詳細は省くが，Gross による証明の鍵となるのは，**「周期を計算するための微分形式を志村多様体上の≪平らな≫[*2]族にのばして，ある特別な点での計算結果を族全体に波及させる」**というアイデアである．

Hodge サイクルや絶対 Hodge サイクルは代数的サイクルに関する Hodge の予想に由来する概念である．Hodge は，「$X$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影的代数多様体とするとき，$H^{2p}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\cap H^{p,p}(X/\mathbb{C})$ の元は必ず代数的サイクルから来るだろう」という予想（Hodge 予想）を提唱した．大雑把に説明すると，$H^{2p}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\cap H^{p,p}(X/\mathbb{C})$ の元を Hodge サイクルといい，より強い「代数的サイクルから来る元に見られる顕著な条件」を満たすコホモロジー類を絶対 Hodge サイクルという．定義から，絶対 Hodge サイクルは Hodge サイクルであるが，逆が成り立つかどうかは先験的には分からない．しかし，もし Hodge 予想が正しいとするならば，全ての Hodge サイクルは代数的サイクルから来るはずなので，必ず絶対 Hodge サイクルになるはずである．このように，Hodge 予想よりも弱い形の予想として，「Hodge サイクルは絶対 Hodge サイクルである」という予想がある．本稿で紹介する Deligne の結果 [DMOS82, Chapter I] は「アーベル多様体の場合にはこの予想が正しい」というものである．

既に言及したように，本稿で紹介する [Gro78] と [DMOS82, Chapter I] の議論は，志村多様体を用いる部分のアイデアに関しては，**非常によく似ている**．実際，Deligne の結果でも，**「Hodge サイクルを志村多様体上の≪平らな≫族にのばし，その族が特別な点では絶対 Hodge サイクルになっていることを示して，その結果を族全体に波及させる」**という証明の方針が採られている．

尚，Deligne による「アーベル多様体の Hodge サイクルは絶対 Hodge サイクルである」という定理は，極めて示唆に富む結果であり，様々な重要な応用が知られている．例えば，**「志村多様体の整正準モデルの構成」**にもこの定理が用いられている．（清水氏の稿 [清水] と松本氏の稿 [松本] 参照．）また，本稿でも少しだけ触れるが，こ

---

[*2] ここでは詳細は述べないが，この≪平らな≫という言葉は正確には，「Gauss–Manin 接続について水平な」という意味である．

の Deligne の定理はアーベル多様体の周期の計算にも応用できる．

**注意 1.1** Gross による論説 [Gro18] では，Gross が論文 [Gro78] を執筆した当時のことを振り返り，詳しく説明している．その中で，Gross が自分の結果を Deligne に話したときの様子についても言及されているのだが，そのやりとりも顛末も非常に面白い．是非 [Gro18] を読んで頂きたい．

本稿は第 2 節で Gross の結果を紹介し，第 3 節で Deligne の結果を紹介する．更に，本稿では 3 つの付録を設けている．最初の 2 つの付録，すなわち付録 A と付録 B は初学者向けのものであり，それぞれ de Rham コホモロジーと Gauss–Manin 接続について，本稿を読むために必要な基本事項を（断片的にではあるが）まとめている．必要に応じて，適宜参照して頂きたい．付録 C は Gross の結果 [Gro78]（と Rohrlich による付録 [Roh78]）の証明に関して第 2 節で省略した部分に関する補足を行っている．

## 記号

$L$ を $\mathbb{C}$ の部分体とし，$X$ を $L$ 上の固有かつ滑らかな代数多様体とする．本稿では以下の記号を採用する．

- $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を固定する．埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定することで，$\overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{C}$ の部分体と見做す．
- 虚数単位を $i$ と書いたり $\sqrt{-1}$ と書いたりしているが，それらは $\mathbb{C}$ の同一の元である．複素数 $z \in \mathbb{C}$ の複素共役を $\bar{z}$ または $\tau(z)$ で表す．（記号 $\tau$ は「複素共役」以外の意味では使わない．）$V$ を $\mathbb{C}$ ベクトル空間とするとき，$V$ に「スカラー $z \in \mathbb{C}$ の作用を $\bar{z}$ 倍写像で定める」という新しい $\mathbb{C}$ ベクトル空間構造を入れたものを $\overline{V} := (\mathbb{C}, \tau) \otimes_{\mathbb{C}} V$ と書く．
- $L = \mathbb{C}$ とする．このとき，$X$ に対応する複素解析的多様体を $X_{\mathrm{an}}$ と書く．$\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群とするとき，$\mathcal{F}$ に対応する $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}$ 加群を $\mathcal{F}_{\mathrm{an}}$ と書く．非負整数 $n$ に対して，$X_{\mathrm{an}}$ の（$\mathbb{C}$ 係数の）解析的な $n$ 次 de Rham コホモロジー群を $H^n_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}})$ と書く．$H^n_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}})$ には微分形式への複素共役の作用

$$f dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n \longmapsto \bar{f} d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_n$$

から誘導される複素共役の作用

$$\tau\colon H^n_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}}) \longrightarrow H^n_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}});\ v \longmapsto \bar{v}$$

が定まっている．

- $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $r \in \mathbb{Z}$ に対して，$H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(r) := (2\pi i)^r H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ と定める．ここで，$H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ は複素解析的な位相に関する $X(\mathbb{C})$ の（すなわち複素解析的多様体 $X_{\mathbb{C},\mathrm{an}} := (X \otimes_L \mathbb{C})_{\mathrm{an}}$ の）$\mathbb{Q}$ 係数 $n$ 次特異コホモロジー群である．
- $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$X$ の代数的な $n$ 次 de Rham コホモロジー群を $H^n_{\mathrm{dR}}(X/L)$ と書き，Hodge フィルトレーションを $F^\bullet H^n_{\mathrm{dR}}(X/L)$ と書く．各 $r \in \mathbb{Z}$ に対して，フィルター付き $L$ ベクトル空間 $L(r) = (L, F^\bullet L(r))$ を

$$F^p L(r) := \begin{cases} L & (p \leq r) \\ 0 & (p > r). \end{cases}$$

で定め，フィルター付き $L$ ベクトル空間のテンソル積により

$$H^n_{\mathrm{dR}}(X/L)(r) := H^n_{\mathrm{dR}}(X/L) \otimes_L L(r)$$

と定める．定義より，$H^n_{\mathrm{dR}}(X/L)(r)$ は $L$ ベクトル空間 $H^n_{\mathrm{dR}}(X/L)$ に新しいフィルトレーション $F^\bullet H^n_{\mathrm{dR}}(X/L)(r) := F^{\bullet+r} H^n_{\mathrm{dR}}(X/L)$ を入れたフィルター付き $L$ ベクトル空間である．$L = \mathbb{C}$ のとき，代数的 de Rham コホモロジーと解析的 de Rham コホモロジーの自然な同型と de Rham の定理により，自然な同型写像 $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$ が存在する．この写像により，各 $r$ に対して同型 $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(r) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(r)$ が誘導される．ここで，（定義より明らかに）次の図式は**可換ではない**ことに注意せよ:

$$\begin{tikzcd} H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[r, "\times (2\pi i)^r"] \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[dr, phantom, "\not\circlearrowleft"] & H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(r) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[d, "\simeq"] \\ H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}) \arrow[r, equal] & H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(r). \end{tikzcd}$$

また，$H^n(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ への複素共役の作用を $v\otimes z\longmapsto v\otimes\bar{z}$ で定めると，de Rham の定理による同型

$$H^n(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\simeq H^n_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}})$$

は複素共役を保つことにも注意せよ．

- $L=\mathbb{C}$ かつ $X$ が射影的であるとする．このとき，$X$ の射影空間への埋め込みから $X_{\mathrm{an}}$ に Kähler 計量が定まる．$n$ を非負整数，$p,q$ を $p+q=n$ を満たす非負整数とする．$(p,q)$ 調和形式の類のなす $H^n_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}})$ の $\mathbb{C}$ 部分空間を $H^{p,q}(X)$ と書く．（本稿では，自然な同型 $H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})\simeq H^n_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}})$ を通して代数的 de Rham コホモロジーと解析的 de Rham コホモロジーを同一視して，$H^{p,q}(X)$ を $H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$ 部分空間と見做す．）定義より，

$$\tau(H^{p,q}(X)):=\{\bar{v}\mid v\in H^{p,q}(X)\}=H^{q,p}(X)$$

が成立する．また，付録 A，特に A.1 節と A.2 節で詳しく述べるように，de Rham コホモロジーには Hodge 分解と呼ばれる次の直和分解

$$F^pH^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})=\bigoplus_{i\geq p}H^{i,n-i}(X)$$

が成立する．注意 A.11 でも述べるように Hodge 分解は $X$ の Kähler 計量 (特に射影空間への埋め込み）の取り方に依らない．
- $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $r\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$H^n_{\text{ét}}(X,\mathbb{A}_f(r)):=\left(\varprojlim_{N\in\mathbb{Z}_{>0}}R^n\Gamma(X,(\boldsymbol{\mu}_N)^{\otimes r})\right)\otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}}\mathbb{A}_f$$

と定める．ここで，$\boldsymbol{\mu}_N=\boldsymbol{\mu}_{N,X}$ は 1 の $N$ 乗根のなす $X$ 上のエタール位相に関する層であり，$r\leq 0$ の場合は

$$(\boldsymbol{\mu}_N)^{\otimes r}:=\begin{cases}\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\ (\text{定数層}) & (r=0)\\ \mathrm{Hom}\left((\boldsymbol{\mu}_N)^{\otimes(-r)},\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right) & (r<0)\end{cases}$$

と定めた．$r=0$ のときは，$H^n_{\text{ét}}(X,\mathbb{A}_f):=H^n_{\text{ét}}(X,\mathbb{A}_f(0))$ と書く．$L$ が代数閉体のときは，定義より $\mathbb{A}_f(r):=\left(\varprojlim_N(\boldsymbol{\mu}_{N,L})^{\otimes r})(L)\right)\otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}}\mathbb{A}_f$ と定めると，

$$H^n_{\text{ét}}(X,\mathbb{A}_f(r))=H^n_{\text{ét}}(X,\mathbb{A}_f)\otimes_{\mathbb{A}_f}\mathbb{A}_f(r)=:H^n_{\text{ét}}(X,\mathbb{A}_f)(r)$$

となる．$L = \mathbb{C}$ のとき，エタールコホモロジーと Betti コホモロジーの比較同型定理 ([SGA4, Exposé XI, XVI]) により，自然な同型写像

$$H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \xrightarrow{\simeq} H^n_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f)$$

が存在する．埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ により，$\mathbb{A}_f$ 加群 $\mathbb{A}_f(1)$ の基底 $(e^{2\pi i/N})_N$ が定まる．これと $2\pi i$ を対応させることで，各 $r \in \mathbb{Z}$ に対して比較同型写像 $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(r) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} H^n_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f(r))$ が定義される．

## 謝辞

2015 年度整数論サマースクールを企画・運営してくださった三枝 洋一氏，伊藤 哲史氏，千田 雅隆氏に心より感謝の意を申し上げます．また，本稿執筆にあたり大変有益なコメントをくださった清水 康司氏，千田 雅隆氏に厚くお礼申し上げます．

# 目次

# 2 志村多様体と Chowla–Selberg 公式

本節では，Gross [Gro78] による Chowla–Selberg 公式の別証明及び拡張について解説する．§2.1 で主定理の主張と証明の方針を述べ，残りの 2 小節, §2.2 及び 2.3 でそれを証明する．

## 2.1 Chowla-Selberg 公式とその一般化

$k \subseteq \overline{\mathbb{Q}}\,(\subseteq \mathbb{C})$ を判別式 $-d$ の虚二次体とし，$k$ の整環 $\mathfrak{o}$ を 1 つ固定する．2 つの指標 $\chi, \bar{\chi}\colon k^\times \longrightarrow k^\times \subseteq \mathbb{C}$ をそれぞれ $\chi := \mathrm{id}_{k^\times}$ 及び $\bar{\chi} := \tau|_{k^\times}$ で定める．

$p, q$ を $n := p + q > 0$ を満たす非負整数とする．$F$ を $\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}}$ の中間体とするとき，本稿では，次の条件[*3] (QM1)–(QM3) を満たす組 $(A, \Phi)$ を $(p, q)$ **型の** $\mathfrak{o}$ **乗法を持つ** $F$ **上のアーベル多様体**と呼ぶ:

(QM1) $A$ は $F$ 上の $n$ 次元アーベル多様体である．

(QM2) $\Phi\colon \mathfrak{o} \hookrightarrow \mathrm{End}(A)$ は単射環準同型である．すなわち，アーベル多様体 $A$ は環 $\mathfrak{o}$ の作用 $\Phi$ を持つ．

(QM3) 作用 $\Phi$ から，乗法群 $k^\times$ の Lie 環 $\mathrm{Lie}(A/F)$ への作用が誘導されることに注意する．この作用を通して $\mathrm{Lie}(A/F)$ を $F[k^\times]$ 加群と見做すとき，

$$\mathrm{Lie}(A/F) = F(\chi)^{\oplus p} \oplus F(\bar{\chi})^{\oplus q}$$

が成立する．ただし，各指標 $\psi \in \mathrm{Hom}(k^\times, F^\times)$ に対して，群 $k^\times$ が $\psi$ を通して作用する 1 次元 $F$ ベクトル空間を $F(\psi)$ と書く．

**注意 2.1** 本稿では，アーベル多様体 $A$ の自己準同型環 $\mathrm{End}(A)$ が $\mathfrak{o}$ と同型な場合だけでなく，$\mathrm{End}(A)$ が $\mathfrak{o}$ と同型な真の部分環を持つ場合も「アーベル多様体 $A$ が $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ」と書くことに注意する．一方，本稿でも「CM アーベル多様体」という用語は越川氏の稿 [越川] の意味で用いる．すなわち，$A$ が CM アーベル多様体であれば，$\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は CM 体と同型である．

$(A, \Phi)$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の $(p, q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $n$ 次元アーベル多様体とする．本節の主

[*3] QM は，通常の意味での虚数乗法 (complex multiplication, CM) と区別するために便宜上，本稿で勝手に用意した造語 quadratic multiplication の頭文字である．

定理の主張を述べるために，ここで扱う「$A$ の周期」を定義しよう．$A$ の $\mathfrak{o}$ 乗法 $\Phi$ から誘導される $A$ のホモロジー群やコホモロジー群への $k^\times$ の作用も $\Phi$ で表すことにする．$r$ を任意の非負整数とし，$\eta \in H^r_{\mathrm{dR}}(A_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ と $\gamma \in H_r(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ を任意の元とする．このとき，任意の $a \in k^\times$ に対して，

$$\int_{\Phi(a)_*\gamma} \eta = \int_\gamma \Phi(a)^*\eta \tag{2.1}$$

が成立する．これに注意すると，条件 (QM3) と $H^1_{\mathrm{dR}}(A_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ の Hodge 分解から $\mathbb{C}[k^\times]$ 加群の直和分解

$$\begin{aligned} H^1_{\mathrm{dR}}(A_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) &= H^{1,0}(A_{\mathbb{C}}) \oplus H^{0,1}(A_{\mathbb{C}}) \\ &= \left(\mathbb{C}(\chi)^{\oplus p} \oplus \mathbb{C}(\bar{\chi})^{\oplus q}\right) \oplus \left(\mathbb{C}(\bar{\chi})^{\oplus p} \oplus \mathbb{C}(\chi)^{\oplus q}\right) \end{aligned}$$

が得られる．従って，各指標 $\rho\colon k^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して，群 $k^\times$ が指標 $\rho$ で作用する $H^n_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})$ の最大の $\mathbb{C}$ 部分空間を $H^n_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})_\rho$ とおくと，次が成立する．

(1) $H^n_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})_{\chi^n}$ と $H^n_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})_{\bar{\chi}^n}$ は 1 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間である．
(2) $H^n_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})_{\chi^n} \subseteq H^{p,q}(A_{\mathbb{C}})$ および $H^n_{\mathrm{dR}}(A/\mathbb{C})_{\bar{\chi}^n} \subseteq H^{q,p}(A_{\mathbb{C}})$ が成り立つ．

(1) より，$\overline{\mathbb{Q}}[k^\times]$ 加群 $H^n_{\mathrm{dR}}(A/\overline{\mathbb{Q}})$ における $\overline{\mathbb{Q}}(\chi^n)$ 及び $\overline{\mathbb{Q}}(\bar{\chi}^n)$ の重複度がともに 1 であることが分かる．また，(2.1) より，$k[k^\times]$ 加群 $H_n(A(\mathbb{C}), k)$ が $k(\chi^n)$ と $k(\bar{\chi}^n)$ を重複度 1 で含むことも分かる．以上の議論により，次の補題が直ちに得られる．

**補題 2.2**　次が成立する．

(1) ある 0 でない 2 元 $\omega_A, \nu_A \in H^n_{\mathrm{dR}}(A/\overline{\mathbb{Q}})$ が存在して，任意の $a \in k^\times$ に対して，$\Phi(a)\omega_A = \chi^n(a)\omega_A$ 及び $\Phi(a)\nu_A = \chi^n(a)\nu_A$ が成り立つ．$\omega_A$ と $\nu_A$ は $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ 倍の差異を除いて一意的である．
(2) $\omega_A \in H^{p,q}(A_{\mathbb{C}})$ 及び $\nu_A \in H^{q,p}(A_{\mathbb{C}})$ が成立する．
(3) $\eta$ を $\omega_A$ または $\nu_A$ とするとき，ある $P(\eta) \in \mathbb{C}^\times$ が存在して，

$$k\left\{\int_\gamma \eta \,\middle|\, \gamma \in H_n(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right\} = P(\eta)k \ (\subseteq \mathbb{C})$$

が成立する．この $P(\eta)$ の値は $k^\times$ 倍の差異を除いて一意的である．（本稿では $P(\eta)$ を $\eta$ の**周期**と呼ぶ．）

$\omega = \omega_A$ と $\nu = \nu_A$ を補題 2.2 の元とする．補題 2.2 (1) より，$\omega$ と $\nu$ の取り方を変えても，補題 2.2 (3) の周期 $P(\omega)$ 及び $P(\nu)$ の値は $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ 倍の差異を除けば一意的であることに注意する．このような「$\overline{\mathbb{Q}}^\times$ 倍の差異を除けば一意的である」という状況を簡単に表記するために，次の記号を導入する．

**定義 2.3** 以下では，$a, b \in \mathbb{C}^\times$ に対して，$ab^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ が成り立つとき，$a \sim b$ と書く．二項関係 $\sim$ は $\mathbb{C}^\times$ に於ける同値関係をなす．

次が本節の主定理である．

**定理 2.4（Gross [Gro78]）** $p, q$ を $n := p + q > 0$ を満たす任意の非負整数とし，$(A, \Phi)$ を $(p, q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の任意のアーベル多様体とする．$\omega, \nu \in H^n_{\mathrm{dR}}(A/\overline{\mathbb{Q}})$ をそれぞれ，$\Phi$ から誘導される $k^\times$ の作用に関する指標 $\chi^n$, $\bar{\chi}^n$ の固有ベクトルとする．このとき，

$$P(\omega) \sim b_k^p (2\pi i/b_k)^q,$$
$$P(\nu) \sim b_k^q (2\pi i/b_k)^p$$

が成立する．ここで，

$$b_k := \sqrt{\pi} \prod_{a=1}^{d} \Gamma(a/d)^{\varepsilon(a)w/4h}$$

である．ただし，記号は以下のとおりである:

- $\varepsilon$: $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \{\pm 1\}$ は 2 次拡大 $k/\mathbb{Q}$ に対応する 2 次指標である．
- $w$ は虚 2 次体 $k$ の単数群の位数である．
- $h$ は虚 2 次体 $k$ の類数である．

**注意 2.5** Chowla と Selberg の論文 [CS67] で証明されたオリジナルの Chowla–Selberg 公式は，

$$\prod_{[\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_k)} \Delta(\mathfrak{a})\Delta(\mathfrak{a}^{-1}) = (2\pi/d)^{12h} \prod_{a=1}^{d} \Gamma(a/d)^{6\varepsilon(a)w} \tag{2.2}$$

という等式である．ここで，$\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_k)$ は $\mathcal{O}_k$ のイデアル類群であり，$\Delta$ は Ramanujan のデルタである．等式 (2.2) は「$A$ が $\mathcal{O}_k$ 乗法を持つ CM 楕円曲線の場合の定理 2.4 の主張」よりも精密な公式である．実際，公式 (2.2) の左辺は $\mathcal{O}_k$ 乗法を持つ CM 楕

円曲線の周期で書き直すことが出来，等号 $=$ を $\sim$ に緩めると定理 2.4 の主張が得られるような（$\sim$ ではなく $=$ で書かれた）精密な等式が得られる[*4]．金子氏の研究 [Kan90] および中島氏と田口氏の研究 [NT91] により，等式 (2.2) のような $\sim$ ではなく $=$ の精度で書かれた公式は，虚二次体の（整数環とは限らない）整環による作用を持つ楕円曲線の場合に一般化されている．

**注意 2.6**　Chowla と Selberg による公式 (2.2) の証明の方針は「$k$ の Dedekind ゼータ関数の $s=0$ に於ける対数微分を 2 通りの方法で計算して比較する」というものである．1 つ目の方法は Kronecker の極限公式を用いるもので，この計算により公式の左辺が出てくる．2 つ目の方法は Lerch の展開公式を用いるもので，これにより公式の右辺が得られる．（この証明は Gross の論説 [Gro18] でも説明されている．）

本節では，以下の方針で定理 2.4 を証明する．

**第 1 段階**

$\omega$ と $\nu$ をアーベル多様体 $A$ を含む,「ある種の PEL 構造を持つようなアーベル多様体」のモジュライ空間 $S$（連結志村多様体）上にのばす．

**第 2 段階**

$p \neq q$ のとき，任意の 2 点 $x, y \in S$ に対して,「点 $x$ に対応するアーベル多様体について定理 2.4 の主張が成り立つことと，点 $y$ に対応するアーベル多様体について定理 2.4 の主張が成り立つことが同値である」ということを示す．（$p=q$ の場合は個別に示す．）

**第 3 段階**

ある $p \neq q$ に対して，$(p,q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つアーベル多様体 $A_0$ で，定理 2.4 の主張が成り立つものが存在することを示す．

**第 4 段階**

$S$ の中に必ず「CM 楕円曲線の直積」に対応する点があることを示す．

「第 3 段階」と「第 4 段階」の主張が示されると,「第 2 段階」の主張を用いて

あるアーベル多様体 $A_0 \Longrightarrow$ CM 楕円曲線 $\Longrightarrow$ 任意の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つアーベル多様体

[*4] 例えば Gross の論説 [Gro18] では，特別な虚二次体 $k$ の場合に，どのようにして等式 (2.2) から定理 2.4 の主張を導けるかが説明されている．

という順で定理 2.4 の主張が証明できる[*5]．本稿では第 2.2 小節で「第 1 段階」と「第 2 段階」の主張，第 2.3 小節で「第 4 段階」の主張の証明を行う．第 3 段階の主張の証明は「志村多様体の応用」という話題からは逸れるので，本稿末尾の付録 C にまわす．

## 2.2 普遍族の周期

本小節では，定理 2.4 の証明の「第 1 段階」と「第 2 段階」について論じる．本小節でも引き続き，$k$ を判別式 $-d$ の虚二次体とし，$k$ の整環 $\mathfrak{o}$ を固定する．$n := p+q > 0$ なる非負整数 $p, q$ をとる．$V$ を $n$ 次元 $k$ ベクトル空間とし，$L$ を $V$ の $\mathfrak{o}$ 安定な $\mathbb{Z}$ 格子とする．$L$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ を固定する．以下の 2 条件を満たす非退化歪 Hermite 形式 $H\colon V \times V \longrightarrow k$ を 1 つ固定する:

(1) $H(L, L) \subseteq \mathcal{O}_k$ が成立する．
(2) $\mathbb{C}$ $(= k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上の Hermite 形式 $H' := \sqrt{-d}^{-1} H$ の符号が $(p, q)$ になる．

固定した埋め込み $k \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ を用いて，$k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{C}$ と見做す．これにより，$V_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間と見做せる．$V_{\mathbb{R}}$ の $p$ 次元部分 $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $U_0$ であって，Hermite 形式 $H'$ の $U_0$ への制限が正定値となるものを 1 つ固定する．

**注意 2.7（Hodge 構造）** 上で固定した $(L, H, U_0)$ から，次のようにして，重さ $-1$ の偏極付き Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, H^{-1,0} \oplus H^{0,-1}, E)$ ([石塚, 定義 2.10，定義 2.16，練習 2.20]) が定まる．$H'$ に関する $U_0$ の直交補空間を $U_0^{\perp}$ と書き，$\overline{U_0}^{\perp} := (\mathbb{C}, \tau) \otimes_{\mathbb{C}} U_0^{\perp}$ と定める．$\mathbb{C}$ ベクトル空間 $V_{U_0}$ を $V_{U_0} := U_0 \oplus \overline{U_0}^{\perp}$ で定義する．このとき，$V_{U_0}$ は $V_{\mathbb{R}}$ に（元々定まっている $\mathbb{C} = k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 作用とは異なる）新しい $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造を入れたものと見做せる．また，$H'$ は $V_{U_0}$ 上の Hermite 形式とも見做せることにも注意する．$\overline{V}_{U_0} := (\mathbb{C}, \tau) \otimes_{\mathbb{C}} V_{U_0}$ と定め，各 $v \in V_{U_0}$ に対して $\bar{v} := 1 \otimes v \in \overline{V}_{U_0}$ と書く．定義より，写像 $V_{U_0} \longrightarrow \overline{V}_{U_0};\ v \longmapsto \bar{v}$ は $\mathbb{C}$ 反線型同型である．$\mathbb{Z}$ 加群 $L_{U_0}$ を

$$L_{U_0} := \{(x, \bar{x}) \in V_{U_0} \oplus \overline{V}_{U_0} \mid x \in L\}$$

[*5] 定理 2.4 の証明で用いる連結志村多様体 $S$ は 1 つではない．考えているアーベル多様体に対応する点を含む志村多様体の中に，必ずしも第 3 段階のアーベル多様体 $A_0$ に対応する点が含まれているとは限らないので，第 4 段階の議論も必要になるのである．

で定める．このとき，自然な同型 $L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}\simeq V_{U_0}\oplus\overline{V}_{U_0}$ が成立し，

$$(H_{\mathbb{Z}}, H^{-1,0}\oplus H^{0,-1}) := (L_{U_0}, V_{U_0}\oplus\overline{V}_{U_0})$$

は重さ $-1$ の Hodge 構造になる．Hermite 形式 $H'$ は $U_0$ 上で正定値，$U_0^{\perp}$ 上で負定値なので，新しい $\mathbb{C}$ 構造を入れた $V_{U_0}$ の上では正定値になる．これに注意すると，$L$ 上の交代形式 $E:=\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{Q}}\circ H$ は，$V_{U_0}$ の $\mathbb{C}$ 構造による $\sqrt{-1}$ の作用 $J\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ に関して Riemann の関係式，すなわち [石塚, 補題 2.19] の条件 (1)–(4) を満たすことが分かる．従って，Riemann 形式 $E$ は Hodge 構造 $(L_{U_0}, V_{U_0}\oplus\overline{V}_{U_0})$ の偏極を定める．（石塚氏の稿 [石塚, 練習 2.20] 参照．）

歪 Hermite 形式 $H$ を保つ元全体のなす $\mathrm{SL}(V_{\mathbb{R}};\mathbb{C})$ の部分群を $G_{\mathbb{R}}=\mathrm{SU}(V_{\mathbb{R}},H)$ $(=\mathrm{SU}(p,q))$ と書き，$G_{\mathbb{R}}$ の部分群 $G_L$ を

$$G_L := \{g\in G_{\mathbb{R}} \mid g(L)=L\}$$

により定める．各正整数 $N$ に対して，$G_L$ の部分群 $G_{L,N}$ を

$$G_{L,N} := \mathrm{Ker}\left(G_L \xrightarrow{\text{法 } N \text{ 写像}} \mathrm{SL}(L/NL;\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\right)$$

で定める．$\mathcal{B}_N := \{N^{-1}v_1,\cdots,N^{-1}v_{2n}\}$ とおくと，定義より

$$G_{L,N} = \{\gamma\in G_L \mid (1-\gamma)\mathcal{B}_N\subseteq L\}$$

が成り立つ．また，$N\geq 3$ のとき，$G_{L,N}$ は非自明な有限位数の元を持たない．

$K:=\{g\in G_{\mathbb{R}} \mid gU_0=U_0\}$ とおき，$X^+ := G_{\mathbb{R}}/K$ と定める．このとき，$K$ は $(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q))\cap\mathrm{SU}(p,q)$ と同型な $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群であり，$X$ は I 型 Hermite 対称空間 ([阿部, §3.4]) である．$K$ の取り方から，全単射

$$X^+ \xrightarrow{\simeq} \left\{U \;\middle|\; \begin{array}{l} U \text{ は } V_{\mathbb{R}} \text{ の } p \text{ 次元部分 } \mathbb{C} \text{ ベクトル空間で，} \\ \text{双線型形式 } H' \text{ は } U \text{ 上正定値} \end{array}\right\};\ gK\longmapsto gU_0$$

が得られる．（この全単射の構成については，[阿部, §4.5] も参照せよ．以下では，この全単射を通して両者を同一視する．）

点 $U\in X^+$ が任意に与えられているとする．このとき，注意 2.7 と同様にして，$U$ を用いて $V_{\mathbb{R}}$ に新しい $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造 $V_U := U\oplus\overline{U}^{\perp}$ を入れることで，偏極付き Hodge 構造 $(L_U, V_U\oplus\overline{V}_U, E)$ を定めることが出来る．格子 $L$ の（元々入って

いた）$\mathfrak{o}$ 加群構造と，圏同値

$$\begin{aligned}\{\mathbb{C}\text{ 上のアーベル多様体}\} &\longleftrightarrow \{\text{ 重さ }-1\text{ の偏極付け可能な Hodge 構造}\}\\ A &\longmapsto H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})\end{aligned}$$

([石塚, 定理 2.22]) により，複素トーラス $A_U := V_U/L$ は $\mathbb{C}$ 上定義された $(p,q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ偏極アーベル多様体となる．このような $A_U$ たちに入る偏極構造 (Polarization), $\mathfrak{o}$ 作用 (Endomorphism), レベル構造 (Level) という 3 つの構造を纏めた，次の概念を導入する．

**定義 2.8（アーベル多様体の PEL 構造）** $F$ を $\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}}$ の中間体とする．

(1) 本稿では，次を満たす 3 つ組 $(A,\lambda,\Phi,\{x_i\}_{i=1}^{2n})$ を $F$ **上の** $(L,H,\mathcal{B}_N)$ **型の PEL 構造を持つアーベル多様体**と呼ぶ．
   (i) $(A,\Phi)$ は $(p,q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $F$ 上のアーベル多様体である．
   (ii) $\lambda\colon A \xrightarrow{\simeq} A^\vee$ は $A$ の偏極である．
   (iii) $H_\lambda\colon H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})\times H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{O}_k$ を偏極 $\lambda$ から定まる歪 Hermite 形式とする．このとき，$\mathfrak{o}$ 加群の同型 $f\colon L \xrightarrow{\simeq} H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ で次を満たすものが存在する．
      (a) 任意の $u,v\in L$ に対して $H(u,v)=H_\lambda(f(u),f(v))$ が成り立つ．
      (b) 各 $i$ に対して，$x_i$ は $A(F)$ の $N$ ねじれ点であり，自然な同型による $A(\mathbb{C})=\mathrm{Lie}(A_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})/H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ という同一視のもとで，

$$x_i = N^{-1}f(v_i) \mod H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$$

      が成り立つ．

(2) $(A,\lambda,\Phi,\{x_i\}_{i=1}^{2n})$ と $(A',\lambda',\Phi',\{x'_i\}_{i=1}^{2n})$ を $F$ 上の 2 つの $(L,H,\mathcal{B}_N)$ 型の PEL 構造を持つアーベル多様体とする．環 $\mathfrak{o}$ の作用を保つ偏極アーベル多様体の同型写像 $h\colon A\longrightarrow A'$ が存在して，各 $i$ について $h(x_i)=x'_i$ が成立するとき，$(A,\lambda,\Phi,\{x_i\}_{i=1}^{2n})$ と $(A',\lambda',\Phi',\{x'_i\}_{i=1}^{2n})$ は同型であるという．
(3) 本稿では，$F$ 上の $(L,H,\mathcal{B}_N)$ 型の PEL 構造を持つアーベル多様体の同型類全体の集合を $\mathrm{PEL}(L,H,\mathcal{B}_N)_F$ と書くことにする．

**注意 2.9** 定義 2.8 で述べた「$F$ 上の $(L,H,\mathcal{B}_N)$ 型の PEL 構造」は志村の論文 [Shi66] で定義されている「アーベル多様体の PEL 構造」の特別な場合である．この「アーベル多様体の PEL 構造」という概念は，現在の**「PEL データ」**という概念

([今井], 志村多様体の分類で「PEL 型」というクラスを定義する際に用いられる) の源流となるものである[*6].

**命題 2.10** $(A, \lambda, \Phi, \{x_i\}_{i=1}^{2n})$ を $\mathbb{C}$ 上の $(L, H, \mathcal{B}_N)$ 型の PEL 構造を持つアーベル多様体とする．このとき，ある $U \in X^+$ が存在して，同型 $A \simeq A_U$ が成立する．

**証明** $(A, \lambda, \Phi, \{x_i\}_{i=1}^{2n})$ を $(L, H, \mathcal{B}_N)$ 型の PEL 構造を持つアーベル多様体とする．$f\colon L \xrightarrow{\simeq} H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ を定義 2.8 (1) (iii) の $\mathfrak{o}$ 加群の同型とする．$A$ の複素解析的多様体構造から，$\mathrm{Lie}(A/\mathbb{C}) = H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ に $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造が入る．$\mathbb{C}$ ベクトル空間 $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ において，$\Phi(k^\times)$ の作用に関する $\chi$ 固有空間を $U_A$ をとおく．このとき，$U := (f \otimes \mathbb{R})^{-1}(U_A)$ と定めると，$U \in X^+$ であり，同型 $A \simeq A_U$ が成り立つ． □

志村の論文 [Shi66] では，《上述のような「PEL 構造」を持つアーベル多様体》を分類する空間が構成されている．

**事実 2.11（志村 [Shi66]）** $N$ を 3 以上の整数とする．このとき，以下を満たす組

$$(\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}, \mathcal{A}, \lambda^{\mathrm{univ}}, \Phi^{\mathrm{univ}}, \{x_i^{\mathrm{univ}}\}_{i=1}^{n})$$

が存在する．

(1) $\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな連結準射影的代数多様体であり，$(\mathcal{A}, \lambda^{\mathrm{univ}})$ は $\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ 上の偏極アーベルスキームである．
(2) $\Phi^{\mathrm{univ}}\colon \mathfrak{o} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{A})$ は単射環準同型である．
(3) 複素解析的多様体の射 $u\colon X^+ = G_{\mathbb{R}}/K \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N,\mathrm{an}}$ が存在して，任意の $U \in X^+$ に対して，$\mathcal{A}_{u(U)} = A_U$ が成立する．射 $u$ は複素解析的多様体の同型 $G_{L,N}\backslash X^+ \simeq \mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N,\mathrm{an}}$ を誘導する．（以下では，この同型を通して $\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N,\mathrm{an}}$ と $G_{L,N}\backslash X^+$ を同一視する．）
(4) $F$ を $\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}}$ の中間体とする．このとき，写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}(F) &\longrightarrow \mathrm{PEL}(L, H, \mathcal{B}_N)_F \\ s &\longmapsto (\mathcal{A}_s, \lambda_s^{\mathrm{univ}}, \Phi_s^{\mathrm{univ}}, \{x_i^{\mathrm{univ}} \circ s\}_i) \end{aligned}$$

[*6] 「志村データ」は「レベル」に関連する情報を含まない概念であるため，志村データを構成するための材料である「PEL データ」という概念の中にも「レベル」に関連する情報が含まれていないことに注意する．

は全単射である．

**注意 2.12** 事実 2.11 で述べた代数多様体 $\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ を本節ではしばしば「志村多様体」と呼ぶ．しかし，本稿の $\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ は今井氏の稿 [今井] で定義された志村多様体とは異なるものであることに注意する．本節末の注意 2.14 で見るように，$\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ は今井氏の稿で定義された**連結**志村多様体 ([今井, 定義 7.2]) の特別な場合になっている．

本小節では以下，$S := \mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ とおく．$S$ 上の偏極アーベルスキーム $\mathcal{A}$ の構造射を $\pi\colon \mathcal{A} \longrightarrow S$ と書く．$X^+$ 上のアーベル多様体の族 $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{an}}$ をカルテシアン図式

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{an}} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{A}_{\mathrm{an}} \arrow[d, "\pi"] \\ X^+ \arrow[r, "u"'] & S_{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

で定める．構成から，各 $U \in X^+$ に対して，$\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{an},U} = A_{U,\mathrm{an}}$ が成り立つ．

各非負整数 $i$ に対して，$\mathcal{A}/S$ の de Rham コホモロジー層

$$\mathcal{H}^i := \mathcal{H}^i_{\mathrm{dR}}(\mathcal{A}/S) = \mathbb{R}^i\pi_*\left(\Omega^\bullet_{\mathcal{A}/S}\right)$$

を考える．$\pi\colon \mathcal{A} \longrightarrow S$ が固有射であることから，任意の $x \in S(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して，$x^*\mathcal{H}^i = H^i_{\mathrm{dR}}(\mathcal{A}_x/\overline{\mathbb{Q}})$ が成り立つことに注意する．$\mathcal{H}^i$ は群 $k^\times$ の作用を持つ $S$ 上の階数 $\binom{2n}{i}$ の局所自由層である．特に $\mathcal{H}^1$ は階数 $2n$ の局所自由層であり，直和分解

$$\mathcal{H}^1 = \mathcal{E} \oplus \overline{\mathcal{E}}$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{E}$ と $\overline{\mathcal{E}}$ はそれぞれ，$k^\times$ の作用に関する $\chi$ 固有空間と $\overline{\chi}$ 固有空間である．$\mathcal{E}$ と $\overline{\mathcal{E}}$ はともに階数 $n$ の局所自由層であり，$S$ 上の直線束 $\mathcal{F}$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}$) を $\mathcal{F} := \bigwedge^n \mathcal{E}$ (resp. $\overline{\mathcal{F}} := \bigwedge^n \overline{\mathcal{E}}$) により定める．定義より，$\mathcal{F}$ と $\overline{\mathcal{F}}$ には乗法群 $k^\times$ がそれぞれ指標 $\chi^n$，$\overline{\chi}^n$ で作用する．

**定理 2.13** $S := \mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ とおく．このとき，以下を満たす大域切断 $\boldsymbol{\omega} \in \Gamma(S, \mathcal{F})$ 及び $\boldsymbol{\nu} \in \Gamma(S, \overline{\mathcal{F}})$ が存在する．

(i) ある $P(\boldsymbol{\omega}), P(\boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{C}^\times$ が存在して，任意の $x \in S(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して，

$$P(\boldsymbol{\omega})k = \mathbb{Q}\left\{\int_\gamma \boldsymbol{\omega}_x \;\middle|\; \gamma \in H_n(\mathcal{A}_x(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right\},$$
$$P(\boldsymbol{\nu})k = \mathbb{Q}\left\{\int_\gamma \boldsymbol{\nu}_x \;\middle|\; \gamma \in H_n(\mathcal{A}_x(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right\}$$

が成立する．

(ii) 任意の $x \in S(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して，

$$\boldsymbol{\omega}_x \in H^{p,q}(\mathcal{A}_{x,\mathbb{C}}),$$
$$\boldsymbol{\nu}_x \in H^{q,p}(\mathcal{A}_{x,\mathbb{C}})$$

が成立する．

**証明** $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{\nu}$ を構成しよう．まず，$\mathbb{C}$ 上で解析的に考える．$V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$ とおき，$W := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, k)$ とおく．$\overline{V}^* := \{f \in W \mid \tau \circ f \in V^*\} \simeq (k, \tau) \otimes_k V^*$ と定めると，直和分解 $W = V \oplus \overline{V}^*$ が得られる．$\{\xi_i\}_{i=1}^n$ を $V^*$ の $k$ 基底とすると，$\{\bar{\xi_i} := \tau \circ \xi_i\}_{i=1}^n$ は $\overline{V}^*$ の $k$ 基底をなす．

$V$ への $G_{L,N}$ の作用から，$\bigwedge_{\mathbb{C}}^n (V^* \otimes \mathbb{R})$ と $\bigwedge_{\mathbb{C}}^n (\overline{V}^* \otimes \mathbb{R})$ への $G_{L,N}$ の作用が誘導され，複素解析的多様体 $S_{\mathrm{an}}$ 上の局所系

$$\mathcal{V}_n := G_{L,N} \backslash \left(X^+ \times \bigwedge_{\mathbb{C}}^n (V^* \otimes \mathbb{R})\right) \longrightarrow G_{L,N} \backslash X^+ = S_{\mathrm{an}}$$
$$\overline{\mathcal{V}}_n := G_{L,N} \backslash \left(X^+ \times \bigwedge_{\mathbb{C}}^n (\overline{V}^* \otimes \mathbb{R})\right) \longrightarrow G_{L,N} \backslash X^+ = S_{\mathrm{an}}$$

が定まる．$H^1(A_{U_0}(\mathbb{C}), k) = W$ という同一視の下で，これらは $R^n \pi_{\mathrm{an}*}\mathbb{C}$ の部分局所系と見做せる．従って，事実 B.5 と命題 B.8 より，$S_{\mathrm{an}}$ 上の層としての自然な同型

$$\mathcal{F}_{\mathrm{an}}^{\nabla_{GM}, \mathrm{an}} \simeq \mathcal{V}_n,$$
$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{an}}^{\nabla_{GM}, \mathrm{an}} \simeq \overline{\mathcal{V}}_n$$

が成立する．ここで，$\nabla_{GM}, \mathrm{an}$ は (解析化された) Gauss–Manin 接続であり，$\mathcal{F}^{\nabla_{GM}}$

と $\overline{\mathcal{F}}^{\nabla_{GM}}$ はそれぞれ $\nabla_{GM}$, an について水平な切断のなす層である．$\Omega$ と $\overline{\Omega}$ を

$$\Omega := \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{n}(V^* \otimes \mathbb{R})$$
$$\overline{\Omega} := \bar{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}_n \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{n}(\overline{V}^* \otimes \mathbb{R})$$

と定義すると，これらは $\mathrm{SL}(V_{\mathbb{R}};\mathbb{C})$ の作用（特に $G_{L,N}$ の作用）で不変である．従って，$\Omega$ と $\overline{\Omega}$ はそれぞれ $\mathcal{V}_n$ と $\overline{\mathcal{V}}_n$ の大域切断と見做せる．このことから，

$$\Omega \in \Gamma(S_{\mathrm{an}}, \mathcal{F}_{\mathrm{an}}^{\nabla_{GM,\mathrm{an}}}) = \Gamma(S, \mathcal{F}^{\nabla_{GM}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$$

となり，$\Gamma(S,\mathcal{F})^{\nabla_{GM}} \neq \{0\}$ が成り立つ（系 B.9 参照）．そこで，0 でない大域切断 $\boldsymbol{\omega} \in \Gamma(S, \mathcal{F}^{\nabla_{GM}})$ をとる．同様に，$\Gamma(S, \overline{\mathcal{F}}^{\nabla_{GM}}) \neq \{0\}$ が成り立つので，0 でない大域切断 $\boldsymbol{\nu} \in \Gamma(S, \overline{\mathcal{F}}^{\nabla_{GM}})$ をとる．

$\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{\nu}$ は Gauss–Manin 接続について水平であるため，$R^n\pi_{\mathrm{an}*}\mathbb{C}$ の大域切断と見做せる．従って，これらは定理の条件 (i) を満たす．$\mathcal{H}^1$ において，$\mathcal{E}$ は $k^\times$ の作用に関する $\chi$ 固有空間であり，$\overline{\mathcal{E}}$ は $\bar{\chi}$ 固有空間であった．これに注意すると，各 $x \in S(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して，

$$\boldsymbol{\omega}_x \in x^*\mathcal{F} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} = H^{p,q}(\mathcal{A}_{x,\mathbb{C}})$$
$$\boldsymbol{\nu}_x \in x^*\overline{\mathcal{F}} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} = H^{q,p}(\mathcal{A}_{x,\mathbb{C}})$$

が成立することが分かる．従って，$\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{\nu}$ は定理の条件 (ii) も満たす． □

**注意 2.14（連結志村多様体）** 本稿の $\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ は次の志村データ $(\widetilde{\mathrm{G}}, \widetilde{X})$ と次のレベル $\Gamma \subseteq \widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ で定義される連結多様体 $\mathrm{Sh}_\Gamma(\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{der}}, \widetilde{X}^+)$ の弱正準モデル ([今井, 定義 7.6]) である．

- $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{GU}(V,H)$ は，$k$ ベクトル空間 $V$ 上の歪 Hermite 形式 $H$ をスカラー倍のずれを除いて不変にする $\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}(V;k)$ の部分群である．定義より，$\mathbb{R}$ 値点を見ると

$$\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R}) = \mathrm{PGU}(p,q)$$
$$\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{der}}(\mathbb{R}) = G_{\mathbb{R}} = \mathrm{SU}(p,q)$$
$$\widetilde{\mathrm{G}}(\mathbb{R}) = \mathrm{GU}(p,q)$$

  が成り立つ．

- $A_{U_0,\mathbb{C}}$ の複素構造の定める環準同型 $\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Lie}(A_{U_0,\mathbb{C}}/\mathbb{C}))$ を $\mathbb{C}^\times$ に制限することで，群準同型 $h\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}}(\mathbb{R})$ が定まる．$h$ の $\widetilde{\mathrm{G}}(\mathbb{R})$ 共役類を $\widetilde{X}$ と書く．定義より，$K$ は $V_{\mathbb{R}}$ の複素構造 $U_0 \oplus \overline{U_0}^{\perp}$ を保つ（すなわち，$h$ と可換になる）$G_{\mathbb{R}}$ の最大の部分群であるため，埋め込み
$$X^+ = G_{\mathbb{R}}/K \hookrightarrow \widetilde{X};\ gK \longmapsto ghg^{-1}$$
が定まる．この埋込みにより，本稿の $X^+$ は，$h$ を含む $\widetilde{X}$ の連結成分 $\widetilde{X}^+$ と同一視される．
- $\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ における $G_{L,N} \subseteq \widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{der}}(\mathbb{Q})$ の像を $\Gamma$ と書く．$N \geq 3$ のとき，$G_{L,N}$ は非自明な有限位数の元を持たず，自然な準同型 $\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{der}}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ の $G_{L,N}$ への制限は単射になるので，$\Gamma = G_{L,N}$ と見做せる．

本稿の $\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ が連結志村多様体 $\mathrm{Sh}_\Gamma(\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{der}}, \widetilde{X}^+)$ の弱正準モデルであることを確認しておこう．上で見た通り，$\widetilde{X}^+ = X^+$ および $\Gamma = G_{L,N}$ が成り立つので，連結志村多様体の定義と事実 2.11 (3) より，
$$\mathrm{Sh}_\Gamma(\widetilde{\mathrm{G}}^{\mathrm{der}}, \widetilde{X}^+)(\mathbb{C}) = \Gamma\backslash\widetilde{X}^+ = \mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}(\mathbb{C})$$
となる．$\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $V$ 上の交代形式 $\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{Q}} \circ H$ を（スカラー倍を除いて）保つ $\mathrm{GL}(V;\mathbb{Q})$ の部分群を $\mathrm{GSp} = \mathrm{GSp}(V, \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{Q}} \circ H)/\mathbb{Q}$ と書き，$X_{\mathrm{GSp}}$ を $h_0$ の $\mathrm{GSp}(\mathbb{R})$ 共役類とする．$h_0$ を含む $X_{\mathrm{GSp}}$ の連結成分を $X^+_{\mathrm{GSp}}$ と書く．また，$K(N) \subseteq \mathrm{GSp}(V, \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{Q}} \circ H)(\mathbb{A}_f)$ を格子 $L$ から定まる法 $N$ の主合同部分群とする．このとき，事実 2.11 (3) の写像 $u$ を見ることで，「Siegel モジュラー多様体 $\mathcal{A}_{n,K(N)}$ のモジュライ解釈により，アーベルスキーム $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ に対応する射 $\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N} \longrightarrow \mathcal{A}_{n,K(N)}$」の $\mathbb{C}$ への係数拡大は，$\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ は志村データの埋め込み $(\widetilde{\mathrm{G}}, \widetilde{X}) \hookrightarrow (\mathrm{GSp}, X_{\mathrm{GSp}})$ から定まる志村多様体の埋め込み
$$\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N} \longrightarrow \mathcal{A}_{n,K(N)} = \mathrm{Sh}_{K(N)}(\mathrm{GSp}, X_{\mathrm{GSp}})$$
と一致することが分かる．従って，問題を Siegel モジュラー多様体の方に帰着させることで，$\mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}$ が弱正準モデルの公理を満たすことが確認できる．

## 2.3 定理 2.4 の証明

以下，$\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のアーベル多様体 $A$ に対して，$\omega_A, \nu_A \in H_{\mathrm{dR}}^{\dim A}(B/\overline{\mathbb{Q}})$ をそれぞれ，群 $k^\times$ の作用に関する $\chi^{\dim A}$ 固有ベクトル，$\bar{\chi}^{\dim A}$ 固有ベクトルとする．既に補題 2.2 で見た通り，de Rham コホモロジー類 $\omega_A, \nu_A$ 及びその周期 $P(\omega_A), P(\nu_A)$ はそれぞれ，$\overline{\mathbb{Q}}^\times$ 倍の差異を除いて一意的である．

本小節では，定理 2.4 を証明する．補題 2.2 (1) より，$(p,q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の任意のアーベル多様体 $(A,\Phi)$ が次の条件 (CS) を満たすことを示せばよい:

(CS) $P(\omega_A) \sim b_k^{p-q}(2\pi i)^q$ 及び $P(\nu_A) \sim b_k^{q-p}(2\pi i)^p$ が成立する．

これを示すために，「$A$ に同種なあるアーベル多様体に対応する点を持つ志村多様体が楕円曲線の直積に対応する点を持つ」という主張を示す．更に，前節の結果と合わせることで，次の命題を示す．

**命題 2.15** $A$ を $(p,q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の任意のアーベル多様体とする．このとき，次が成立する．

(1) $p=q$ のとき，$A$ は (CS) を満たす．
(2) $E/\overline{\mathbb{Q}}$ を $(1,0)$ 型の $\mathcal{O}_k$ 乗法をもつ任意の楕円曲線とする[*7]．$p \neq q$ のとき，$A$ が (CS) を満たすことと，$E$ が (CS) を満たすことは同値である．

一方，Fermat 曲線の Jacobi 多様体の直和因子の周期を計算することで，次の命題 2.16 を証明することが出来る．(「志村多様体の応用」という話題からは逸れるので，この命題の証明は付録 C にまわす．)

**命題 2.16** ある相異なる非負整数 $p_0, q_0$ において，$(p_0,q_0)$ 型の $\mathcal{O}_k$ 乗法を持つある $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のアーベル多様体 $(A_0,\Phi_0)$ で条件 (CS) を満たすものが存在する．

**定理 2.4 の証明** 命題 2.15 と命題 2.16 を一旦認めて，定理 2.4 を証明する．命題 2.15 (2) を命題 2.16 の $A_0$ に適用することで，$(1,0)$ 型の $\mathcal{O}_k$ 乗法をもつ楕円曲線 $E/\overline{\mathbb{Q}}$ は (CS) を満たすことが分かる．従って，$A$ を $(p,q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の

---
*7 $(1,0)$ 型の $\mathcal{O}_k$ 乗法をもつ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の楕円曲線は（$\overline{\mathbb{Q}}$ 上の同型を除いて $k$ の類数個）存在する（例えば，[Sil94, CHAPTER II, §2, Proposition 2.1] を参照せよ）．

任意のアーベル多様体とすると，$p=q$ の場合は命題 2.15 (1)，$p \neq q$ の場合は命題 2.15 (2) より，$A$ は (CS) を満たす． □

**命題 2.15 の証明** $p,q$ を $n := p+q > 0$ を満たす任意の非負整数とし，$(A,\lambda)$ を $(p,q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の任意の $n$ 次元アーベル多様体とする．$L := H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ とおき，$H$ を $A$ の偏極 $\lambda$ から誘導される $k$ ベクトル空間 $V = H^1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ 上の歪 Hermite 形式とし，Hermite 形式 $H' := \sqrt{-d}^{-1}H$ を考える．Hermite 形式 $H'$ に関する $V$ の直交 $k$ 基底 $\{v_1,\dots,v_n\}$ が取れる[*8]．$H'$ の符号は $(p,q)$ なので，$k\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ ベクトル空間 $U := \bigoplus_{i=1}^{p}\mathbb{R}v_i$ において，Hermite 形式 $H'\otimes\mathbb{R}$ が正定値であると仮定して良い．また，必要があれば $v_i$ たちに $\mathbb{Q}^{\times}$ の元を掛けることで，$L' := \bigoplus_{j=1}^{n}\mathfrak{o}v_i \supseteq L$ であると仮定して良い．このとき，$A$ と同種な，$(p,q)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の偏極アーベル多様体 $A'$ であって，

$$A'(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Lie}(A'_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})/L'$$

となるものが存在する．$A$ と $A'$ は同種なので，$P(\omega_A) \sim P(\omega_{A'})$ 及び $P(\nu_A) \sim P(\nu_{A'})$ が成立する．従って，以下では $A$ を $A'$ に取り替えて議論して良い．特に，格子 $L$ は $H'$ に関する直交 $\mathfrak{o}$ 基底 $\{v_1,\dots,v_n\}$ を持つと仮定して良い．

$(E_{\mathfrak{o}},\Phi_{E_{\mathfrak{o}}})$ を $(1,0)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の楕円曲線であって，$E_{\mathfrak{o}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/\mathfrak{o}$ となるものとする．基底 $\{v_1,\dots,v_n\}$ の定め方から，$L_U := \bigoplus_{i=1}^{p}\mathfrak{o}v_i$ 及び $L_U^{\perp} := \bigoplus_{i=p+1}^{n}\mathfrak{o}v_i$ は互いに直交補空間であるような格子 $L$ の直和因子であり，$H'$ は $L_U$ 上で正定値，$L_U^{\perp}$ 上で負定値である．従って，$k\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ の $p$ 次元部分空間 $U := \bigoplus_{i=1}^{p}k\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}v_i$ に対応する $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体を $B_{\mathbb{C}} := A_U = (U\oplus\overline{U}^{\perp})/L$ と書くとき，直積分解

$$B_{\mathbb{C}} \simeq (E_{\mathfrak{o},\mathbb{C}},\Phi_{E_{\mathfrak{o}}})^p \times (E_{\mathfrak{o},\mathbb{C}},\Phi_{E_{\mathfrak{o}}})^q$$

が成立する．従って，$B_{\mathbb{C}}$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のモデル $B := (E_{\mathfrak{o}},\Phi_{E_{\mathfrak{o}}})^p \times (E_{\mathfrak{o}},\Phi_{E_{\mathfrak{o}}})^q$ を持つ．

$N \geq 3$ とし，レベル $N$ 構造 $\mathcal{B}_N \subseteq N^{-1}L$ を固定する．このとき，定義より，$A$ と $B$ には $(L,H,\mathcal{B}_N)$ 型の PEL 構造が入る．更に，$A$ と $B$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されているの

[*8] 実際，互いに直交する非等方元の列 $v_1,\dots,v_n$ を次のように帰納的に構成すれば良い: 互いに直交する非等方元 $v_1,\cdots,v_{r-1} \in V$ が与えられていると仮定する．$\{v_1,\dots,v_{r-1}\}$ で生成される $V$ の $k$ 部分空間を $W$ とおき，$H'$ に関して $W$ に直交する元全体のなす $V$ の $k$ 部分空間を $W^{\perp}$ とおく，$v_i$ たちは互いに直交する非等方元なので，$V = W\oplus W^{\perp}$ が成り立つ．この直和分解と，$V$ に於ける $H'$ の非退化性から，$H'$ は $W^{\perp}$ でも非退化であることが分かる．従って，$H'(v_r,v_r)\neq 0$ を満たす $v_r \in W^{\perp}$ をとれる．

で，$A, B$ にそれぞれ対応する点 $x, y \in \mathrm{Sh}^0_{L,H,\mathcal{B}_N}(\overline{\mathbb{Q}})$ が存在する．定理 2.13 より，

$$P(\omega_A) \sim P(\omega_B)$$

が成り立つ．定義より，

$$\bigwedge^p \omega_{E_{\mathfrak{o}}} \wedge \bigwedge^q \nu_{E_{\mathfrak{o}}} \in H^n_{\mathrm{dR}}(B/\overline{\mathbb{Q}})$$

は指標 $\chi^n$ の固有ベクトルであるため，これを $\omega_B$ としてよい．

$E/\overline{\mathbb{Q}}$ を $(1,0)$ 型の $\mathcal{O}_k$ 乗法をもつ任意の楕円曲線とする．$\mathfrak{o}$ は $\mathcal{O}_k$ の部分環なので，$E$ は $\mathfrak{o}$ 乗法をもつ．$\mathfrak{o}$ 乗法をもつ楕円曲線は互いに同種であるため，$P(\omega_{E_{\mathfrak{o}}}) \sim P(\omega_E)$ および $P(\nu_{E_{\mathfrak{o}}}) \sim P(\nu_E)$ が成り立つ．よって，$\omega_E$ と $\nu_E$ に関する Legendre 関係式 $P(\nu_E) \sim 2\pi i / P(\omega_E)$（系 A.23 参照）と合わせて，

$$P(\omega_B) \sim P(\omega_{E_{\mathfrak{o}}})^p P(\nu_{E_{\mathfrak{o}}})^q \sim P(\omega_E)^p P(\nu_E)^q \sim (2\pi i)^q P(\omega_E)^{p-q}$$

を得る．以上の議論を合わせることで，

$$P(\omega_A) \sim (2\pi i)^q P(\omega_E)^{p-q} \tag{2.3}$$

が従う．同様にして，

$$P(\nu_A) \sim (2\pi i)^p P(\nu_E)^{q-p} \tag{2.4}$$

も示せる．(2.3) と (2.4) から命題 2.15 の主張が直ちに従う． □

# 3 アーベル多様体の絶対 Hodge サイクルについて

本節では，「アーベル多様体の Hodge サイクルは絶対 Hodge サイクルである」という Deligne の結果 [DMOS82, Chapter I]（本稿の定理 3.6 と定理 3.9）を解説する．本節最初の小節 §3.1 では，Hodge 予想について復習して，（絶対）Hodge サイクルを定義する．続いて，§3.2 で本節の主定理である Deligne の結果の主張とその証明の方針を述べ，§§3.4–3.5 で証明を（志村多様体の応用に関係する部分に焦点を当てて）概説する．さらに，§3.6 では，「アーベル多様体の周期」への定理 3.9 の簡単な応用例として，「$p = q$ の場合」の定理 2.4 の別証明を紹介する．

## 3.1 Hodge 予想と絶対 Hodge サイクル

本小節では，Hodge サイクル及び絶対 Hodge サイクルという概念を定義し，本節の目標である Deligne の定理の正確な主張を述べる．Hodge サイクルと絶対 Hodge サイクルを定義する前に，これらの概念に関連する簡単な観察を行い，Hodge 予想と呼ばれる予想を紹介する．

**観察．** $X$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな $d$ 次元射影的代数多様体とし，$Z$ を $X$ の滑らかな $d-p$ 次元閉部分代数多様体とする．このとき，$Z$ は積分

$$[Z]\colon H^{2d-2p}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(d-p) \longrightarrow \mathbb{C};\ \omega \longmapsto \frac{1}{(2\pi i)^{d-p}} \int_{Z(\mathbb{C})} \omega$$

により $H^{2d-2p}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(d-p)$ 上の $\mathbb{C}$ 線型形式を定める．Poincaré 双対定理[*9]より $[Z]$ は $H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(p)$ の元と見做せる．この $[Z]$ は次の性質をもつ．

(1) $[Z] \in H^{p,p}(X)$ が成り立つ．
実際，これは次のようにしてわかる．正則関数版の陰関数定理より，各点において $X_{\mathrm{an}}$ の適切な正則局所座標 $z_1, \ldots, z_d$ をとると，$Z(\mathbb{C})$ は局所的には「$z_1 = \cdots = z_p = 0$」で定義される集合と見做せる．従って，$p' < p$ なる任意の $\omega \in H^{2d-2p',2p'}(X)$ に対して $\int_{Z(\mathbb{C})} \omega = 0$ が成り立ち，複素共役をとることで，任意の $\omega \in H^{2p',2d-2p'}(X)$ に対しても $\int_{Z(\mathbb{C})} \omega = 0$ が得られる．

(2) $[Z]$ は $H^{2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p)$ の像に含まれる．
実際，合成写像

$$\begin{aligned} H_{2d-2p}(Z(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{2d-2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\left(H^{2d-2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \mathbb{Q}\right) \\ &\xrightarrow[\text{Poincaré 双対}]{\simeq} H^{2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow[\times(2\pi i)^p]{\simeq} H^{2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) \\ &\xrightarrow[\text{de Rham の定理}]{} H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(p) \end{aligned}$$

---

[*9] ここで，“Tate 捻り版"の Poincaré 双対を次のように定式化しておく：まず，$\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{dR}}\colon H^{2d}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(d) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C};\ \omega \longmapsto (2\pi i)^{-d} \int_{X(\mathbb{C})} \omega$ を用いて $\mathbb{C}$ 双線型写像

$$H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(p) \times H^{2d-2p}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(d-p) \longrightarrow \mathbb{C};\ (\eta_1, \eta_2) \longmapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{dR}}(\eta_1 \wedge \eta_2)$$

を定める．通常の Poincaré 双対定理より，この双線型写像は非退化である．

による $Z(\mathbb{C})$ の基本類の像は $[Z]$ と一致する．この事実は，「特異コホモロジーの Poincaré 双対」と「de Rham コホモロジーの Poincaré 双対」が Betti と de Rham の比較同型に関して整合的であることから従う．

(3) $\sigma$ を体 $\mathbb{C}$ の任意の自己準同型とし，$\sigma X := X \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}, \sigma)$ とおく．このとき，自然な射 $\sigma X \longrightarrow X$ （ファイバー積の射影）から，フィルター付き $\mathbb{C}$ ベクトル空間の射

$$\sigma_{\mathrm{dR}} \colon H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(p) \longrightarrow H^{2p}_{\mathrm{dR}}(\sigma X/\mathbb{C})(p)$$

が誘導される．定義より，$\sigma_{\mathrm{dR}}([Z]) = [\sigma Z]$ が成り立つ．特に，$\sigma_{\mathrm{dR}}([Z])$ は $H^{2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p)$ の像に含まれる．

この観察から，余次元 $p$ の代数的サイクル（$d-p$ 次元の閉部分代数多様体の形式的和）から来る $H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})(p)$ の元は必ず性質 (1)–(3) を持つことが分かる．そのうち，(1) と (2) は $X$ から定まる Hodge 構造の言葉のみを用いて記述できる性質である．Hodge 予想の主張は次のとおりである．

**予想 3.1（Hodge 予想）** $X$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影的代数多様体とし，$p$ を $0 \leq p \leq \dim X$ なる任意の整数とし，余次元 $p$ の代数的サイクル全体のなす集合を $Z^p(X)$ と書く．このとき，

$$H^{2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) \cap H^{p,p}(X)$$

の元は必ず $Z^p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ から来るだろう．

**注意 3.2** Hodge は当初，「有理数係数の代数的サイクル（すなわち $Z^p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元）に由来する元であること」を判定するための必要十分条件を与える予想 3.1 よりも主張の強い，「整数係数の代数的サイクル（すなわち $Z^p(X)$ の元）に由来する元であること」を判定するための必要十分条件に関する予想を提出していた ([Hod50])．しかし，後に整数係数の予想には反例があることが指摘され ([AH62])，予想 3.1 の形に修正された．

以上を踏まえて，Hodge サイクルと絶対 Hodge サイクルを定義しよう．

**定義 3.3（絶対 Hodge サイクル）** $L \subseteq \mathbb{C}$ を代数閉体とし，$X$ を $L$ 上の滑らかな射影的代数多様体とする．$p$ を $2\dim X$ 以下の非負整数とし，

$$t = (t_{\mathrm{dR}}, t_{\text{ét}}) \in H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/L)(p) \times H^{2p}_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f)(p) =: H^{2p}_{\mathbb{A}}(X/L)(p)$$

とする．

(1) $\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ を体の埋め込みとし，$\sigma X := X \otimes_L (\mathbb{C}, \sigma)$ とおく．$t$ が自然な写像

$$\begin{aligned} H^{2p}(\sigma X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) &\hookrightarrow H^{2p}_{\mathbb{A}}(\sigma X/\mathbb{C})(p) \\ &\simeq (\mathbb{C}, \sigma) \otimes_L H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/L)(p) \times H^{2p}_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f)(p) \end{aligned}$$

の像に属する[*10]とき，$t$ は**埋め込み $\sigma$ に関する有理サイクル**であるという．

(2) $t$ が埋め込み $\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ に関する $X/L$ の次数 $2p$ の有理サイクルであり，更に $t_{\mathrm{dR}} \in F^0 H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X)(p)$ が成立するとき，$t$ は**埋め込み $\sigma$ に関する $X/L$ の次数 $2p$ の Hodge サイクル**であるという．埋め込み $\sigma$ に関する $X/L$ の次数 $2p$ の Hodge サイクル全体のなす集合を $C^{2p}_{\mathrm{H}}(X/L; \sigma)$ と書く．

(3) 任意の埋め込み $\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して $t$ が $\sigma$ に関する Hodge サイクルであるとき，$t$ は **$X/L$ の次数 $2p$ の絶対 Hodge サイクル**であるという．$X/L$ の次数 $2p$ の Hodge サイクル全体のなす集合を $C^{2p}_{\mathrm{AH}}(X/L)$ と書く．

**注意 3.4** $C^{2p}_{\mathrm{H}}(X/L; \sigma)$ と $C^{2p}_{\mathrm{AH}}(X/L)$ は $H^{2p}_{\mathbb{A}}(X/L)(p)$ の $\mathbb{Q}$ 部分空間をなす．

Hodge サイクルと Hodge 予想の関係について触れておこう．$L = \mathbb{C}$ として，定義 3.3 (2) の設定の下で考える．$\sigma$ を体 $\mathbb{C}$ の任意の自己準同型とする．Hodge サイクルの定義より，合成写像

$$H^{2p}_{\mathbb{A}}(X/\mathbb{C})(p) \xrightarrow{\text{射影}} H^{2p}(X/\mathbb{C})(p) \xrightarrow{\sigma_{\mathrm{dR}}} H^{2p}(\sigma X/\mathbb{C})(p)$$

を $C^{2p}_{\mathrm{H}}(X/\mathbb{C}; \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ に制限することで，$\mathbb{Q}$ ベクトル空間の同型

$$C^{2p}_{\mathrm{H}}(X/\mathbb{C}; \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\simeq} H^{2p}(\sigma X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) \cap F^p H^{2p}(\sigma X/\mathbb{C}) \cap \operatorname{Im} \sigma$$

が誘導される．複素共役 $\tau$ は $H^{2p}(\sigma X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p)$ は $(-1)^p$ 倍で作用するので，$H^{2p}(\sigma X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) \cap F^p H^{2p}(X/\mathbb{C})$ は $\tau$ の作用で安定である．従って，

$$\begin{aligned} H^{2p}(\sigma X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) \cap F^p H^{2p}(\sigma X/\mathbb{C}) &= H^{2p}(\sigma X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) \cap \tau(F^p H^{2p}(\sigma X/\mathbb{C})) \\ &= H^{2p}(\sigma X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) \cap H^{p,p}(\sigma X) \end{aligned}$$

[*10] エタールコホモロジーの平滑底変換定理 ([SGA4, Exposé XV, XVI]) の帰結として，自然な同型 $H^{2p}_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f)(p) \xrightarrow{\simeq} H^{2p}_{\text{ét}}(\sigma X, \mathbb{A}_f)(p)$ が存在することが分かる．

となり，

$$C^{2p}_{\mathrm{H}}(\sigma X/\mathbb{C};\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \simeq H^{2p}(\sigma X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})(p) \cap H^{p,p}(\sigma X) \cap \mathrm{Im}\,\sigma \tag{3.1}$$

が得られる．以上の議論から，Hodge 予想は次のように言い換えられる．

「恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ に関する Hodge サイクルは必ず代数的サイクルから来る．」

一方，本小節の最初に行った観察 (3) と同型 (3.1) から分かるように，コホモロジー類 $t \in H^{2p}_{\mathbb{A}}(X/L)(p)$ が代数的サイクル（閉部分代数多様体の形式的 $\mathbb{Q}$ 線型結合）から来ている元であるなら，$t$ は必ず絶対 Hodge サイクルになる．従って，Hodge 予想が正しいなら，次の予想も正しいはずである．

**予想 3.5** Hodge サイクルは絶対 Hodge サイクルである．

## 3.2 アーベル多様体の Hodge サイクル

Deligne は「アーベル多様体の場合は予想 3.5 が正しい」という定理を証明した．

**定理 3.6（Deligne, [DMOS82, Chapter I]）** $L$ を $\mathbb{C}$ の代数的閉な部分体とし，$X$ を $L$ 上のアーベル多様体とする．このとき，任意の埋め込み $\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して，$C^{2p}_{\mathrm{H}}(X/L;\sigma) = C^{2p}_{\mathrm{AH}}(X/L)$ が成り立つ．

定理を証明する上でも*11，定理を応用する上でも*12，定理 3.6 の主張を 1 つのコホモロジー群の元に関するものから，（重複を含む）様々な次数のコホモロジー群たちのテンソル積の元に関するものに拡張しておくと便利である．テンソル版の定理 3.6 の主張を述べるために，まず，Hodge 構造のテンソルという概念を導入しておく．

**定義 3.7（Hodge 構造のテンソル）** $\Lambda$ を有限集合とし，各 $\alpha \in \Lambda$ に対して，$\mathbb{Q}$ 構造 $V_\alpha$，複素構造 $h_\alpha\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes \mathbb{R})$, 重さ $n_\alpha$ の Hodge 構造 $(V_\alpha, h_\alpha)$ が与えられているとする．

---

*11 問題を「テンソル版」にすることで，Hodge サイクルを「Mumford–Tate 群」の枠組みで一度に扱えるようになる．本節の主定理の証明で，この見方の恩恵を受けるのは §3.4 で扱う部分である．この小節では，定理の証明を省略しているので本稿を読んだだけでは有難みを感じにくいかもしれないが，それでも「問題がコホモロジー類の話から，群作用の話に置き換わっている」ということには気づいていただけるだろう．

*12 整正準モデルの構成で使われるのも「テンソル版」の主張（後述，定理 3.9）である．

(1) 整数 $r$ と元 $(m_1(\alpha), m_2(\alpha))_{\alpha\in\Lambda} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^\Lambda$ を用意すると，次のような重さ $\sum_{\alpha\in\Lambda}(m_1(\alpha)-m_2(\alpha))n(\alpha)-2r$ の Hodge 構造 $(T, h_T)$ が定義される:

$$T := \left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} V^{\otimes m_1(\alpha)} \otimes (V^\vee)^{\otimes m_2(\alpha)}\right) \otimes \mathbb{Q}(r),$$

$$h_T := \left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha^{\otimes m_1(\alpha)} \otimes (h_\alpha^\vee)^{\otimes m_2(\alpha)}\right) \otimes |\cdot|^{-r}.$$

本稿では便宜上，このような Hodge 構造 $T$ を $(V_\alpha, h_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ **で生成されるテンソル**と呼ぶ.

(2) $T$ を $V$ のテンソルとし，$t \in T$ とする．$t \in T \cap T^{p,q}$ が成り立つとき，$t$ は**双次数** $(p,q)$ **の有理元**であるという.

以下のように，Hodge サイクルや絶対 Hodge サイクルの概念はより一般的な「テンソル」の枠組みに拡張される.

**定義 3.8（テンソル版絶対 Hodge サイクル）** $\Lambda$ を有限集合とする．$L \subseteq \mathbb{C}$ を代数閉体とし，$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を $L$ 上の滑らかな射影的代数多様体の族とする．各 $\alpha \in \Lambda$ に対して，部分集合 $M_\alpha \subseteq \mathbb{Z} \cap [0, 2\dim X_\alpha]$ を固定する．このとき，Hodge 構造の族 $(H^m(X_\alpha(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))_{\alpha\in\Lambda, m\in M_\alpha}$ で生成されるテンソル全体の集合を $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\{(X_\alpha, M_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$ と書く．$\mathfrak{T}$ に属するテンソル

$$T = \left(\bigotimes_{\alpha\in\Lambda}\bigotimes_{m\in M_\alpha} H^m(X_\alpha(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))^{\otimes n_1(\alpha)} \otimes H_m(X_\alpha(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))^{\otimes n_2(\alpha)}\right)(r)$$

に対して，これに対応する de Rham 版及びエタール版のテンソル積

$$T_{\mathrm{dR}} := \left(\bigotimes_{\alpha\in\Lambda}\bigotimes_{m\in M_\alpha} H^m_{\mathrm{dR}}(X/L)^{n_1(\alpha)} \otimes_L (H^{m(\alpha)}_{\mathrm{dR}}(X/L)^\vee)^{\otimes n_2(\alpha)}\right)(r)$$

$$T_{\text{ét}} := \left(\bigotimes_{\alpha\in\Lambda}\bigotimes_{m\in M_\alpha} H^m_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f)^{n_1(\alpha)} \otimes_L (H^m_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f)^\vee)^{\otimes n_2(\alpha)}\right)(r)$$

及びその直積 $T_{\mathbb{A}} := T_{\mathrm{dR}} \times T_{\text{ét}}$ が定まる．また，$\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ を体の埋め込みとすると,

$$T_\sigma = \left(\bigotimes_{\alpha\in\Lambda}\bigotimes_{m\in M_\alpha} H^m(\sigma X_\alpha(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))^{\otimes n_1(\alpha)} \otimes H_m(\sigma X_\alpha(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))^{\otimes n_2(\alpha)}\right)(r)$$

が定まる．$t = (t_{\mathrm{dR}}, t_{\text{ét}}) \in T_{\mathbb{A}}$ とする.

(1) $t$ が自然な写像 $T_\sigma \longrightarrow T_{\mathbb{A}} \otimes_{L\times\mathbb{A}_f} (\mathbb{C}\times\mathbb{A}, \sigma\times\mathrm{id}_L)$ の像に属するとき，$t$ は**埋め込み $\sigma$ に関する $(\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}/L, T)$ の有理サイクル**であるという．
(2) $t$ が埋め込み $\sigma$ に関する有理的サイクルであり，更に $t_{\mathrm{dR}} \in F^0(T_{\mathrm{dR}})$ が成り立つとき[*13]，$t$ は**埋め込み $\sigma$ に関する $(\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}/L, T)$ の Hodge サイクル**であるという．埋め込み $\sigma$ に関する $(\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}/L, T)$ の Hodge サイクル全体のなす集合を $C_{\mathrm{H}}(\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}/L, T; \sigma)$ と書く．
(3) $t$ が全ての埋め込み $\tau\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ に関して Hodge サイクルであるとき，$t$ は $(\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}/L, T)$ **の絶対 Hodge サイクル**であるという．$(\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}/L, T)$ の絶対 Hodge サイクル全体のなす集合を $C_{\mathrm{AH}}(\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}/L, T)$ と書く．

以上の準備の下で，本節の主定理の「テンソル版」の主張を述べることが出来る．

**定理 3.9（テンソル版，Deligne [DMOS82]）** $L$ を $\mathbb{C}$ の代数的閉な部分体とし，$A$ を $L$ 上の $n$ 次元アーベル多様体とする．$T$ を $(H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))_{0\le m\le 2n}$ で生成されるテンソルとする．このとき，任意の埋め込み $\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して，$C_{\mathrm{H}}(A/L, T; \sigma) = C_{\mathrm{AH}}(A/L, T)$ が成り立つ．

本節の目標は，「志村多様体の応用」という観点に重点を置いて定理 3.9 の証明を解説することである．定理 3.9 の証明の方針を簡単に述べて，この小節を終えよう．まず，次の事実があるので，以下では $L = \mathbb{C}$ としてよい．（本稿では証明を省く．）

**事実 3.10（係数拡大）** $L$ を代数的閉な $\mathbb{C}$ の部分体とし，$L'$ を代数的閉な $\mathbb{C}/L$ の中間体とする．$X$ を $L$ 上の滑らかな射影的代数多様体とする．このとき，自然な写像

$$H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/L)(p) \times H^{2p}_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f(p)) \longrightarrow H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X_{L'}/L')(p) \times H^{2p}_{\text{ét}}(X_{L'}, \mathbb{A}_f(p))$$

により誘導される写像 $C^{2p}_{\mathrm{AH}}(X/L) \longrightarrow C^{2p}_{\mathrm{AH}}(X_{L'}/L')$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の同型写像になる ([DMOS82, Chapter I, Proposition 2.9])．テンソル版についても，同様な主張が成立する ([DMOS82, Chapter I, Remark 2.10])．

また，次のことにも注意する．

**注意 3.11** $A$ を $\mathbb{C}$ 上の $n$ 次元アーベル多様体とする．$M \subseteq \mathbb{Z}\cap[0, 2\dim n]$ とし，$\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(\{\Lambda, M\})$ とおく．このとき，Künneth の公式より，任意の $m \in M$ に対し

---

[*13] $t$ は有理サイクルなので，複素共役で不変である．従って，$t_{\mathrm{dR}} \in F^0(T_{\mathrm{dR}})$ ならば $t_{\mathrm{dR}}$ は $T_\sigma$ の双次数 $(0, 0)$ の元と見做せる．

て，$\mathfrak{T}$ に属するすべての加群は，$\mathfrak{T}(\{(A,\{1\})\})$ に属する加群の部分商と同型である．従って，定理 3.9 を証明する際には $M=\{1\}$ としても一般性を失わない．

定理 3.9 の証明の流れは，前節の定理 2.4 の証明と非常によく似ている．すなわち，以下の流れで示される:

**第 1 段階**

考えているアーベル多様体 $A$ がファイバーに現れるような，適切なアーベルスキーム $\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$ をとり Hodge サイクル $t$ を $S$ 上の族 $\widetilde{t}$ （de Rham コホモロジー層 $\mathcal{H}^{2p}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{X}/S)$ とエタール高次順像 $\mathcal{H}^n_{\text{ét}}(X/S)(r) := (\varprojlim_m R^n\pi_*\boldsymbol{\mu}_m^{\otimes r}) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f$，あるいはそれらのテンソル版のある適切な条件を満たす大域切断の組）にのばす．実際には，$S$ として Hodge 型のある志村多様体をとる．

**第 2 段階**

$S$ のある特別な点 $s_1$ で $\widetilde{t}_{s_1}$ が絶対 Hodge サイクルになるならば，$S$ の任意の点 $s$ で $\widetilde{t}_s$ が絶対 Hodge サイクルになることを示す．

**第 3 段階**

$S$ のある特別な点 $s_1$ で $\widetilde{t}_{s_1}$ が絶対 Hodge サイクルになることを示す．（実際には，この「ある特別な点」として $S$ の特殊点，すなわちファイバーが CM アーベル多様体になるような点をとる．）

本稿では第 2 段階 (§3.3)，第 3 段階 (§3.4)，第 1 段階 (§3.5) の順で説明する．尚，第 1 段階だけでなく，第 3 段階でも**（前節の Gross の証明と全く同じ手法を用いた）連結志村多様体を用いた議論**を行う[*14]．

**参考**

本小節の最後に，参考までに「一般の標数 0 の体」における絶対 Hodge サイクルの定義を書いておこう．

**定義 3.12** $L$ を標数 0 の体とし，$X$ を $L$ 上の滑らかかつ射影的な代数多様体とする．

[*14] 第 3 段階では，「CM アーベル多様体の具体的な絶対 Hodge サイクルを構成する」という議論が重要な鍵の 1 つとなる．この「絶対 Hodge サイクルの構成」は最初，CM 体 $E$ が作用する特別なアーベル多様体で作っておいて，それを「$E$ 乗法をもつアーベル多様体の族」にのばし，第 2 段階の原理を適用することで為される．

(1) $L$ が代数閉体であるとする．このとき，代数的閉かつ $\mathbb{Q}$ 上超越次数有限な $L$ の部分体 $L_0$ 上に $X$ のモデル $X_0$ を作ることが出来る．コホモロジー類の組

$$t = (t_{\mathrm{dR}}, t_{\text{ét}}) \in H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/L)(p) \times H^{2p}_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f(p))$$

が自然な写像

$$H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X_0/L_0)(p) \times H^{2p}_{\text{ét}}(X_0, \mathbb{A}_f(p)) \longrightarrow H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/L)(p) \times H^{2p}_{\text{ét}}(X, \mathbb{A}_f(p))$$

により $X_0/L_0$ の絶対 Hodge サイクルの像になっているとき，$t$ は $X/L$ の**絶対 Hodge サイクル**であるという．(事実 3.10 より，この定義は体 $L_0$ 及びモデル $X_0$ の取り方に依らない．)

(2) $\overline{L}$ を $L$ の代数閉包とする．コホモロジー類の組

$$t = (t_{\mathrm{dR}}, t_{\text{ét}}) \in H^{2p}_{\mathrm{dR}}(X_{\overline{L}}/\overline{L})(p) \times H^{2p}_{\text{ét}}(X_{\overline{L}}, \mathbb{A}_f(p))$$

が Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ の作用で不変であるとき，$t$ は $X/L$ の**絶対 Hodge サイクル**であるという．

テンソル版についても，一般の標数 0 の体 $L$ に対して「$(\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}/L, T)$ の絶対 Hodge サイクル」を同様に定義する．

## 3.3 Deligne の原理 B

本小節では，定理 3.9 の証明の第 2 段階の議論を行う．$\pi\colon X \longrightarrow S$ を $\mathbb{C}$ 上滑らかな代数多様体の間の滑らかかつ固有な $\mathbb{C}$ 上の射とする．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $r \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\mathcal{H}^n_{\text{ét}}(X/S)(r) := (\varprojlim_m R^n\pi_*\boldsymbol{\mu}_m^{\otimes r}) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f$$

と定める．本小節では [DMOS82, Chapter I] で “Principle B" と呼ばれる次の定理を示す．

**定理 3.13 (原理 B，Deligne [DMOS82, Chapter I, Theorem 2.12])** $S$ は連結であると仮定する．$p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし，$t = (t_{\mathrm{dR}}, t_{\text{ét}})$ を連接層 $\mathcal{H}^{2p}_{\mathrm{dR}}(X/S)(p)$ とエタール層 $\mathcal{H}^{2p}_{\text{ét}}(X/S)(p)$ の大域切断の組とする．$t_{\mathrm{dR}}$ が Gauss–Manin 接続に関する水平切断であり，任意の閉点 $s \in S$ に対して，$t_{\mathrm{dR},s} \in F^0H^{2p}(X_s/\mathbb{C})(p)$ が成り立つと仮定する．更に，ある閉点 $s_0 \in S$ に於いて $t_{s_0}$ が絶対 Hodge サイクルであると仮定する．このとき，任意の閉点 $s \in S$ に対して，$t_s$ は絶対 Hodge サイクルである．

**証明**　任意の自己準同型 $\sigma\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して，$t_s$ が $\sigma$ に関する Hodge サイクルであることを示せばよい．ところが，$(X/S, t, s_0)$ を $(\sigma X/\sigma S, t, \sigma(s_0))$ に取り換えても定理 3.13 の仮定が満たされているので，$t_s$ が恒等写像について Hodge サイクルであることを示せば十分である．

まず，de Rham 成分 $t_{\mathrm{dR}}$ について考える．$s \in S$ を任意の点とする．今，仮定より $t_{\mathrm{dR},s} \in F^0H^{2p}(X_s/\mathbb{C})(p)$ が成り立つので，$t_{\mathrm{dR},s}$ がある有理サイクルの de Rham 成分であることを示せばよい．$t_{\mathrm{dR}}$ は Gauss–Manin 接続に関する水平切断であるため，$R^p\pi_{\mathbb{C},\mathrm{an}*}\mathbb{C}$ の大域切断と見做せる（系 B.9）．示すべき定理の仮定より $t_{\mathrm{dR},s_0} \in H^{2p}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p)$ が成り立つので，$S$ の連結性より

$$t_{\mathrm{dR}} \in \Gamma(S_{\mathrm{an}}, R^{2p}\pi_{\mathbb{C},\mathrm{an}*}\mathbb{Q}(p))$$

が成り立つ．よって $t_{\mathrm{dR},s}$ はある有理サイクルの de Rham 成分になっている．

続いて，エタール成分 $t_{\text{ét}}$ について考える．$\pi_1^{\mathrm{top}}(S(\mathbb{C}), s_0)$ を位相的基本群とし，$\pi_1^{\text{ét}}(S, s_0)$ をエタール基本群とする．$L$ は代数的閉な $\mathbb{C}$ の部分体なので，$\pi_1^{\text{ét}}(S, s_0)$ は $\pi_1^{\mathrm{top}}(S(\mathbb{C}), s_0)$ の副有限完備化と同型であり ([SGA1, Exposé XII, Corollaire 5.2])，自然な同型

$$\begin{aligned}
\Gamma(S, \mathcal{H}^{2p}_{\text{ét}}(X/S)(p)) &\simeq (\mathcal{H}^{2p}_{\text{ét}}(X/S)(p)_{s_0})^{\pi_1^{\text{ét}}(S,s_0)} \\
&\simeq H^{2p}_{\text{ét}}(X_{s_0}, \mathbb{A}_f(p))^{\pi_1^{\text{ét}}(S,s_0)} \\
&\simeq H^{2p}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p)^{\pi_1^{\mathrm{top}}(S(\mathbb{C}),s_0)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \\
&\simeq \Gamma(S_{\mathrm{an}}, R^{2p}\pi_{\mathbb{C},\mathrm{an}*}\mathbb{Q}(p)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，第 1 と第 4 の同型は $S$ の連結性と基本群の Galois 理論 ([SGA1])，第 2 の同型はエタールコホモロジーの固有底変換定理 ([SGA4, Exposé XII, XIII])，第 3 の同型はエタールコホモロジーと Betti コホモロジーの比較同型定理による．これに注意すると，示すべき定理の仮定より，

$$t_{\text{ét},s_0} \in H^{2p}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p) \cap H^{2p}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p)^{\pi_1^{\mathrm{top}}(S(\mathbb{C}),s_0)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f$$

と見做せる．従って，$t_{\text{ét},s_0} \in H^{2p}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(p)^{\pi_1^{\mathrm{top}}(S(\mathbb{C}),s_0)}$, すなわち

$$t_{\text{ét}} \in \Gamma(S_{\mathrm{an}}, R^{2p}\pi_{\mathbb{C},\mathrm{an}*}\mathbb{Q}(p))$$

を得る．従って，任意の $s \in S$ に対して，$t_{\text{ét}}$ はある有理サイクルのエタール成分になっている．

最後に，$H^{2p}(S(\mathbb{C}),\mathbb{Q})(p)$ の元として $t_{\mathrm{dR},s_0}=t_{\text{ét},s_0}$ であること，及び $t_{\mathrm{dR}}$ と $t_{\text{ét}}$ が局所定数層 $R^{2p}\pi_{\mathbb{C},\mathrm{an}*}\mathbb{Q}(p)$ の大域切断であることに注意すると，$S$ の連結性より，任意の点 $s$ に於いて $t_{\mathrm{dR},s}=t_{\text{ét},s}$ が成り立つ．よって，$t_s=(t_{\mathrm{dR},s},t_{\text{ét},s})$ は有理的サイクルとなる．これで，$t_s$ が絶対 Hodge サイクルであることが示された． □

**注意 3.14（[DMOS82, Chapter I, Remark 2.16]）** 定理 3.13 の「テンソル版」も成立する（証明も定理 3.13 と同様である）．

## 3.4 Deligne の原理 A

本小節では，定理 3.9 の証明の第 3 段階で得られる結果，すなわち「CM アーベル多様体の場合には定理 3.9 の主張が正しい」という定理を紹介する．ここで扱う内容については，証明を省いて結果のみを述べるものも多い．興味のある読者は，原著 [DMOS82, Chapter I, §§3–5] を参照して頂きたい．

Deligne は「考えているコホモロジー類が絶対 Hodge サイクルかどうかを群作用の言葉で与えられた条件で判定できる」ということを主張する，“Principle A" と呼ばれる定理を証明した．

**事実 3.15（原理 A，Deligne [DMOS82，Chapter I]）** $\Lambda$ を有限集合とする．$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影的代数多様体の族とする．各 $\alpha\in\Lambda$ に対して，部分集合 $M_\alpha\subseteq\mathbb{Z}\cap[0,2\dim X_\alpha]$ を固定する．$I$ を空でない有限集合とし，各 $i\in I$ に対して，テンソル $T_i\in\mathfrak{T}$ と絶対 Hodge サイクル $t_i\in T_i$ が与えられているとする．$G$ を直積群

$$\prod_{\alpha\in\Lambda}\prod_{m\in M_\alpha}\mathrm{GL}(H^m(X_\alpha(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$$

に於ける $\{t_i\}_{i\in I}$ の固定化部分群とする[*15]．$t$ を $\mathfrak{T}$ に属するテンソルの元とし，更に $t$ は $G$ の作用で不変であると仮定する．このとき，$t$ は絶対 Hodge サイクルである．

**事実 3.16（Deligne [DMOS82, Chapter I, §5]）** $\Lambda$ を有限集合とする．$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を $\mathbb{C}$ 上の CM アーベル多様体の族とし，$\mathfrak{T}:=\mathfrak{T}(\{(X_\alpha,\{1\})\}_{\alpha\in\Lambda})$ とおく．$\mathfrak{T}$ に属

*15 ただし，$(\alpha,n)\neq(\beta,m)$ のとき，群 $\mathrm{GL}(H^m(X_\alpha(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))$ は $\mathbb{Q}(r)$ 及び $H^m(X_\beta(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ に自明に作用するものとする．一方，各 $\nu\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ は $H^m(X_\beta(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ には自明に作用し，$\mathbb{Q}(r)$ には $\nu^{-r}$ 倍写像で作用しているとする．

するテンソル内の埋め込み id に関する Hodge サイクル全体の集合を $C_H(\mathfrak{T})$ とおき，絶対 Hodge サイクル全体の集合を $C_{AH}(\mathfrak{T})$ とおく．$G_H$ 及び $G_{AH}$ をそれぞれ，直積群

$$\prod_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{GL}(H_1(X_\alpha(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$$

に於ける $C_H(\mathfrak{T})$ と $C_{AH}(\mathfrak{T})$ の固定化部分群とする．このとき，$G_H=G_{AH}$ が成り立つ．

**事実 3.16 の証明の概要**　定義より，$G_H\subseteq G_{AH}$ であることは明らかなので，$G_H\supseteq G_{AH}$ であることを示せばよい．$G_H$ と $G_{AH}$ は共に「$A_\alpha$ たちの自己準同型」という絶対 Hodge サイクルを固定するので，どちらもトーラスであることが分かる．従って，余指標群[*16]の包含関係 $Y(G_H)\supseteq Y(G_{AH})$ が成立することを示せばよい．これは以下で述べる定理 3.18 を用いて具体的な絶対 Hodge サイクルを構成して，それらへの作用を見ることで示すことが出来る． □

ここで，「分裂する $E$ 反線型 Hermite 形式」という概念を定義しておこう．

**定義 3.17（分裂する Hermite 形式）**　$d$ を正の整数，$V$ を $d$ 次元 $E$ ベクトル空間，$H$ を $V$ 上の非退化 $E$ 反線型 Hermite 形式とする．$E$ の最大総実部分体を $F$ と書く．各埋め込み $\sigma\colon F\hookrightarrow\mathbb{R}$ に対して，Hermite 形式 $H$ から $\mathbb{C}=E\otimes_F(\mathbb{R},\sigma)$ 上のベクトル空間 $V_\sigma:=V\otimes_F(\mathbb{R},\sigma)$ の上の $\mathbb{C}$ 反線型 Hermite 形式 $H_\sigma$ が定まる．$H_\sigma$ の符号を $(a_\sigma,b_\sigma)$ とおく．また，Hermite 形式 $H$ から 1 次元 $E$ ベクトル空間 $\bigwedge_E^d V$ 上の $E$ 反線型 Hermite 形式 $\wedge H$ が定まる．基底を 1 つ固定して，$\bigwedge_E^d V$ を $E$ と同一視すると，ある $f\in F^\times$ が存在して，任意の $x,y\in E$ に対して

$$\wedge H(x,y)=fx\bar{y}$$

が成立する．このような $f$ の $F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ における像を $\mathrm{disc}(H)$ と書き，$H$ の**判別式**と呼ぶ．尚，$\mathrm{disc}(H)$ は $\bigwedge_E^d V$ の基底の取り方に依らない．以上の設定の下で，$(V,H)$ に関する次の 2 条件は同値であることが示せる ([DMOS82, Chapter I, Corollary 4.2])．

(1) 任意の埋め込み $\sigma\colon F\hookrightarrow\mathbb{R}$ に対して $a_\sigma=b_\sigma$ が成立し（従って $d$ は偶数であることに注意），更に $\mathrm{disc}(H)=(-1)^{d/2}$ が成り立つ．

[*16] G を代数群とするとき，$Y(\mathrm{G}):=\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}},\mathrm{G})$ を $G$ の余指標群と呼ぶ．

(2) $H$ に関する $d/2$ 次元の完全等方部分空間が存在する．すなわち，$V$ の $d/2$ 次元 $E$ 部分空間 $W$ で，任意の $w \in W$ に対して $H(w,w)=0$ となるものが存在する．

$(V,H)$ がこの同値な 2 条件件を満たすとき，Hermite 形式 $H$ は**分裂する**という．

**例** $d$ を正の偶数とし，$E^d$ 上の $E$ 反線型 Hermite 形式 $H_0$ を

$$H_0((x_i)_i,(y)_i) := \sum_{i=1}^{d/2}(x_i\bar{y}_{i+\frac{d}{2}} + x_{i+\frac{d}{2}}\bar{y}_i)$$

で定めると，$H_0$ は分裂する非退化 $E$ 反線型 Hermite 形式である．実は，分裂する非退化 $E$ 反線型 Hermite 形式を持つ $E$ 上 $d$ 次元の任意の Hermite 空間 $(V,H)$ は $(E^d,H_0)$ と同型になる ([DMOS82, Chapter I, Proposition 4.1, Corollary 4.2(の証明)] を参照せよ)．

**定理 3.18（[DMOS82，Chapter I，Theorem 4.8]）** $A$ を $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体，$E$ を CM 体とし，$v\colon E \longrightarrow \mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ を環準同型写像とする．$d := \dim_E H^1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ とおく．次の 2 条件を満たす $A$ の偏極 $\theta$ が存在すると仮定する．

(a) $\theta$ の Rosati 対合は $E$ の複素共役と一致する．
(b) 分裂する $H^1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ 上の $E$ 反線型 Hermite 形式 $\phi$ と $\bar{f}=-f$ を満たす元 $f\in E^\times$ が存在して，$\psi(x,y) := \mathrm{Tr}_{E/\mathbb{Q}}(f\phi(x,y))$ が偏極 $\theta$ に対応する Riemann 形式になる．

このとき，$H^d(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\left(\bigwedge_E^d H^1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\right)(d/2)$ の全ての元は絶対 Hodge サイクルである．

**証明** 定理 3.18 の証明は，前節の定理 2.4 の証明と全く同様な，連結志村多様体を用いた議論で示される．

$n := [E:\mathbb{Q}]$ とおき，$\mathcal{O}_E$ の $\mathbb{Z}$ 加群としての基底 $e_1,\dots,e_n$ を固定する．各 $e\in\mathcal{O}_E$ に対して，$\mathcal{O}_E$ における「$e$ 倍写像」の基底 $e_1,\dots,e_n$ に関する表現行列を $M(e)$ と書く．

$V := H^1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ とおき，

$$h_0\colon \mathbb{C}\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Lie}(A/\mathbb{C}))$$

を $A$ の複素構造から定まる $\mathbb{R}$ 代数の準同型とする．条件 (a), (b) を満たす偏極 $\theta$ をとる．$\mathrm{G}_0$ を $E$ 上の Hermite 形式 $\phi$ を保つ $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\,\mathrm{SL}(V;E)$ の部分群とし，$X_0^+$ を $h_0$ の $\mathrm{G}_0(\mathbb{R})$ 共役類とする．このとき，組 $(\mathrm{G}_0, X_0^+)$ は連結志村データになる．$\widetilde{\mathrm{G}}_0 := \mathrm{Sp}(V;\psi)$ とおき，$h_0$ の $\widetilde{G}_0$ 共役類を $\widetilde{X}_0^+$ とおく．$N \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ とし，$V$ の $\mathbb{Z}$ 格子 $L := H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に関する $\mathrm{G}_0(\mathbb{Q})$ と $\widetilde{\mathrm{G}}_0(\mathbb{Q})$ の法 $N$ 合同部分群をそれぞれ，$\Gamma$, $\widetilde{\Gamma}$ とおく．このとき，連結志村データの埋め込み $(\mathrm{G}_0, X_0^+) \hookrightarrow (\widetilde{\mathrm{G}}_0, \widetilde{X}_0^+)$ により，連結志村多様体の埋め込み

$$S := \mathrm{Sh}_\Gamma(\mathrm{G}, X) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{\mathrm{G}}, \widetilde{X}) \subseteq \mathcal{A}_{\dim A, K(N)}$$

が定まる．この射で普遍アーベル多様体を引き戻すことで，$S$ 上のアーベルスキーム $\pi\colon X \longrightarrow S$ が定まる．このアーベルスキームについて次が成立する．

(i) $h_0 \in X_0^+$ の像となる $S$ の点を $s_0$ とおくと，$X_{s_0} \simeq A$ が成立する．

(ii) 任意の点 $s \in S(\mathbb{C})$ に対して，$X_s$ は埋め込み $E \longrightarrow \mathrm{End}(X_s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と条件 (a), (b) を満たす偏極を持つ．

(iii) ある点 $s_1 \in S$ が存在して，$X_{s_1} \simeq A_0 \otimes \mathcal{O}_E$ が成立する．ただし，$A_0$ は $d/2$ 次元のアーベル多様体であり，$A_0 \otimes \mathcal{O}_E$ は $A_0$ の $n$ 個の直積に $e \in \mathcal{O}_E$ の作用を $\mathrm{id}_{A_0} \otimes M(e)$ で定義したアーベル多様体である[*17]．

$\phi$ は分裂する Hermite 形式なので，$V \otimes_{E^+} \mathbb{R}$ 上の符号は $(d/2, d/2)$ である．これに注意すると，$W := \mathrm{Hom}_E(V, E)$ とおくとき，自然な同型

$$(2\pi i)^{d/2} \bigwedge_E^d W \simeq (2\pi i)^{d/2} \bigwedge_E^d H^1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \subseteq H^d(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(d/2) \cap H^{d/2,d/2}(A)$$

が成立する．定義より，$(2\pi i)^{d/2} \bigwedge_E^d W$ には群 $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}(V, E)$ が自明に作用するので，定理 2.13 の証明と同様な議論により，任意の元 $t \in (2\pi i)^{d/2} \bigwedge_E^d W \subseteq \bigwedge_{\mathbb{C}}^d (W \otimes_E \mathbb{C})$ は Gauss–Manin 接続について水平な大域切断 $\widetilde{t} \in \Gamma(S, \bigwedge_E^d \mathcal{H}^1(X/S))(d/2)$ にのびる．更に次の主張が示せる．

**主張 3.19** $t_{s_1}$ は $A_0 \otimes \mathcal{O}_E/\mathbb{C}$ の絶対 Hodge サイクルである．

---

*17 このような点 $s_1$ の存在は，$E$ ベクトル空間 $V$ の Hermite 形式 $\phi$ に関する直交基底を取れば，命題 2.15 の証明における「CM 楕円曲線の直積と同種なアーベル多様体に対応する点の存在の証明」と同様な議論で示せる．

**主張 3.19 の証明** $B := A_0 \otimes \mathcal{O}_E$ とおく．$\sigma\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を任意の埋め込みとする．このとき，自然な写像による可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^d(\sigma A_0(\mathbb{C}), \mathbb{Q})(d/2) \otimes_{\mathbb{Q}} E \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & H^d_{\mathbb{A}}(\sigma A_0/\mathbb{C})(d/2) \otimes_{\mathbb{Q}} E \arrow[d, "\simeq"] \\
\left( \bigwedge\nolimits^d_{E\otimes(\mathbb{C}\times\mathbb{A}_f)} H^1(\sigma B(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \right)(d/2) \arrow[r] & \left( \bigwedge\nolimits^d_{E\otimes(\mathbb{C}\times\mathbb{A}_f)} H^1_{\mathbb{A}}(\sigma B/\mathbb{C}) \right)(d/2) \arrow[d, hook] \\
 & H^d_{\mathbb{A}}(\sigma B/\mathbb{C})(d/2)
\end{tikzcd}$$

が成立する．これらの可換図式から埋め込み $\iota\colon C^d_{\mathrm{AH}}(A_0) \otimes_{\mathbb{Q}} E \hookrightarrow C^d_{\mathrm{AH}}(B)$ が定まる．$A_0$ は $d/2$ 次元の射影的代数多様体なので，$C^d_{\mathrm{AH}}(A_0) \simeq H^d(A_0, \mathbb{Q})(d/2)$ が成り立つ．実際，これは次の議論から確かめられる．$x$ を $A_0$ の任意の閉点とするとき，$C^d_{\mathrm{AH}}(A_0)$ はサイクルの像 $[x] \neq 0$ を含むので，$C^d_{\mathrm{AH}}(A_0) \neq 0$ である．$C^d_{\mathrm{AH}}(A_0)$ は定義より，自然に $H^d(A_0, \mathbb{Q})(d/2)$ の $\mathbb{Q}$ 部分ベクトル空間と見做せ，$\dim_{\mathbb{Q}} H^d(A_0, \mathbb{Q})(d/2) = 1$ なので，$C^d_{\mathrm{AH}}(A_0) \simeq H^d(A_0, \mathbb{Q})(d/2)$ が従う．このことから，

$$t_{s_1} \in \left( \bigwedge\nolimits^d_{E\otimes(\mathbb{C}\times\mathbb{A}_f)} H^1_{\mathbb{A}}(B/\mathbb{C}) \right)(d/2) = \iota(C^d_{\mathrm{AH}}(A_0) \otimes_{\mathbb{Q}} E) \subseteq C^d_{\mathrm{AH}}(B)$$

が成り立つことが分かる．これで，主張 3.19 が示された． □

以上の議論により，定理 3.13 が適用でき，$t = \widetilde{t}_{s_1}$ も絶対 Hodge サイクルであることが分かる．これで，定理 3.18 の証明が完了した． □

事実 3.15 と事実 3.16 から次の系が従う．

**系 3.20** 事実 3.16 の仮定と記号設定のもとで，$C_H(\mathfrak{T}) = C_{AH}(\mathfrak{T})$ が成り立つ．

**系 3.21** $X$ を $L$ 上の CM アーベル多様体とする．このとき，任意の $p \geq 0$ と任意の埋め込み $\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して，$C^{2p}_{\mathrm{H}}(X/L; \sigma) = C^{2p}_{\mathrm{AH}}(X/L)$ が成り立つ．

## 3.5 定理 3.9 の証明

前小節までの議論で，定理 3.9 の証明の第 2 段階と第 3 段階が完了している．あとは第 1 段階，すなわち「任意の Hodge サイクルは，（ある点でのファイバーが CM アーベル多様体となるアーベルスキームの底空間になっているような）スキーム $S$ 上の族にのばせる」ということを証明することが残っている．本節では，志村多様体を用いてこれを示して，定理 3.9 の証明を完遂する．

**定理 3.9 の証明** $(A, \lambda)$ を $\mathbb{C}$ 上の $g$ 次元偏極アーベル多様体とし，事実 3.16 の記法で $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}(\{(A, \{1\})\})$ とおく．$I$ を空でない有限集合とし，各 $i \in I$ に対して，テンソル $T_i \in \mathfrak{T}$ と絶対 Hodge サイクル $t_i \in T_i$ が与えられているとする．この $t_i$ たちのうち 1 つ，$t_{i_0}$ が $A$ の偏極構造 $\lambda$ に対応する元

$$t_{i_0} = [\lambda] \in H^1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{\otimes 2}(1)$$

であると仮定してよい．$G$ を直積群

$$\mathrm{GL}(H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})) \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$$

に於ける $\{t_i\}_{i \in I}$ の固定化部分群とする．$G$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数群になる．更にこの群は $t_{i_0}$ を固定するので，$A$ の偏極 $\lambda$ に付随する Riemann 形式 $R_\lambda$ を固定する．従って，$G$ は簡約代数群であり，更に一般斜交群の

$$\mathrm{GSp}\,(H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}); R_\lambda) =: \widetilde{G} \tag{3.2}$$

閉部分群と見做せる[*18]．更に $A$ の複素構造から群準同型 $h \colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow G(\mathbb{R})$ が定まる．$h$ の $G(\mathbb{R})$ 共役類を $X$ と書く．このようにして定まる志村データ $(G, X)$ は埋め込み (3.2) をもつ Hodge 型 ([今井, 定義 4.5]) である．$\widetilde{K}$ を（アーベル多様体のモジュライ空間 $\mathcal{A}_{g,K}$ が精モジュライになるような）十分小さな $\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群とし，$K := \widetilde{K} \cap G(\mathbb{A}_f)$ とする．このとき，志村多様体

$$S := \mathrm{Sh}_K(G, X) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times (G(\mathbb{A}_f)/K)$$

[*18] $G$ は簡約代数群であることを示すには，$G(\mathbb{R})$ がコンパクト実形式を持つことを言えばよい．実際，$h \colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow G(\mathbb{R}) \subseteq \widetilde{G}(\mathbb{R})$ から誘導される $\mathrm{ad}(h(i))$ は $\mathrm{Lie}(\widetilde{G}_{\mathbb{R}})$ 上の Cartan 対合になっており，これを制限したものは $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ 上の Cartan 対合になる．このことから，$\widetilde{G}$ のコンパクト実形式と $G(\mathbb{C})$ の共通部分が $G(\mathbb{R})$ のコンパクト実形式になることが分かる．

は $\mathbb{C}$ 上の準射影的代数多様体になる．

$\mathcal{A}_{g,K}$ 上の普遍アーベルスキームを埋め込み $S \longrightarrow \mathcal{A}_{g,K}$ により引き戻して得られる $S$ 上のアーベルスキームを $\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$ と書く．点 $s_0 := [h, 1] \in S$ における $\mathcal{X}$ のファイバー $\mathcal{X}_{s_0}$ は $A$ と同型である．$S$ の各連結成分は，$X$ の連結成分を（$G(\mathbb{Q})$ の像に含まれるような）$G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ の数論的部分群で割った商空間と複素解析的多様体として同型である ([今井, 補題 3.1, 注意 3.2])．各 $i \in I$ に対して，$\mathbb{C}$ ベクトル空間 $F^0(T_i \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ には $G(\mathbb{Q})$ が自然に作用しているので，前節の定理 2.13 の証明で行った議論と同様にして，$F^0(T_i \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ をファイバーとする $S_{\mathrm{an}}$ 上の局所系 $\mathcal{F}^0\mathcal{T}_i$ が定義できる．定義より，$\mathcal{F}^0\mathcal{T}_i$ は局所系 $R^q\pi_{\mathrm{an}*}\mathbb{C}$ 及びその双対と Tate 捻り $\mathbb{C}(r)$ を何回か（テンソル $T_i$ を構成する際に用いた $H^q(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 及びその双対，Tate 捻り $\mathbb{Q}(r)$ と同じ数だけ）テンソルすることで構成されるフィルター付き局所系の 0 次のフィルトレーションと自然に同型である．$t_i$ は $G(\mathbb{Q})$ 不変な $F^0(T_i \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ の元なので，$\mathcal{F}^0\mathcal{T}_i$ の大域切断 $\widetilde{t}_i$ を定める．このとき，定義より

$$t_i = \widetilde{t}_{i,s_0} \in \mathcal{F}^0\mathcal{T}_{i,s_0} = F_0(T_i \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$$

が成り立つ．$\widetilde{t}_i$ を de Rham コホモロジー層 $\mathcal{H}^q(\mathcal{X}/S)(r)$ たちのテンソル積 $\mathcal{T}_{i,\mathrm{dR}}$ の大域切断と見做すと，定義より $\widetilde{t}_i$ は Gauss–Manin 接続について水平である．また，$\widetilde{t}_i$ はエタール高次順像 $\mathcal{H}^n_{\text{ét}}(X/S)$ たちをテンソルすることで得られる $S_{\mathrm{an}}$ 上のエタール層 $\mathcal{T}_{i,\text{ét}}$ の大域切断と自然に同一視できる．

志村多様体 $S$ の中には，特殊点が Zariski 位相について稠密に含まれている ([今井, 補題 5.9])．そこで，特殊点 $s_1 \in S$ を 1 つとる．Siegel モジュラー多様体の特殊点は CM アーベル多様体に対応するので ([越川, 補題 5.18])，埋め込み $S \longrightarrow \mathcal{A}_{g,K}$ により $\mathcal{X}_{s_1}$ は CM アーベル多様体になる．従って，系 3.20 より，$\widetilde{t}_{i,s_1}$ は絶対 Hodge サイクルである．以上の議論により，$(\widetilde{t}_{\mathrm{dR}}, \widetilde{t}_{\text{ét}}) := (\widetilde{t}_i, \widetilde{t}_i)$ に対して，定理 3.13 を適用できる．よって $t_i = \widetilde{t}_{i,s_0}$ は絶対 Hodge サイクルである． □

## 3.6 絶対 Hodge サイクルと周期

本小節では，定理 3.9 を用いて $p = q$ の場合の定理 2.4 の別証明を与える．すなわち，次を示す．

「$p$ を正の整数とし，$(A, \Phi)$ を $(p, p)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の任意のアーベル多様体とする．$\omega, \nu \in H^n_{\mathrm{dR}}(A/\overline{\mathbb{Q}}) \setminus \{0\}$ をそれぞれ，$\Phi$ から誘導さ

れる $k^\times$ の作用に関する指標 $\chi^n$, $\bar{\chi}^n$ の固有ベクトルとする．このとき，$P(\omega) \sim P(\nu) \sim (2\pi i)^p$ が成立する．」

**証明** $V^* := \mathrm{Hom}_k(H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), k)$ とおき，$\{\xi_i\}_{i=1}^n$ を $V$ の $k$ 基底とする．このとき，2 つの $(p, p)$ 形式

$$\Omega := \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \in H^{p,p}(A_{\mathbb{C}})$$
$$\overline{\Omega} := \bar{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}_p \in H^{p,p}(A_{\mathbb{C}})$$

が定まる．定義より $\Omega$ と $\overline{\Omega}$ はそれぞれ指標 $\chi^n$, $\bar{\chi}^n$ の固有ベクトルであり，

$$(2\pi i)^p(\Omega + \overline{\Omega}), \frac{(2\pi i)^p}{\sqrt{-d}}(\Omega - \overline{\Omega}) \in C_{\mathrm{H}}^{2p}(X/\mathbb{C}; \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$$

が成り立つ．従って，$(2\pi i)^p\Omega$ と $(2\pi i)^p\overline{\Omega}$ は $C_{\mathrm{H}}^{2p}(X/\mathbb{C}; \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Q}} k$ に属するので，定理 3.9 と事実 3.10 より，

$$(2\pi i)^p\Omega, (2\pi i)^p\overline{\Omega} \in C_{\mathrm{AH}}^{2p}(A/\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} k = C_{\mathrm{AH}}^{2p}(A/\overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Q}} k \subseteq H^{2p}(A/\overline{\mathbb{Q}})$$

が成立する．よって，

$$P(\omega) \sim P(2\pi i\Omega) \sim (2\pi i)^p$$
$$P(\nu) \sim P(2\pi i\overline{\Omega}) \sim (2\pi i)^p$$

が得られる． □

**注意 3.22** 上記の証明の鍵は，$\mathbb{C}$ 上で解析的に構成した $(2\pi i)^p(\Omega + \overline{\Omega})$ というコホモロジー類が**「Hodge サイクルである」という $\mathbb{C}$ 上の解析的な話だけで確認可能な条件で，実は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された de Rham コホモロジー類であることが分かった**という部分である．

# 付録 A　De Rham コホモロジー

本付録では de Rham コホモロジーの理論の復習と補足を行う．A.1 節で，代数多様体，複素解析的多様体の上の de Rham コホモロジーの定義を復習する．A.2 節では Hodge 分解について復習する．A.3 節では，代数曲線の de Rham コホモロジーを第二種微分形式と呼ばれる有理微分形式を用いて記述する．この第二種微分形式を用いた記述は，付録 C で Fermat 曲線の周期を計算する際に用いられる．

## A.1 De Rham 複体と de Rham コホモロジー

まず，（代数的な）de Rham コホモロジーの定義を思い出そう．

**定義 A.1** $F$ を任意の体とし，$X$ を $F$ 上の滑らかな射影的代数多様体とする．このとき，de Rham 複体 $\Omega^{\bullet}_{X/F}$ の超コホモロジー

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/F) := \mathbb{H}^i(X, \Omega^{\bullet}_{X/F})$$

を代数多様体 $X/F$ の **de Rham コホモロジー**と呼ぶ．

**注意 A.2** 超コホモロジーに伴う第 1 スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^q_{X/F}) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega^{\bullet}_{X/F}) = H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X/F)$$

を **Hodge to de Rham スペクトル系列**と呼ぶ．このスペクトル系列から $H^i_{\mathrm{dR}}(X/F)$ に下降フィルトレーション $F^{\bullet}H^i_{\mathrm{dR}}(X/F)$ が定まる．このフィルトレーションは **Hodge フィルトレーション**と呼ばれている．A.2 節で紹介する **Hodge 分解**の帰結として，このフィルトレーションは $E_1$ 退化することが分かる．従って，自然な同型

$$\mathrm{gr}^p H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X/F) := F^p H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X/F)/F^{p+1}H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X/F) \simeq H^q(X, \Omega^p_{X/F})$$

が成立する．

**注意 A.3** 定義 A.1 の状況で，$F = \mathbb{C}$ とする．このとき，正則微分形式の層のなす複体 $\Omega^{\bullet}_{X_{\mathrm{an}}}$ を用いて，解析的な de Rham コホモロジー

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}}) := \mathbb{H}^i(X_{\mathrm{an}}, \Omega^{\bullet}_{X_{\mathrm{an}}})$$

が定義できる．代数的な Hodge to de Rham スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^q_{X/\mathbb{C}}) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C})$$

から解析的な Hodge to de Rham スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(X_{\mathrm{an}}, \Omega^q_{X_{\mathrm{an}}}) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}})$$

への自然な射が存在する．今，$X$ は射影的な代数多様体であるため，Serre の GAGA の原理により，各 $E_1^{p,q}$ 項は同型になる ([Ser56])．従って自然な同型

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}) \simeq H^i_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}})$$

が成り立つ．本稿では，この同型により代数的な de Rham コホモロジーと解析的な de Rham コホモロジーを同一視する．

$X$ を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな $n$ 次元射影的代数多様体とする．各点 $x \in X_{\mathrm{an}}$ に於いて，正則な局所座標近傍

$$(z_x^{(1)}, \ldots, z_x^{(n)}) \colon U_x \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

を固定しておく．$X_{\mathrm{an}}$ 上の $\mathbb{C}$ 値 $C^\infty$ 級関数の層を $\mathcal{C}_X^\infty$ と書き，$\mathbb{C}$ 値 $C^\infty$ 級微分形式の層なす複体を $\mathcal{A}_X^\bullet$ と書く．1 次微分形式の層 $\mathcal{A}_X^1$ は直和分解

$$\mathcal{A}_X^1 = \mathcal{A}_X^{1,0} \oplus \mathcal{A}_X^{0,1}$$

を持つ．ここで $\mathcal{A}_X^{1,0}$ は各点 $x$ の近傍において，$\sum_{j=1}^n f dz_x^{(j)}$ (各 $f_i$ は $C^\infty$ 級関数) という形をした微分形式のなす層であり，$\mathcal{A}_X^{0,1}$ は各点 $x$ の近傍において，$\sum_{j=1}^n f d\bar{z}_x^{(j)}$ (各 $f_i$ は $C^\infty$ 級関数) という形をした微分形式のなす層である．各 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\mathcal{A}_X^{p,q} := \bigwedge_{\mathcal{C}_X^\infty}^{p} \mathcal{A}_X^{1,0} \otimes_{\mathcal{C}_X^\infty} \bigwedge_{\mathcal{C}_X^\infty}^{q} \mathcal{A}_X^{0,1}$$

と定める．このとき，各 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して直和分解

$$\mathcal{A}_X^r = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{A}_X^{p,q}$$

が得られる．$\mathcal{A}_X^{\bullet,\bullet}$ は 2 方向の微分射

$$\partial^{p,q} \colon \mathcal{A}_X^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p+1,q};\ \omega \longmapsto d\omega \text{ の } \mathcal{A}_X^{p+1,q} \text{ 成分}$$
$$\overline{\partial}^{p,q} \colon \mathcal{A}_X^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1};\ \omega \longmapsto d\omega \text{ の } \mathcal{A}_X^{p,q+1} \text{ 成分}$$

により二重複体をなす．次の事実が知られている．

**事実 A.4** 任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，自然な同型

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}}) \simeq \mathbb{H}^i(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}_C^\bullet) \simeq H^i(\Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}_X^\bullet)) \simeq H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$

が成立する．ここで，$H^i(\Gamma(X_{\mathrm{an}},\mathcal{A}_X^\bullet))$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の複体 $\Gamma(X_{\mathrm{an}},\mathcal{A}_X^\bullet)$ のコホモロジーである．

**証明の概要**　$\mathcal{C}_X^\infty$ は $X_{\mathrm{an}}$ の任意の開被覆に対して 1 の分割をもつので, 各 $\mathcal{A}_X^{p,q}$ と $\mathcal{A}_X^r$ は $X_{\mathrm{an}}$ 上の**細かい層** (**fine sheaf**, 例えば [Voi02, Definition 4.35]) である．従って，これらの層は大域切断をとる関手 $\Gamma(X_{\mathrm{an}},-)$ について非輪状 (acyclic) である ([Voi02, Proposition 4.37])．この事実と Poincaré の補題により，複体 $\mathcal{A}_X^\bullet$ は定数層 $\mathbb{C}$ の非輪状な対象による分解を与えるので，同型 $H^i(\Gamma(X_{\mathrm{an}},\mathcal{A}_X^\bullet))\simeq H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ が成立する[*19]．また，$\mathcal{A}_X^\bullet$ は二重複体 $\mathcal{A}_X^{\bullet;\bullet}$ の全複体 (total complex) であることと，Dolbeault 複体 $\mathcal{A}_X^{0;\bullet}$ が完全列であること ([Voi02, Proposition 2.36]) から，$\Omega_{X_{\mathrm{an}}}^\bullet\longrightarrow\mathcal{A}_X^{\bullet;\bullet}$ は解析的 de Rham 複体の分解を与えていることが分かり，同型 $H_{\mathrm{dR}}^i(X_{\mathrm{an}})\simeq H^i(\Gamma(X_{\mathrm{an}},\mathcal{A}_X^\bullet))$ が得られる． □

**定義 A.5**　微分形式によるサイクルの積分

$$H^i(\Gamma(X_{\mathrm{an}},\mathcal{A}_X^\bullet))\times H_i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{C};\ (\eta,\gamma)\longmapsto\int_\gamma\eta$$

により，双加法的写像

$$H_{\mathrm{dR}}^i(X_{\mathrm{an}})\times H_i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{C} \tag{A.1}$$

が誘導される．

**注意 A.6**　写像 (A.1) から誘導される写像

$$H_{\mathrm{dR}}^i(X_{\mathrm{an}})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}),\mathbb{C})\simeq H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$$

は事実 A.4 の同型写像と一致する．（この事実の詳細については，例えば [Voi02, Remark 4.48] を参照せよ．）

## A.2　Hodge 分解

本小節では de Rham コホモロジーの Hodge 分解について復習する．（詳細については，[Voi02] 等の文献を参照して頂きたい．）$X$ が射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ の滑らかな

---

*19 特異コホモロジーの（位相幾何学の多くの教科書に載っている）「特異ホモロジーを定める複体の双対複体のコホモロジー群」による定義と，定数層のコホモロジー群による定義の整合性については，例えば [Voi02, Theorem 4.47] 参照．

閉部分多様体であるとする．このとき，$X_{\mathrm{an}}$ には $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C},\mathrm{an}}$ から誘導される Kähler 多様体の構造が入る．これにより，$C^\infty$ 級微分形式の空間 $\Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^i_X)$ 上に $L^2$ 内積が定義され，微分写像 $d\colon \Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^i_X) \longrightarrow \Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^{i+1}_X)$ の $L^2$ 内積に関する随伴写像 $d^*\colon \Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^{i+1}_X) \longrightarrow \Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^i_X)$ が定義される．この随伴写像を用いて，$\Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^i_X)$ 上の Laplace 作用素 $\Delta_d = \Delta_d^{(i)} := dd^* + d^*d$ を定義できる．次が成立することが知られている．

**事実 A.7**　直和分解 $\Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^i_X) = \operatorname{Ker}\Delta_d \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} d^*$ が成立する．

この事実と $\Delta_d$ の定義から，簡単な議論で次の系が得られる．

**系 A.8**　自然な同型 $\operatorname{Ker}\Delta_d^{(i)} \simeq H^i(\Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^\bullet_X))$ が成立する．

同様に，$\Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^i_X) = \bigoplus_{p+q=i} \Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^{p,q}_X)$ の 2 方向の微分写像 $\partial, \overline{\partial}$ についても，随伴写像 $\partial^*, \overline{\partial}^*$ がそれぞれ定義され，2 つの Laplace 作用素，$\Delta_\partial := \partial\partial^* + \partial^*\partial$ 及び $\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ が定義される．Laplace 作用素の間に次の関係が成立することが知られている．

**事実 A.9**　$\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\overline{\partial}}$ が成立する．

事実 A.9 より，

$$\Delta_d(\Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^{p,q}_X)) = \Delta_\partial(\Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^{p,q}_X)) \subseteq \Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^{p,q}_X)$$

が成り立つ．このことから更に $\operatorname{Ker}\Delta_d^{(i)}$ の任意の元の $\mathcal{A}^{p,q}_X$ 成分もやはり $\operatorname{Ker}\Delta_d^{(i)}$ に属することが分かる．従って，事実 A.4 及び系 A.8 と合わせることで，次の系が得られる．

**系 A.10（Hodge 分解）**　$H^{p,q}(X/\mathbb{C}) := \operatorname{Ker}\Delta_d^{(p+q)} \cap \Gamma(X_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^{p,q}_X)$ とおく．このとき，自然な同型 $H^{p,q}(X/\mathbb{C}) \simeq H^q(X, \Omega^p_{X/F})$ 及び直和分解

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}}) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X/\mathbb{C})$$

が成立する．

**注意 A.11**　Hodge 分解，すなわち系 A.10 の直和分解は $X_{\mathrm{an}}$ の Kähler 計量（特に，$X$ の $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ への埋め込み）には依らない．Hodge 分解は Hodge フィルトレーションの関手的な分裂写像を与えている．

## A.3 曲線上の第 2 種微分と de Rham コホモロジー

本小節では代数曲線の 1 次 de Rham コホモロジーを扱う．本小節の前半では，「有理微分形式を用いた deRham コホモロジーの記述」について説明し，後半では，その「第二種微分形式を用いた表示」と前小節で述べた「$C^\infty$ 級微分形式を用いた表示」を比較する．本小節で扱う内容を詳細に説明している文献を見つけることが出来なかったので，なるべく丁寧に証明を付けることにした．

まず，記号をいくつか設定しておこう．$F$ を標数 0 の代数閉体とし，$C$ を $F$ 上の連結な非特異射影曲線とする．$C$ の閉点全体の集合を $|C|$ と書き，各閉点 $x \in |C|$ に対して，離散付値環 $\mathcal{O}_{C,x}$ の素元 $t_x$ を固定しておく．$C$ の生成点を $\eta$ とおく．$C$ 上の有理微分形式全体のなす 1 次元 $F(C)$ ベクトル空間を $\mathcal{K}_C$ とおく．すなわち，$\mathcal{K}_C := \Omega_{C/F,\eta}$ と定める．

**定義 A.12（第 2 種微分）** 有理微分形式 $\omega \in \mathcal{K}_C$ が次の条件を満たすとき，$\omega$ は**第 2 種微分**であるという．

> 「任意の閉点 $x \in C$ に対して，$\omega$ の $x$ における留数が 0 である．すなわち，$x$ における $\omega$ の冪級数展開
>
> $$\omega_x = \sum_n c_n(\omega_x) t_x^n dt_x \in F((t_x))dt_x$$
>
> の $-1$ 次の係数 $c_{-1}(\omega_x)$ が 0 である．」

有理微分形式 $\eta$ がこの条件を満たすかどうかは，素元 $t_x$ のとり方に依らないことに注意する．第 2 種微分全体のなす $\mathcal{K}_C$ の部分 $F$ ベクトル空間を $\mathcal{K}_C^{(2)}$ と書く．

第 2 種微分の定義から，微分写像 $d\colon F(C) \longrightarrow \mathcal{K}_C;\ f \longmapsto df$ の像が $\mathcal{K}_C^{(2)}$ に含まれることは明らかである．従って，商 $\mathcal{K}_C^{(2)}/dF(C)$ が定義される．

**命題 A.13** 関手的な同型 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/F) \simeq \mathcal{K}_C^{(2)}/dF(C)$ が成立する．

**証明** 脆弱層を用いた de Rham 複体 $\Omega^{\bullet}_{C/F}$ の分解

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
\mathcal{I}^{\bullet,\bullet} & & \eta_*F(C)/\mathcal{O}_C \arrow[u, "\delta^{0,1}"] \arrow[r, "d^{0,1}"] & \eta_*\mathcal{K}_C/\Omega^1_{C/F} \arrow[u, "\delta^{1,1}"] \arrow[r, "d^{1,1}"] & 0 \\
 & := & \eta_*F(C) \arrow[u, "\delta^{0,0}"] \arrow[r, "d^{0,0}"] & \eta_*\mathcal{K}_C \arrow[u, "\delta^{1,0}"] \arrow[r, "d^{1,0}"] & 0 \\
\Omega^{\bullet}_{C/F} \arrow[uu] & & \mathcal{O}_C \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Omega^1_{C/F} \arrow[u] \arrow[r, "d"] & 0
\end{tikzcd}$$

を考える．ここで，$(-1)^p\delta^{p,q}$ は自然な射，$d^{p,q}$ は微分射である．二重複体 $\mathcal{I}^{\bullet,\bullet}$ の全複体を $\mathrm{Tot}(\mathcal{I})^{\bullet}$ とおく．定義より，複体 $\mathrm{Tot}(\mathcal{I})^{\bullet}$ の微分写像

$$D^n\colon \mathrm{Tot}(\mathcal{I})^n := \bigoplus_{p+q=n}\mathcal{I}^{p,q} \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{I})^{n+1} := \bigoplus_{p'+q'=n+1}\mathcal{I}^{p',q'}$$

は $D^n := \oplus(d^{p,q} + (-1)^p\delta^{p,q})$ で与えられる．射 $D^n$ に関手 $\Gamma(C,-)$ を施して得られる射を $\Gamma(D^n)\colon \Gamma(C,\mathrm{Tot}(\mathcal{I})^n) \longrightarrow \Gamma(C,\mathrm{Tot}(\mathcal{I})^{n+1})$ とおくと，

$$H^1_{\mathrm{dR}}(C/F) = \mathrm{Ker}\,\Gamma(D^1)/\mathrm{Im}\,\Gamma(D^0)$$

が成り立つ．ここで，自然な同型

$$\Gamma(X,\eta_*F(C)/\mathcal{O}_C) \simeq \bigoplus_{x\in|C|}F(C)/\mathcal{O}_{C,x} \simeq \bigoplus_{x\in|C|}F((t_x))/F[[t_x]]$$

が成り立つことと，$\delta^{1,0}$ が「各点に於ける主要部[*20]（の $-1$ 倍）をとる」という写像であることに注意すると，射影 $\pi_{1,0}\colon \Gamma(C,\mathrm{Tot}(\mathcal{I})^1) \longrightarrow \Gamma(C,\mathcal{I}^{1,0}) = \mathcal{K}_C$ から同型

$$\mathrm{Ker}\,\Gamma(D^1) = \left\{ \big((\overline{a}_x)_{x\in|C|},\eta\big) \in \left(\bigoplus_{x\in|C|}\frac{F((t_x))}{F[[t_x]]}\right)\oplus\mathcal{K}_C \;\middle|\; \delta^{1,0}(\eta) = (\overline{da}_x)_x \right\}$$
$$\xrightarrow[\pi_{1,0}|_{\mathrm{Ker}\,\Gamma(D^1)}]{\simeq} \mathcal{K}_C^{(2)}$$

が誘導されることが分かる．更に，定義より $\pi_{1,0}(\mathrm{Im}\,\Gamma(D^0)) = dF(C)$ であるため，所望の同型 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/F) \simeq \mathcal{K}_C^{(2)}/dF(C)$ が得られる．分解 $\Omega^{\bullet}_{C/F} \longrightarrow \mathcal{I}^{\bullet,\bullet}$ が関手的なので，この同型も関手的である． □

---

[*20] $\omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(x)t_x^n dt_x$ を点 $x$ の近傍で定義された有理（型）微分形式とするとき，次数が負の項の和 $\sum_{n\leq -1} c_n(x)t_x^n dt_x$ を**点** $x$ **に於ける** $\omega$ **の主要部**という．

**注意 A.14** 次数 2 のコホモロジー群については，同型

$$H^2_{\mathrm{dR}}(C/F) \simeq \operatorname{Coker}\Gamma(D^2) \xrightarrow[\simeq]{\text{留数の総和}} \mathbb{C}$$

が成り立つ．ここで, 留数の総和をとる写像が $\operatorname{Coker}\Gamma(D^2)$ を経由するのは, $C_{\mathrm{an}}$ がコンパクトだからである．(留数定理, [向井 08, 定理 8.69] 参照.) また,「$\operatorname{Coker}\Gamma(D^2) \simeq \mathbb{C}$ である」という事実は,「勝手に与えられた主要部を持つような第 2 種微分及び第 3 種微分[*21]の存在」([向井 08, 定理 8.71]) と同値である．

事実 A.4 と命題 A.13 の同型を比較しよう．以下 $F = \mathbb{C}$ とし，$\mathcal{A}^\bullet_C$ を前小節で定義した $C^\infty$ 級微分形式のなす二重複体とする．後述の定義 A.18 で見るように，$C$ 上の有理（型）微分形式 $\omega$ を適切に修正することで，「極を消去した」$C_{\mathrm{an}}$ 上の $C^\infty$ 微分形式 $\widetilde{\omega}$ を定義することが出来る．本小節の目標は次の命題を証明することである．

**命題 A.15** 図式

$$\begin{tikzcd}
 & K^{(2)}_C/dF(C) \arrow[dd, "\simeq"'] & \omega \arrow[dd, mapsto] \\
H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{C}) \arrow[ur, "\text{A.13}", "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq", "\text{A.4}"'] & & \\
 & H^1(\Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}^\bullet_C)) & \widetilde{\omega}
\end{tikzcd}$$

は可換である．この図式に現れる同型射はそれぞれ，二重複体から定まるフィルトレーションを保つ．

命題 A.15 を証明するためには，幾つか準備が必要である．まず命題 A.13 の証明中で定義した二重複体 $\mathcal{I}^{\bullet,\bullet}$ を「解析化」した，$C_{\mathrm{an}}$ 上のアーベル群の層の二重複体 $\mathcal{I}^{\bullet,\bullet}_{\mathrm{an}}$ を導入しておこう．$C_{\mathrm{an}}$ の開部分集合 $U$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{0,0}_{\mathrm{an}}(U) &= \{U \text{ 上の有理型関数 }\} =: \mathcal{MF}(U),\\
\mathcal{I}^{1,0}_{\mathrm{an}}(U) &= \{U \text{ 上の有理型微分形式 }\} =: \mathcal{MD}(U),\\
\mathcal{I}^{0,1}_{\mathrm{an}}(U) &= \bigoplus_{x\in U} \mathbb{C}((t_x))/\mathbb{C}[[t_x]],\\
\mathcal{I}^{1,1}_{\mathrm{an}}(U) &= \bigoplus_{x\in U} \mathbb{C}((t_x))dt_x/\mathbb{C}[[t_x]]dt_x
\end{aligned}$$

[*21] 2 つの点でそれぞれ，留数 $1, -1$ の 1 位の極をもち，それ以外の点で正則であるような有理微分形式のことを第 3 種微分形式という．

と定め，$\{p,q\} \not\subseteq \{0,1\}$ であるような組 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ に対しては $\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,q}(U) = 0$ と定める．このとき，各 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ に対して，$\mathcal{I}^{p,q}$ は（通常の制限写像により）$C_{\mathrm{an}}$ 上のアーベル群の層になる．代数的な設定の場合と同様に，縦方向の微分射 $\delta_{\mathrm{an}}^{p,q} \colon \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,q+1}$ と横方向の微分射 $d_{\mathrm{an}}^{p,q} \colon \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p+1,q}$ を定義できる．

**補題 A.16** 各 $p,q$ について, $\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,q}$ は関手 $\Gamma(C_{\mathrm{an}}, -)$ について非輪状である．

**証明** $\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{0,1}$ と $\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{1,1}$ は $C_{\mathrm{an}}$ 上の脆弱層であるため，関手 $\Gamma(C_{\mathrm{an}}, -)$ について非輪状である．$\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{0,0}$ と $\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{1,0}$ が非輪状であることを示そう．各 $p,q \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型 $\Gamma(C, \mathcal{I}^{p,q}) \simeq \Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,q})$ が成立するので，

$$H^q(C, \Omega^p_{C/F}) \simeq H^q(\Gamma(C, \mathcal{I}^{p,\bullet}) \simeq H^q(\Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,\bullet})$$

を得る．また，GAGA の原理より，自然な同型 $H^q(C, \Omega^p_{C/F}) \simeq H^q(C_{\mathrm{an}}, \Omega^p_{C_{\mathrm{an}}})$ が成り立つ．従って同型

$$H^q(\Gamma(C, \Omega^p_{C_{\mathrm{an}}}) \simeq H^q(\Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,\bullet})$$

が得られる．この同型と，$\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{0,1}$ 及び $\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{1,1}$ が非輪状であることに注意すると，各 $p \in \{0,1\}$ に対して，$C_{\mathrm{an}}$ 上のアーベル群の層の短完全列

$$0 \longrightarrow \Omega^p_{C_{\mathrm{an}}} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,0} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{p,1} \longrightarrow 0$$

から誘導されるコホモロジー長完全列を考えることで，$\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{0,0}$ と $\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{1,0}$ が関手 $\Gamma(C_{\mathrm{an}}, -)$ について非輪状であることが分かる． □

補題 A.16 より $\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{\bullet,\bullet}$ は関手 $\Gamma(C_{\mathrm{an}}, -)$ に関して非輪状な対象を用いた $\Omega^\bullet_{C_{\mathrm{an}}}$ の分解を与える．従って，次が得られた．

**系 A.17** 任意の $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，自然な同型

$$H^q_{\mathrm{dR}}(C_{\mathrm{an}}) \simeq \mathbb{R}^q\Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathrm{Tot}(\mathcal{I})^\bullet_{\mathrm{an}}) \simeq H^q(\Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathrm{Tot}(\mathcal{I})^\bullet_{\mathrm{an}}))$$

が成立する．

ここで，有理型関数や有理型微分形式の「極を消去する」という操作を定義しよう．そのために，いくつか記号を用意する必要がある．各点 $x \in C_{\mathrm{an}}$ に対して，$x$ の（複素解析的多様体の位相での）開近傍 $W_x$ と，$W_x$ に含まれるような $x$ の閉近傍 $V_x$ を固定しておく．$W_x$ を十分小さくとることで，$t_x$ 及び $t_x^{-1}$ が $W_x \setminus \{x\}$ で正則であると

仮定してよい．各 $x \in C_{\mathrm{an}}$ に対して，台が $W_x$ に含まれ，かつ $V_x$ 上で恒等的に 1 であるような $C_{\mathrm{an}}$ 上の $C^\infty$ 級関数 $H_x$ を固定する．$n$ を任意の整数とするとき，$H_x t_x^n$ は $C_{\mathrm{an}} \setminus \{x\}$ で定義された $C^\infty$ 級関数と見做せる．また，$H_x t_x^n|_{V_x \setminus \{x\}} = t^n|_{V_x \setminus \{x\}}$ であるため，点 $x$ での値を 0 と定義することで，$t_x^n - H_x t^n$ を $W_x$ 上で定義された $C^\infty$ 級関数と見做せる．これらに注意すると，次が定義できる．

**定義 A.18（極の消去）** $U$ を $C_{\mathrm{an}}$ の任意の開部分集合とする．

(1) 有理型関数 $f \in \mathcal{MF}(U)$ の点 $x \in U$ に於ける Laurent 級数展開が

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) t_x^n$$

であるとする．このとき，$C^\infty$ 級関数 $P_x(f) \in \Gamma(C_{\mathrm{an}} \setminus \{x\}, \mathcal{O}_{C_{\mathrm{an}}})$ を

$$P_x(f) := \sum_{n \leq -1} c_n(x) H_x t_x^n$$

により定める．定義より，

$$\widetilde{f} := f - \sum_{x \in U} P_x(f)$$

は $U$ 全体で定義された $C^\infty$ 級関数と見做せる．

(2) 有理型微分形式 $\omega \in \mathcal{MD}(U)$ の点 $x \in U$ に於ける主要部が

$$\sum_{n \leq -1} c_n(x) t_x^n dt_x$$

であるとする．このとき，$C^\infty$ 級微分形式 $P_x(\omega) \in \Gamma(C_{\mathrm{an}} \setminus \{x\}, \mathcal{A}_C^1)$ を

$$P_x(\omega) := c_{-1}(x) H_x \frac{dt_x}{t_x} + d\left(\sum_{n \leq -2} c_n(x) H_x \frac{t_x^{n+1}}{n+1}\right)$$

により定める．定義より，

$$\widetilde{\omega} := \omega - \sum_{x \in U} P_x(\omega)$$

は $U$ 全体で定義された $C^\infty$ 級関数と見做せる．

**命題 A.15 の証明** 事実 A.4 と命題 A.13 の同型を比較するために，de Rham 複体の分解と整合的になるような（$C_{\mathrm{an}}$ 上のアーベル群の層の圏に於ける）二重複体の射 $h=(h^{\bullet,\bullet})\colon \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{\bullet,\bullet} \longrightarrow \mathcal{A}_C^{\bullet,\bullet}$ を構成しよう．

まず，$h^{0,0}$ を $C_{\mathrm{an}}$ の各開部分集合 $U$ に対して，

$$\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{0,0}(U)=\mathcal{MF}(U) \longrightarrow \mathcal{A}_C^{0,0}(U)=\mathcal{C}_C^{\infty}(U);\ f \longmapsto \widetilde{f}$$

で定義し，射 $h^{1,0}$ を

$$\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{1,0}(U)=\mathcal{MD}(U) \longrightarrow \mathcal{A}_C^{1,0}(U);\ \omega \longmapsto \widetilde{\omega}\text{の } \mathcal{A}_C^{1,0} \text{ 成分}$$

で定義する．

$h^{0,1}$ を定義しよう．$U$ を $C_{\mathrm{an}}$ の開部分集合とする．$n$ を任意の整数とし，$x \in U$ を任意の点とする．このとき，$t_x^n$ が有理型関数であることと，$H_x t_x^n|_{V_x\setminus\{0\}} = t^n|_{V_x\setminus\{0\}}$ であることに注意すると，$dH_x t_x^n$ の $\mathcal{A}_C^{0,1}$ 成分は $V_x \setminus \{0\}$ 上では恒等的に 0 になる．従って，$\overline{\partial}^{0,0}(H_x t_x^n)$ は $C_{\mathrm{an}}$ 上の $C^\infty$ 級微分形式と見なせる．そこで，射 $h^{0,1}$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{0,1}(U)=\bigoplus_{x\in U}\frac{\mathbb{C}((t_x))}{\mathbb{C}[[t_x]]} &\longrightarrow \mathcal{A}_C^{0,1}(U)\\ \left(\sum_{n\le -1} c_n(x)t_x^n\right)_{x\in U} &\longmapsto -\overline{\partial}^{0,0}\left(\sum_{x\in U} H_x \sum_{n\le -1} c_n(x)t_x^n\right)\end{aligned}$$

と定義する．

最後に，射 $h^{1,1}$ を次で定義する: $C_{\mathrm{an}}$ の各開集合 $U$ に対して，写像

$$h^{1,1}(U)\colon \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{1,1}(U)=\bigoplus_{x\in U}\frac{\mathbb{C}((t_x))dt_x}{\mathbb{C}[[t_x]]dt_x} \longrightarrow \mathcal{A}_C^{1,1}(U)=\mathcal{A}_C^2(U)$$

を

$$\begin{aligned}&h^{1,1}(U)\left(\sum_{n\le -1} c_n(x)t_x^n dt_x\right)_{x\in U}\\ &:=\overline{\partial}^{1,0}\sum_{x\in U}\left(c_{-1}(x)H_x\frac{\partial^{0,0}t_x}{t_x}+\partial^{0,0}\left(\sum_{n\le -2} c_n(x)H_x\frac{t_x^{n+1}}{n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

と定める．

簡単な議論により，以上で構成した $h = (h^{\bullet,\bullet})\colon \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{\bullet,\bullet} \longrightarrow \mathcal{A}_C^{\bullet,\bullet}$ が de Rham 複体の分解と整合的な二重複体の射であること，すなわち二重複体の微分写像を保つことと，図式

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{I}_{\mathrm{an}}^{\bullet,\bullet} \arrow[d, "h"] \\ \Omega_{C_{\mathrm{an}}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{A}_C^{\bullet,\bullet} \end{tikzcd}$$

が可換であることが示される．更に，射 $h$ の構成方法から，$h$ から誘導される写像

$$K_C^{(2)}/dF(C) = \mathbb{R}^1\Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathrm{Tot}(\mathcal{I})_{\mathrm{an}}^{\bullet})) \longrightarrow \mathbb{R}^1\Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}_C^{\bullet}) = H^1(\Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}_C^{\bullet}))$$

が各第二種微分 $\omega$ の類に対して，極を消去した微分形式 $\widetilde{\omega}$ の類を対応させる写像であることも分かる．従って，命題 A.15 の主張が得られる． □

第 2 種微分によるサイクルの積分について考える．$F = \mathbb{C}$ とし，引き続き命題 A.13 と同じ設定で考える．$\omega \in \mathcal{K}_C^{(2)}$ を任意の第 2 種微分とし，$\gamma$ を $C(\mathbb{C})$ 内の区分的に $C^1$ 級な閉曲線とする．曲線 $\gamma$ 上に $\omega$ の極がないとき，積分 $\int_\gamma \omega$ が定義される．この積分の値は $\gamma$ のホモトピー類にしか依らない．また，$\omega$ が完全形式のとき，すなわち $\omega \in d\mathbb{C}(C)$ のとき，$\int_\gamma \omega = 0$ が成り立つ．従って，$\mathbb{C}$ 線型写像

$$H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \mathbb{C}) = H^1(C(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \tag{A.2}$$

が定まる．

**命題 A.19** 写像 (A.2) は写像 (A.1) と一致する．

**証明** $\omega \in \mathcal{K}_C^{(2)}$ を任意の第 2 種微分とする．このとき，系 A.15 より，事実 A.4 の同型による $C^\infty$ 級微分形式

$$\widetilde{\omega} := H^1(\Gamma(h))(\omega) = \omega - \sum_{x \in C_{\mathrm{an}}} P_x(\omega)$$

の像は，命題 A.13 の同型による $\omega$ の像と一致する．今，$\omega$ は第 2 種微分形式なので，任意の $x \in C_{\mathrm{an}}$ に対して，$P_x(\omega)$ は $C_{\mathrm{an}}$ 上の完全形式になる．従って，任意のサイクル $\gamma \in H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に対して，

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega'$$

が成り立つ．これで命題 A.19 の主張が示された． □

最後に，第 2 種微分，$C^\infty$ 級微分形式，特異コホモロジーを用いた Poincaré 双対を比較しておこう．

**定義 A.20** $F$ を標数 0 の代数閉体とし，$C$ を $F$ 上の非特異射影曲線とする．

(1) $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{K}_C^{(2)}$ を $C$ 上の（$F$ 係数の）第 2 種微分とする．各点 $x \in C(F)$ における $\eta_1$ の Laurent 級数展開を $\sum_{n \neq -1} c_n(x;\eta_1) t_x^n dt_x$ とおき，

$$\mathrm{Prim}_x(\eta_1) := \sum_{n \neq -1} c_n(x;\eta_1) \frac{t_x^{n+1}}{n+1} \in F((t_x))$$

と定める．双線型写像 $\langle - \mid - \rangle_{\mathrm{rat}} \colon \mathcal{K}_C^{(2)} \times \mathcal{K}_C^{(2)} \longrightarrow F$ を

$$\langle \eta_1 \mid \eta_2 \rangle_{\mathrm{rat}} := 2\pi i \sum_{x \in C(F)} \mathrm{Res}_x \left( \mathrm{Prim}_x(\eta_1) \cdot \eta_2 \right)$$

により定める．ここで，$\mathrm{Res}_x(\eta)$ は有理微分形式 $\eta$ の $x$ に於ける留数である．この双線型形式は交代形式であり，$\eta \in \mathcal{K}_C^{(2)}$ が完全形式であるときは $\langle \eta \mid - \rangle_{\mathrm{rat}} = 0$ となる．従って，1 次 de Rham コホモロジーの交代形式

$$\langle - \mid - \rangle_{\mathrm{rat}} \colon H^1_{\mathrm{dR}}(C/F) \times H^1_{\mathrm{dR}}(C/F) \longrightarrow F$$

が誘導される．

(2) $F = \mathbb{C}$ とする．$C^\infty$ 級閉形式 $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma(C_{\mathrm{an}}, \mathcal{A}_C^1)$ に対して，

$$\langle \eta_1 \mid \eta_2 \rangle_{C^\infty} := \int_{C(\mathbb{C})} \eta_1 \wedge \eta_2 \in \mathbb{C}$$

と定める．このとき，$\langle \eta_1 \mid \eta_2 \rangle_{C^\infty}$ は交代形式であり，$\eta_1$ が完全形式であるときは $\langle \eta_1, - \rangle_{C^\infty} = 0$ が成り立つ．従って，交代形式

$$\langle - \mid - \rangle_{C^\infty} \colon H^1_{\mathrm{dR}}(C_{\mathrm{an}}) \times H^1_{\mathrm{dR}}(C_{\mathrm{an}}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が誘導される．

(3) $F = \mathbb{C}$ とし，$C$ の種数を $g$ とおく．$C(\mathbb{C})$ は複素構造により自然に有向実多様体と見做せるので，ホモロジー類 $\gamma_1, \gamma_2$ に対して，交叉数 $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \in \mathbb{Z}$ を定義できる．（例えば [加藤 88, §10.4] 参照．）自然な同型による同一視

$$H^1(C(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \mathbb{C})$$

を通して，交叉数から交代形式

$$\langle - \mid - \rangle_{\mathrm{sing}} \colon H^1(C(\mathbb{C}),\mathbb{C}) \times H^1(C(\mathbb{C}),\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が誘導される．この交代形式は基底を用いて以下のように表せる．交叉積は完全対であるため，$H^1(C(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ の 2 つの $\mathbb{Z}$ 基底 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{2g}\}$ 及び $\{\alpha_1^*,\dots,\alpha_{2g}^*\}$ を $(\alpha_i \cdot \alpha_j^*) = \delta_{ij}$ (右辺は Kronecker の $\delta$) となるようにとることが出来る．各 $f_1, f_2 \in H^1(C(\mathbb{C}),\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(C(\mathbb{C}),\mathbb{Z}),\mathbb{C})$ に対して，

$$\langle f_1 \mid f_2 \rangle_{\mathrm{sing}} := \sum_{i=1}^{2g} f_1(\alpha_i) f_2(\alpha_i^*)$$

である．

定義 A.20 の双線型形式たちは自然な同型と整合的である．正確には，次が成り立つ．

**命題 A.21**　$X$ を $\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲線とする．このとき，図式

$$\begin{array}{ccccc}
H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{C}) & \times & H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{C}) & \xrightarrow{\langle - | - \rangle_{\mathrm{rat}}} & \mathbb{C} \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
H^1_{\mathrm{dR}}(C_{\mathrm{an}}) & \times & H^1_{\mathrm{dR}}(C_{\mathrm{an}}) & \xrightarrow{\langle - | - \rangle_{C^\infty}} & \mathbb{C} \\
\uparrow & & \uparrow & & \| \\
H^1(C(\mathbb{C}),\mathbb{C}) & \times & H^1(C(\mathbb{C}),\mathbb{C}) & \xrightarrow{\langle - | - \rangle_{\mathrm{sing}}} & \mathbb{C}
\end{array}$$

は可換である．

**証明**　$C$ の種数を $g$ とおく．$g=0$ なら $H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{C}) = 0$ なので，$g > 0$ としてよい．このとき，Riemann 面 $C(\mathbb{C})$ を適切に切り開くことで，「$C(\mathbb{C})$ を展開した $4g$ 角形」（と見なせるような $C_{\mathrm{an}}$ の稠密開部分集合）$D$ が得られる．（例えば [向井 08, 命題 8.85 の証明の図 8.8] を参照．）$\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{K}_C^{(2)}$ を任意の元とし，

$$\langle \eta_1 \mid \eta_2 \rangle_{\mathrm{rat}} = \langle \widetilde{\eta}_1 \mid \widetilde{\eta}_2 \rangle_{C^\infty}$$

が成立することを示そう．$\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2 \in H^{1,0}(C/\mathbb{C})$ の場合（すなわち，$\eta_1$ と $\eta_2$ がいずれも極を持たない場合）や，$\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2 \in H^{0,1}(C/\mathbb{C})$ の場合（すなわち，$\eta_1$ と $\eta_2$ の極に於ける Laurent 展開が次数非負の項を持たない場合）は $\langle \eta_1 \mid \eta_2 \rangle_{\mathrm{rat}} = \langle \widetilde{\eta}_1 \mid \widetilde{\eta}_2 \rangle_{C^\infty} = 0$ が成り立つ．従って，$\widetilde{\eta}_1 \in H^{0,1}(C/\mathbb{C})$ かつ $\widetilde{\eta}_2 \in H^{1,0}(C/\mathbb{C})$ であると仮定して良い．

更に，（$D$ を適切にとり直すことで）$\eta_1$ は $\partial D$ 上に極を持たないと仮定してよい．$D$ は単連結であり，$\eta_1$ は第 2 種微分形式であるため，$\eta_1 = df$ を満たす $D$ 上の有理型関数 $f$ が存在する．定義より，各 $x \in D$ に対して，$f$ の $x$ の近傍での Laurent 級数展開は $\mathrm{Prim}_x(\eta_1)$ である．留数定理と Stokes の定理より，

$$\begin{aligned}\langle \eta_1 \mid \eta_2 \rangle_{\mathrm{rat}} &= 2\pi i \sum_{x \in D} \mathrm{Res}_x \left(\mathrm{Prim}_x(\eta_1) \cdot \eta_2\right) = \int_{\partial D} f\eta_2 && (\text{留数定理}) \\ &= \int_{\partial D} \widetilde{f\eta_2} = \int_D d(\widetilde{f\eta_2}) && (\text{Stokes の定理}) \\ &= \int_D \widetilde{\eta}_1 \wedge \widetilde{\eta}_2 = \langle \widetilde{\eta}_1 \mid \widetilde{\eta}_2 \rangle_{C^\infty}\end{aligned}$$

を得る．$\langle - \mid - \rangle_{C^\infty}$ と $\langle - \mid - \rangle_{\mathrm{sing}}$ の整合性は，それぞれの交代形式の定義と注意 A.6 から従う． □

**系 A.22（Legendre の関係式）** $E$ を方程式 $y^2 = 4x^3 - g_4 x + g_6$ で与えられる $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の楕円曲線とする．$\{\gamma_1, \gamma_2\}$ を $H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 基底とし，$(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = 1$ であると仮定する[*22]．各 $i \in \{1, 2\}$ に対して，

$$\omega_i = \int_{\gamma_i} \frac{dx}{y}, \quad \nu_i = \int_{\gamma_i} \frac{xdx}{y}$$

と定める．このとき，$\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1 = 2\pi i$ が成立する．

**証明** $\omega := dx/y$ は $E$ 上の正則微分形式であり，$\nu := xd/y$ は $E$ 上の第 2 種微分形式であることに注意する．$L := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ とおくと，複素 Lie 群として同型

$$\mathbb{C}/L \xrightarrow{\simeq} E(\mathbb{C});\ z \bmod L \longrightarrow (\wp(z; L) : \wp'(z; L) : 1)$$

が定まる．ここで，$\wp(z; L)$ は $L$ を二重周期とする Weierstrass の $\wp$ 関数である．この同型を通して $E(\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}/L$ を同一視すると，$\omega = dz$ と見做せ，$\nu = \wp(z; L)dz$ と見做せる．$\wp(z; L)$ は $L$ 以外の点で正則な $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，0 のまわりでは $\wp(z; L) = z^{-2} + (\text{正則関数})$ という形をしている．従って，

$$\langle \omega \mid \nu \rangle_{\mathrm{rat}} = -\langle \nu \mid \omega \rangle_{\mathrm{rat}} = -2\pi i \mathrm{Res}_{z=0} \left(-z^{-1} + \cdots\right) dz = 2\pi i$$

[*22] $H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ の任意の $\mathbb{Z}$ 基底 $\{\gamma_1', \gamma_2'\}$ は $(\gamma_1' \cdot \gamma_2') = \pm 1$ を満たす．

が成り立つ．$H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $\{\gamma_1,\gamma_2\}$ の「交叉数」という交代形式に関する双対基底は $\{\gamma_2,-\gamma_1\}$ である．従って，$\omega$ と $\nu$ を $H^1(E(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ の元と見做すと，

$$\langle\omega \mid \nu\rangle_{\mathrm{sing}} = \omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1$$

が成り立つ．よって，命題 A.21 より $\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1 = 2\pi i$ が得られる． □

**系 A.23** $k \subseteq \mathbb{C}$ を虚二次体とし，$\mathfrak{o}$ を $k$ の整環とする．$E$ を $(1,0)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の楕円曲線とし，$\omega = \omega_E, \nu = \nu_E \in H^1_{\mathrm{dR}}(E/\overline{\mathbb{Q}})$ を定理 2.4 のようにとる．このとき，定理 2.4 の記号のもとで，$P(\omega)P(\nu) \sim 2\pi i$ が成立する．

**証明** $E$ の定義方程式が $y^2 = 4x^3 - g_4x + g_6$ $(g_4, g_6 \in \overline{\mathbb{Q}})$ であるとしてよい．このとき，$\omega_E = dx/y$ および $\nu_E = xdx/y \in H^{1,0}(E_{\mathbb{C}})$ が成り立つとしてよい．今，$E$ が虚数乗法（より正確には $\mathfrak{o}$ 乗法）を持つと仮定しているので，補題 2.2 より，系 A.22 の記号の下で，$P(\omega_E) \sim \omega_1 \sim \omega_2$ 及び $P(\nu_E) \sim \nu_1 \sim \nu_2$ が成立する．従って，系 A.22 より，$P(\omega)P(\nu) \sim 2\pi i$ を得る． □

# 付録 B　Gauss-Manin 接続

本付録では，Gauss–Manin 接続について簡単に復習する．本付録では以下，$F$ を代数的閉であるような $\mathbb{C}$ の部分体とし，$\pi\colon X \longrightarrow S$ を $F$ 上滑らかな代数多様体の間の $F$ 上の滑らかな固有射する．

## B.1　接続の定義

本小節では，連接層の上の接続や，それに関連する用語の定義を簡単に復習する．

**定義 B.1（接続，可積分接続）** $\mathcal{E}$ を $S$ 上の連接層とする．

(1) $S$ 上のアーベル群の層の射

$$\nabla\colon \mathcal{E} \longrightarrow \Omega^1_{S/F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E}$$

が次を満たすとき，$\nabla$ を **$\mathcal{E}$ 上の $F$ 接続**と呼び，$(\mathcal{E},\nabla)$ を**連接 $\mathcal{D}_S$ 加群**と呼ぶ．

「$S$ の任意の開部分集合 $U$ と，任意の切断 $f \in \Gamma(U,\mathcal{O}_S)$ 及び任意の切断 $e \in \Gamma(U,\mathcal{E})$ に対して，

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla(e)$$

が成立する．」

接続 $\nabla$ の核を $\mathcal{E}^{\nabla}$ と書き，$(\mathcal{E},\nabla)$ の**水平切断の層**と呼ぶ．

(2) $\mathcal{E}$ 上の $F$ 接続 $\nabla$ から，アーベル群の層の射

$$\nabla_n\colon \Omega^n_{S/F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}\longrightarrow \Omega^{n+1}_{S/F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E};\ \omega\otimes e\longmapsto d\omega\otimes e+(-1)^n\omega\wedge\nabla(e)$$

が誘導される．$\nabla_1\circ\nabla=0$ が成り立つとき，$\nabla$ は**可積分**であるという．

**注意 B.2** $\mathcal{O}_S$ から $\mathcal{O}_S$ 自身への $F$ 微分（の芽）のなす層 $\mathcal{D}er_k(\mathcal{O}_S):=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_{S/F},\mathcal{O}_S)$ には，Lie 微分 $[D_1,D_2]:=D_1\circ D_2-D_2\circ D_1$ により Lie 環の構造が入る．$\mathcal{E}$ 上の $F$ 接続 $\nabla$ が与えられているとき，$S$ の任意の開部分集合 $U$ 上の任意の切断 $D\in\Gamma(U,\mathcal{D}er_k(\mathcal{O}_S))$ に対して，$\mathcal{E}|_U$ の $F$ 線型変換

$$\nabla_D\mathcal{E}|_U\xrightarrow{\nabla}\Omega^1_{S/F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}|_U\xrightarrow{D}\mathcal{O}_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}|_U\simeq\mathcal{E}|_U$$

が定まる．接続 $\nabla$ が可積分であることは，$\mathcal{D}er_k(\mathcal{O}_S)\longrightarrow\mathcal{E}nd_F(\mathcal{E});\ D\longmapsto\nabla_D$ が Lie 環の準同型になっていることと同値である．

本小節では以下，$F=\mathbb{C}$ とする．複素解析的多様体上の正則ベクトル束に対しても，同様に接続，水平切断，可積分接続の概念が定義される．(実際，代数的な微分形式の層のなす複体 $\Omega^\bullet_{S/\mathbb{C}}$ を正則微分形式の層のなす複体 $\Omega^\bullet_{S_{\mathrm{an}}}$ に取り替えて，定義 B.1 と全く同様に定めれば良い．)

Deligne の本 [Del70] では接続が**確定特異点を持つ (régulier，[Del70，§II.4])** という概念が定義されている．

**定義 B.3** $(\mathcal{E},\nabla)$ を $S$ 上の連接 $\mathcal{D}_S$ 加群とする．

(1) $S$ が連結な非特異代数曲線であると仮定する．$\widetilde{S}$ を $S$ をコンパクト化した非特異射影的曲線とし，$j\colon S\longrightarrow\widetilde{S}$ を開埋め込みとする．$(\mathcal{E},\nabla)$ がある連接 $D_{\widetilde{S}}$ 加群に拡張できるとき，すなわち，$\widetilde{S}$ 上の連接層 $\widetilde{\mathcal{E}}$ とその上の $\mathbb{C}$ 接続 $\widetilde{\nabla}$ が存在して，$(j^*\widetilde{\mathcal{E}},j^*\widetilde{\nabla})\simeq(\mathcal{E},\nabla)$ が成立するとき，$(\mathcal{E},\nabla)$ は**確定特異点を持つ**という．

(2) $S$ を（曲線とは限らない）滑らかな代数多様体とする．$\mathbb{C}$ 上の任意の非特異代数曲線 $C$ と，$\mathbb{C}$ 上の任意の埋め込み $i\colon C\longrightarrow S$ に対して $(i^*\mathcal{E},i^*\nabla)$ が確定特異点を持つ $\mathcal{D}_C$ 加群であるとき，$(\mathcal{E},\nabla)$ は**確定特異点を持つ**という．

**注意 B.4** 本稿では詳細には立ち入らないが，「$(\mathcal{E},\nabla)$ が確定特異点を持つ」という条件は，「水平切断が必ず無限遠（コンパクト化して付け加わる部分の近傍）で

高々多項式程度の増大度になる」というニュアンスの条件と同値である ([Del70, §II, Théorème 4.1 の条件 (iii) 及び Proposition 4.4 の条件 (i)] 参照).

確定特異点を持つ微分方程式の理論に於いて，次の対応は重要である．

**事実 B.5（確定特異点版 Riemann-Hilbert 対応）** 次が成立する．

(1) 可積分接続付きの $S_{\mathrm{an}}$ 上の有限階数正則ベクトル束の圏と $S_{\mathrm{an}}$ 上の $\mathbb{C}$ 係数有限階数局所系の圏は，「水平切断をとる」という関手 $(\mathcal{V}, \nabla) \longmapsto \mathcal{V}^{\nabla}$ により圏同値である．水平切断をとる関手の準逆は $V \longmapsto (\mathcal{O}_{S_{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathbb{C}} V, d \otimes \mathrm{id}_V)$ である．([Del70, §II, Théorème 2.17]．)

(2) 確定特異点を持つ局所自由可積分連接 $\mathcal{D}_X$ 加群の圏と可積分な接続付きの $S_{\mathrm{an}}$ 上の有限階数正則ベクトル束の圏は解析化関手 $V \longmapsto V_{\mathrm{an}}$ で圏同値になる．([Del70, §II, Théorème 5.9].)

## B.2 Gauss–Manin 接続の構成

本小節では，論文 [KO68] に従って Gauss–Manin 接続を構成する．今 $\pi\colon X \longrightarrow S$ は滑らかな固有射と仮定しているので，de Rham コホモロジー層 $\mathcal{H}^i_{\mathrm{dR}}(X/S) := \mathbb{R}^i\pi_*(\Omega^\bullet_{X/S})$ は $S$ 上の局所自由な連接層になる ([Del68, Théorème (5.5)])．Gauss–Manin 接続は $\mathcal{H}^i_{\mathrm{dR}}(X/S)$ の上の可積分な $F$ 接続である．

複体 $\Omega^\bullet_{X/F}$ の降下フィルトレーション $\{F^i(\Omega^\bullet_{X/F})\}_{i\geq 0}$ を

$$F^i(\Omega^\bullet_{X/F}) := \mathrm{Im}\left(\Omega^{\bullet-i}_{X/F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi^*\Omega^i_{S/F} \longrightarrow \Omega^\bullet_{X/F}\right)$$

により定める．本付録では $\pi\colon X \longrightarrow S$ が滑らかであると仮定しているため，特に

$$0 \longrightarrow \pi^*\Omega^1_{S/F} \longrightarrow \Omega^1_{X/F} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0$$

は完全列である．従って

$$\mathrm{gr}^i(\Omega^\bullet_{X/F}) := F^i(\Omega^\bullet_{X/F})/F^{i+1}(\Omega^\bullet_{X/F}) \simeq (\pi^*\Omega^i_{S/F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-i}_{X/S}$$

が成立することが分かる．スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q}\pi_*(\mathrm{gr}^p(\Omega^\bullet_{X/F})) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}\pi_*(\Omega^\bullet_{X/F})$$

の $E_1$ 項を計算すると，自然な同型

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &\simeq \mathbb{R}^{p+q}\pi_*((\pi^*\Omega^p_{S/F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet-p}_{X/S}) \\ &\simeq \mathbb{R}^q\pi_*((\pi^*\Omega^p_{S/F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\bullet}_{X/S}) \\ &\simeq \Omega^p_{S/F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{R}^q\pi_*\Omega^{\bullet}_{X/S} \qquad \text{(射影公式)} \\ &= \Omega^p_{S/F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}^p_{\mathrm{dR}}(X/S) \end{aligned}$$

が得られる．

**定義 B.6（Gauss–Manin 接続）** $S$ 上のアーベル群の層の射

$$\nabla_{\mathrm{GM}} := (-1)^q d_1^{0,q} \colon E_1^{0,q} \simeq \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S) \longrightarrow E_1^{1,q} \simeq \Omega^1_{X/F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$$

を **Gauss–Manin 接続**と呼ぶ．

**命題 B.7** $\nabla_{\mathrm{GM}}$ は $\mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$ 上の可積分な $F$ 接続である．

**証明** まず，$\nabla_{\mathrm{GM}}$ が接続になっていることを確認しよう．$\nabla_{\mathrm{GM}}$ は明らかに $F$ 線型である．外積による de Rham 複体の積構造からスペクトル系列の積構造

$$E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \longrightarrow E_r^{p+p',q+q'};\ (e,e') \longmapsto ee'$$

が誘導され，この積に関して，

$$d_r(ee') = d_r(e)e' + (-1)^{p+q} d_r(e)$$

が成り立つ．従って，任意の切断 $\eta \in \Gamma(U, \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S))$ 及び任意の切断 $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S) = \Gamma(U, \mathcal{H}^0_{\mathrm{dR}}(X/S))$ に対して，

$$\nabla(f\eta) = df \otimes \eta + f\nabla(\eta)$$

が成り立つので，$\nabla_{\mathrm{GM}}$ は $F$ 接続である．更に，微分写像が $d_1^{p+1,q} \circ d_r^{p,q} = 0$ を満たすことから，Gauss–Manin 接続は可積分であることが従う． □

## B.3 複素解析的多様体と Gauss–Manin 接続

本小節では，$F = \mathbb{C}$ とし，de Rham コホモロジー層と Gauss–Manin 接続に関連する解析的な事実を（本稿で用いるものに限って）簡単に紹介する．

$\pi\colon X \longrightarrow S$ を $\mathbb{C}$ 上滑らかなスキームの間の $\mathbb{C}$ 上の滑らかな固有射とし，$\pi_{\mathrm{an}}\colon X_{\mathrm{an}} \longrightarrow S_{\mathrm{an}}$ を $\pi$ に対応する複素解析的多様体の射とする．このとき，解析的 de Rham コホモロジー層 $\mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}}/S_{\mathrm{an}}) := \mathbb{R}^q\pi_{\mathrm{an}*}\Omega^\bullet_{X_{\mathrm{an}}/S_{\mathrm{an}}}$ が定義される．更に，代数的対象を解析的対象に置き換えて，補題 B.6 と全く同様な構成を行うことで，解析的 Gauss–Manin 接続

$$\nabla_{\mathrm{GM,an}}\colon \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)_{\mathrm{an}} \longrightarrow \Omega^1_{S_{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathrm{an}}}} \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)_{\mathrm{an}}$$

が定義出来る．

**命題 B.8** $q$ を任意の非負整数とする．このとき，次が成立する．

(1) 自然な同型 $\mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)_{\mathrm{an}} \simeq \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_{\mathrm{an}}/S_{\mathrm{an}})$ が成立する．
(2) $(\mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S), \nabla_{\mathrm{GM}})$ は確定特異点をもつ $\mathcal{D}_X$ 加群であり，事実 B.5 の圏同値で $S_{\mathrm{an}}$ の局所系 $R^q\pi_{\mathrm{an}*}\mathbb{C}$ に対応する．

**証明** $S$ は $\mathbb{C}$ 上滑らかな代数多様体であり，$\pi$ は滑らかな固有射なので，Serre の GAGA の原理により，各 $p, q$ に対して同型 $\left(\mathbb{R}^q\pi_*\Omega^p_{X/S}\right)_{\mathrm{an}} \simeq \mathbb{R}^q\pi_{\mathrm{an}*}\Omega^p_{X_{\mathrm{an}}/S_{\mathrm{an}}}$ が成立する．従って，代数的・解析的な設定における相対的 Hodge to de Rham スペクトル系列を比較することで，主張 (1) が示される．更に [Del70, §II, Théorèm 6.13, Proposition 6.14, Théorèm 7.9] から主張 (2) が従う． □

**系 B.9** $q$ を任意の非負整数とする．このとき，次が成立する．

(1) $S_{\mathrm{an}}$ の任意の開部分集合 $W$ と任意の切断 $f \in \Gamma(W, \mathcal{O}_{S_{\mathrm{an}}})$ 及び任意の切断 $\eta \in \Gamma(W, R^q\pi_{\mathrm{an}*}\mathbb{C})$ に対して，

$$\nabla_{\mathrm{GM,an}}(f \otimes \eta) = \pm df \wedge \eta \tag{B.1}$$

が成り立つ．更に自然な同型 $\mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)_{\mathrm{an}}^{\nabla_{\mathrm{GM,an}}} \simeq R^q\pi_{\mathrm{an}*}\mathbb{C}$ が成立する．

(2) Gauss–Manin 接続に関する解析的な水平大域切断は代数的である．すなわち，

$$\Gamma(S, \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)^{\nabla_{\mathrm{GM}}}) = \Gamma(S_{\mathrm{an}}, \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)_{\mathrm{an}}^{\nabla_{\mathrm{GM,an}}})$$

が成立する．特に，$\pi\colon X \longrightarrow S$ が $\mathbb{C}$ の部分体 $L$ 上で定義された代数多様体の射 $\pi_0\colon X_0 \longrightarrow S_0$ の底変換になっている場合は，

$$\Gamma(S_0, \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_0/S_0)^{\nabla_{\mathrm{GM}}}) \otimes_L \mathbb{C} = \Gamma(S_{\mathrm{an}}, \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)_{\mathrm{an}}^{\nabla_{\mathrm{GM,an}}})$$

が成立する．

**証明** 主張 (1) は命題 B.8 から明らかである．主張 (2) の 1 つ目の等号は「確定特異点を持つ接続の解析的な水平切断は代数的である」という事実 ([Del70, §II, Proposition 2.24, Théorèm 4.1]) から従う．2 つ目の等号は $X_0/S_0$ に関する Gauss–Manin 接続が $L$ 線型写像であることと，Guass–Manin 接続が定数体の係数拡大と整合的であることを踏まえると，1 つ目の等号から明らかである． □

系 B.9 より，更に以下が従う．

**系 B.10** $W$ を $S_{\mathrm{an}}$ の開部分集合とし，切断 $\eta \in \Gamma(W, \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)_{\mathrm{an}})$ が任意の $x \in W$ に対して

$$\eta_x \in H^q(\pi_{\mathrm{an}}^{-1}(x), \mathbb{Q}) \subseteq H^q(\pi_{\mathrm{an}}^{-1}(x), \mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^q_{\mathrm{dR}}(\pi_{\mathrm{an}}^{-1}(x))$$

を満たしていると仮定する．このとき，$\eta$ は Gauss–Manin 接続について水平である．

**証明** $x \in W$ を任意の元とし，$x$ の開近傍 $U \subseteq W$ を補題 B.8 の証明のようにとる．$H^q(\pi_{\mathrm{an}}^{-1}(x), \mathbb{Q})$ の基底 $\omega_1, \ldots, \omega_r$ を固定して，

$$\eta = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes \omega_i \quad (\text{ただし各 } i \text{ について } f_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{S_{\mathrm{an}}}))$$

とおくと，系の仮定より各 $f_i$ の像は $\mathbb{Q}$ に含まれるので $\mathbb{C}$ において内点を持たない．局所定数関数以外の正則関数は全て開写像になるため，$f_i$ は局所定数関数でなければならない．従って，(B.1) より $\nabla_{\mathrm{GM,an}}(\eta) = \pm \sum_{i=1}^{r} df_i \wedge \omega_i = 0$ を得る． □

# 付録 C　Fermat 曲線の周期について

第 2 節では，「周期の値が所望の形になるアーベル多様体が存在する」ということを主張する命題 2.16 の証明を省いた．本付録では，Gross の原論文 [Gro78] と Rohrlich による付録 [Roh78] の方法に従って，Fermat 曲線の Jacobi 多様体の部分商として現れるアーベル多様体の周期を計算することで，命題 2.16 を証明する．

## C.1 Fermat 曲線の Jacobi 多様体の直積分解

本小節では，Fermat 曲線とその Jacobi 多様体[*23]に関する準備を行う．本小節前半では，明示的な微分形式を用いて，Fermat 曲線の 1 次 de Rham コホモロジーの基底を構成する．本小節の後半では，いくつかの明示的な有理写像を用いて，Fermat 曲線の Jacobi 多様体を（同種のずれを除いた）直積分解を与える．後で定理 C.9 で触れるように，本小節の前半で構成する「明示的な微分形式」は，各々，この直積分解に現れる直和因子の上の微分形式と見做せる．

$d$ を平方因子を持たない 3 以上の整数とし，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上の $d$ 次 Fermat 曲線

$$F(d) := \left\{(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{Q}}} \mid X^d + Y^d = Z^d\right\}$$

を考える．$(x, y) := (X/Z, Y/Z)$ とおく．$F(d)$ の種数は $g_d := (d-1)(d-2)/2$ である．$F(d)$ の Jacobi 多様体を $J(d)/\overline{\mathbb{Q}}$ と書く．以下では，1 の原始 $d$ 乗根 $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ を固定する．このとき，$F(d)$ の位数 $d$ の自己同型 $A, B$ が

$$A(X : Y ; Z) = (\zeta X : Y : Z)$$
$$B(X : Y : Z) = (X : \zeta Y : Z)$$

により定まる．定義より，$AB = BA$ が成立する．従って，$A^j B^k$ を $(j, k)$ と同一視することで，$F(d)$ に群 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$ の作用が定まる．

**定義 C.1** 整数の 3 つ組 $(r, s, t) \in \mathbb{Z}^3$ が $0 < r, s, t < d$ かつ $r + s + t \equiv 0 \mod d\mathbb{Z}$ を満たすとき，$(r, s, t)$ は（次数 $d$ の）**許容可能な** 3 つ組であるという．$(r, s, t)$ が許容可能であるとき，$F(d)$ 上の第 2 種微分形式

$$\eta_{r,s,t} := x^{r-1} y^{s-d} dx$$

が定まる[*24]．

**注意 C.2** 以下では点 $P := (1 : 0 : 1) \in F(d)$ を固定する．Abel–Jacobi 写像 $AJ_P \colon F(d) \longrightarrow J(d)$ から誘導される同型 $H^1_{\mathrm{dR}}(J(d)/\overline{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\simeq} H^1_{\mathrm{dR}}(F(d)/\overline{\mathbb{Q}})$ により，$\eta_{r,s,t}$ を $H^1_{\mathrm{dR}}(J(d)/\overline{\mathbb{Q}})$ の元と見做す．

*23 本稿では，Jacobi 多様体の一般論には立ち入らない．代数曲線の Jacobi 多様体の構成方法や基本性質については，例えば [Mil86] 参照．

*24 代数曲線の第 2 種微分形式と de Rham コホモロジーの関係については，本稿の付録 A.3 節参照．

微分形式 $\eta_{r,s,t}$ の定義より，

$$A^j B^k \eta_{r,s,t} = \zeta^{rj+sk}\eta_{r,s,t} \tag{C.1}$$

が成り立つ．従って，$\eta_{r,s,t}$ たちは群 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$ の作用について，相異なる指標の固有ベクトルになっていることが分かる．許容可能な整数の 3 つ組は全部で $2g_d$ 個あるので，$\eta_{r,s,t}$ たちは代数的 de Rham コホモロジー $H^1_{\mathrm{dR}}(F(d)/\overline{\mathbb{Q}})$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ 基底になることが分かる．更に，次の補題が得られる．

**補題 C.3**　Hodge 分解 $H^1_{\mathrm{dR}}(F(d)_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) = H^0(F(d)_{\mathbb{C}}, \Omega) \oplus H^1(F(d)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O})$ を考える．このとき，$r+s+t=d$ を満たすような $\eta_{r,s,t}$ たち全体は $H^0(F(d)_{\mathbb{C}}, \Omega)$ の $\mathbb{C}$ 基底をなし，$r+s+t=2d$ を満たすような $\eta_{r,s,t}$ たち全体は $H^1(F(d)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O})$ の $\mathbb{C}$ 基底をなす．

**証明**　まず，$\eta_{r,s,t}$ たちは $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$ の相異なる指標に関する固有ベクトルであるため，$\mathbb{C}$ 上線型独立である．それらのうち，$r+s+t=d$ を満たす許容可能な $(r,s,t)$ は丁度 $g_d$ 個あり，このような $(r,s,t)$ について微分形式 $\eta_{r,s,t}$ は極を持たないので，$H^0(F(d)_{\mathbb{C}}, \Omega)$ の基底に関する主張が従う．これを踏まえて，$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$ の作用に関する $H^1_{\mathrm{dR}}(F(d)/\overline{\mathbb{Q}})$ の指標分解を考えると，$H^1(F(d)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O})$ の基底に関する主張が従う．　□

$\eta_{r,s,t}$ たちは $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されているので，次の系が得られる．

**系 C.4**　$\overline{\mathbb{Q}}$ 上でも Hodge 分解 $H^1_{\mathrm{dR}}(F(d)/\overline{\mathbb{Q}}) = H^0(F(d), \Omega) \oplus H^1(F(d), \mathcal{O})$ が成立する．（すなわち，Hodge フィルトレーションの定める短完全列

$$0 \longrightarrow H^0(F(d), \Omega) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(F(d)/\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow H^1(F(d), \mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

の Hodge 分解に対応する分裂写像が $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義できる．）

本小節の後半の目標は Abel 多様体 $J(d)$ を（同種によるのずれを除いて）より小さな Abel 多様体の直積に分解することである．そのためには，いくつかの記号の準備が必要である．$\mathbb{Z}$ か $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ の元 $a$ に対して，$\langle a \rangle \in \mathbb{Z}$ を $0 \le \langle a \rangle < d$ かつ $a \equiv \langle a \rangle \bmod d\mathbb{Z}$ を満たす唯 1 つの整数とする．

**定義 C.5**　許容可能な $(r,s,t)$ に対して，

$$H_{r,s,t} := \{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \mid \langle ar \rangle + \langle as \rangle + \langle at \rangle = d\}$$

と定義する．任意の $a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ に対して，$a \in H_{r,s,t}$ または $-a \in H_{r,s,t}$ のいずれか一方のみが成立するので，$\#H_{r,s,t} = \phi(d)/2$ が成立する．ここで，$\phi(d) := \#(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ である．各 $a \in (\mathbb{Z}/d\ Z)^\times$ を埋め込み $\sigma_a\colon \mathbb{Q}(\zeta) \hookrightarrow \mathbb{C};\ \zeta \mapsto \zeta^a$ に対応させることで，$(\mathbb{Q}(\zeta), H_{r,s,t})$ は CM 型（越川氏の稿 [越川, 定義 5.4] 参照）と見做せる．

**定義 C.6** 次数 $d$ の許容可能な 3 つ組 $(r,s,t)$ が $\gcd(r,s,t,d) = 1$ を満たすとき．$(r,s,t)$ は**新しい** 3 つ組であるという．2 つの許容可能な 3 つ組 $(r,s,t), (r',s',t')$ に対して，ある $a \in (\mathbb{Z}/d\ Z)^\times$ が存在して，$(r',s',t') = (\langle ar\rangle, \langle as\rangle, \langle at\rangle)$ が成り立つとき，$(r,s,t)$ と $(r',s',t')$ は同値であるという．次数 $d$ の許容可能な新しい 3 つ組の同値類全体の集合を $NAT(d)$ と書く．

$(r,s,t)$ を許容可能な新しい 3 つ組とし，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上のアファイン平面曲線 $C_{r,s,t}$ を

$$C_{r,s,t} := \left\{(u,v) \in \mathbb{A}^2_{\overline{\mathbb{Q}}} \,\middle|\, v^d = u^r(1-u)^s\right\}$$

により定める．このとき，有理写像

$$f_{r,s,t}\colon F(d) \dashrightarrow C_{r,s,t};\ (x:y:1) \mapstochar\dashrightarrow (u,v) = (x^d, x^r y^s)$$

が定まる．

**補題 C.7** $\mathbb{Z}$ の部分集合 $S = S_{r,s,t}$ を

$$\begin{aligned} S := &\{\langle a\rangle \mid a \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z},\ (\langle ar\rangle, \langle as\rangle, \langle at\rangle)\text{: 許容可能 }\} \\ = &\{a \in \mathbb{Z} \cap [1, d-1] \mid \{ar, as, at\} \cap d\mathbb{Z} = \emptyset\} \end{aligned}$$

で定める．このとき，$C_{r,s,t}$ と双有理同型な非特異射影曲線 $\widetilde{C}_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}}$ の種数は $\#S_{r,s,t}/2$ である．

**証明** 第 1 成分の射影 $C_{r,s,t} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}};\ (u,v) \longmapsto (u:1)$ から定まる非特異射影曲線の射 $h\colon \widetilde{C}_{r,s,t} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$ を通して，$\widetilde{C}_{r,s,t}$ を $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$ 上の $d$ 次分岐被覆とみなす．この被覆は Galois かつ，$0, 1, \infty \in \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$ の外で不分岐である．被覆 $h$ に関する点 $x \in h^{-1}(\{0,1,\infty\})$ の分岐指数を $e_x$ とおく．このとき，完備離散付値体の拡大 $\mathbb{C}\left(u, \sqrt[d]{u^r(1-u)}\right)_x / \mathbb{C}(u)_{h(x)}$ の分岐指数を見ることで，

$$e_x = \begin{cases} \gcd(r,d) & (x \in h^{-1}(0)) \\ \gcd(s,d) & (x \in h^{-1}(1)) \\ \gcd(t,d) & (x \in h^{-1}(\infty)) \end{cases}$$

が成り立つことが分かる．従って，$\widetilde{C}_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}}$ の種数を $g$ とおくと，被覆 $h$ に対して Riemann–Hurwitz の公式を適用することで，

$$g = \frac{d+2-\gcd(r,d)-\gcd(s,d)-\gcd(t,d)}{2}$$

を得る．今，$\gcd(r,s,t,d)=1$ かつ $r+s+t=d$ と仮定しているので，3 つの整数 $\gcd(r,d), \gcd(s,d), \gcd(t,d)$ はどの 2 つも互いに素である．従って，

$$S = (\mathbb{Z}\cap[1,d-1]) \setminus \coprod_{u\in\{r,s,t\}} \left\{ m\cdot\frac{d}{\gcd(u,d)} \;\middle|\; m\in\mathbb{Z}\cap[1,\gcd(u,d)-1] \right\}$$

となる．よって，

$$\#S = d-1-(\gcd(r,d)-1)-(\gcd(s,d)-1)-(\gcd(t,d)-1) = 2g$$

が成り立つので，補題 C.7 の主張を得る． □

$C_{r,s,t}$（と双有理同値な $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の非特異射影曲線）の Jacobi 多様体を $J_{r,s,t}$ と書くとき，$f_{r,s,t}$ による「因子類の押し出し」

$$f_{r,s,t*}\colon J(d)\longrightarrow J_{r,s,t}$$

が誘導される．$d'$ を $d$ の正の約数とするとき，$d/d'$ 乗写像

$$p_{d',d}\colon F(d)\longrightarrow F(d');\ (X:Y:Z)\longmapsto (X^{d/d'}:Y^{d/d'}:Z^{d/d'})$$

が定義できる．射 $p_{d',d}$ による「因子類の引き戻し」$p^*_{d',d}\colon J(d')\longrightarrow J(d)$ と押し出し $f_{r,s,t*}$ の合成射を $h^{d',d}_{r,s,t} = f_{r,s,t*}\circ p^*_{d',d}\colon J(d')\longrightarrow J_{r,s,t}$ と書く．

**定義 C.8** $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のアーベル多様体 $A^{(d)}_{r,s,t} := A_{r,s,t}$ を次で定める:

$$A_{r,s,t} := \mathrm{Coker}\left( \prod_{d'} h^{d',d}_{r,s,t}\colon \prod_{\substack{d'|d\\ 0<d'<d}} J(d') \longrightarrow J_{r,s,t} \right).$$

$J(f_{r,s,t})$ と自然な射 $J_{r,s,t}\longrightarrow A_{r,s,t}$ の合成射を $\pi_{r,s,t}\colon J(d)\longrightarrow A_{r,s,t}$ と書く．

1 の原始 $d$ 乗根 $\zeta$ を $C_{r,s,t}$ の自己同型 $(u,v)\mapsto(u,\zeta v)$ に対応させることで，$A_{r,s,t}$ に環 $\mathbb{Z}[\zeta]$ の作用 $\Phi_{r,s,t}$ が定まる．次の定理が，本小節のゴールである．

**定理 C.9（[Wei76], [Roh78]）** 次が成立する．

(1) $(r,s,t)$ を許容可能な新しい 3 つ組とする．このとき，$(A_{r,s,t},\Phi_{r,s,t})$ は CM 型 $(\mathbb{Q}(\zeta),H_{r,s,t})$ の $\phi(d)/2$ 次元 CM アーベル多様体になる．
(2) $(r,s,t)$ を許容可能な新しい 3 つ組とする．このとき，任意の $a\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ に対して，ある de Rham コホモロジー類 $\eta_a=\eta_a^{(r,s,t)}\in H^1_{\mathrm{dR}}(A_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}})$ が存在して，$\pi_{r,s,t}^*\eta_a=\eta_{\langle ar\rangle,\langle as\rangle,\langle at\rangle}$ が成立する．この $\eta_a$ が正則微分形式（の類）であることと，$a\in H_{r,s,t}$ であることは同値である．
(3) 任意の $a\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ に対して，$\eta_a^{(r,s,t)}$ は環 $\mathbb{Z}[\zeta]$ の作用に関する $\sigma_a$ 固有ベクトルである．
(4) 2 つの許容可能な新しい 3 つ組 $(r,s,t),(r',s',t')$ が同値であるとき，$A_{r,s,t}$ と $A_{r',s',t'}$ は同種である．
(5) $J(d)$ は Abel 多様体
$$\prod_{\substack{0<d'|d\\ [(r,s,t)]\in NAT(d')}} A^{(d)}_{r,s,t}$$
と同種である．

**証明** まず，定理 C.9 の主張 (2) を示そう．$C_{r,s,t}$ と $F(d)$ の微分形式について，以下の 2 つの事項が観察できる．

(A) $c:=d^{-1}$ とおく．$(r,s,t)$ を許容可能な 3 つ組とし，$a$ を任意の整数とすると，
$$f^*_{r,s,t}\left(c\frac{v^a}{u(1-u)}du\right)=cx^{ar-d}y^{as-d}dx^d=x^{ar-1}y^{as-d}dx$$
が成立する．従って，$c\cdot\frac{v^a}{u(1-u)}du$ に $u$ と $(1-u)$ の適切な負冪を掛けることで，$f_{r,s,t}$ による引き戻しが $\eta_{\langle ar\rangle,\langle as\rangle,\langle at\rangle}$ になるような $C_{r,s,t}$ 上の有理微分形式 $\eta_a^{(r,s,t)}$ を構成できる．補題 C.3 より，$\eta_a^{r,s,t}$ が正則であることと，$a\in H_{r,s,t}$ であることは同値である．

(B) 既に (C.1) で見た通り，各 $\eta_{r,s,t}$ は作用素 $A,B$ の固有ベクトルである．$A$ と $B$ の作用に着目することで，
$$\bigcap_{\substack{d'|d\\0<d'<d}}\mathrm{Ker}\left(H^1_{\mathrm{dR}}(J(d)/\overline{\mathbb{Q}})\to H^1_{\mathrm{dR}}(J(d')/\overline{\mathbb{Q}})\right)=\bigoplus_{(r,s,t):\text{新}}\overline{\mathbb{Q}}\eta_{r,s,t}$$
が成立することが分かる．

これらの観察から，定理 C.9 の主張 (2) が従う．

主張 (3) を示そう．$j, k \in \mathbb{Z}$ を $rj + sk \equiv 1 \mod d\mathbb{Z}$ となるようにとるとき，

$$\Phi_{r,s,t}(\zeta) \circ f_{r,s,t} = f_{r,s,t} \circ A^j B^k$$

が成り立つ．従って，(C.1) と主張 (2) より，主張 (3) が従う．

主張 (1) を示そう．$S = S_{r,s,t}$ を補題 C.7 のように定義する．このとき，主張 (3) より，$\{\eta_a^{(r,s,t)}\}_{a \in S}$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上線型独立である．補題 C.7 より，$J_{r,s,t}$ は $\#S/2$ 次元のアーベル多様体であるため，$\{\eta_a^{(r,s,t)}\}_{a \in S}$ は $H^1_{\mathrm{dR}}(C_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}})$ の基底となる．主張 (2) の証明で行った観察 (B) から，

$$\bigoplus_{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \overline{\mathbb{Q}} \eta_a^{(r,s,t)} = \mathrm{Ker} \left( H^1_{\mathrm{dR}}(C_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \prod_{\substack{d' | d \\ 0 < d' < d}} H^1_{\mathrm{dR}} \left( \mathrm{Im}\, h^{d',d}_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}} \right) \right)$$

が成り立つので，$\{\eta_a^{(r,s,t)}\}_{a \in (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times}$ が $H^1_{\mathrm{dR}}(A_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}})$ の基底となることが分かる．特に，$A_{r,s,t}$ は $\phi(d)/2$ 次元の Abel 多様体である．更に，主張 (1) より，$\{\eta_a^{(r,s,t)}\}_{a \in H_{r,s,t}}$ は $\Gamma(A_{r,s,t}, \Omega)$ の基底をなす．よって，主張 (3) より $(A_{r,s,t}, \Phi_{r,s,t})$ は CM 型 $(\mathbb{Q}(\zeta), H_{r,s,t})$ の $\phi(d)/2$ 次元 CM アーベル多様体になる．

主張 (1) と同様に，$\eta_a^{(r,s,t)}$ という形の元からなる 1 次 de Rham コホモロジーの基底を比較することで，主張 (4), (5) が従う． □

**注意 C.10** 本稿では定理 C.9 を代数的な議論で証明したが，定理 C.9 には「微分形式 $\eta_{r,s,t}$ たちの積分値を計算して，$J(d)$ の格子を明示的に見て直和分解することを示す」という解析的な議論による証明もある（例えば [Wei76] 参照）．

## C.2 命題 2.16 の証明

$k$ を判別式 $d$ の虚二次体，$\mathcal{O}_k$ を $k$ の整数環とし，$\varepsilon$ を拡大 $k/\mathbb{Q}$ に対応する二次指標とする．

命題 2.16 は「与えられた $k$ の整環 $\mathfrak{o}$ と相異なる非負整数 $p_0, q_0$ に対して，周期が所望の形になるような $(p_0, q_0)$ 型の $\mathfrak{o}$ 乗法を持つアーベル多様体が存在する」ということを主張していた．本小節では，Fermat 曲線の周期に関するいくつかの結果の証明を次節にまわし，それらを一度を認めた上で，$A_{r,s,t}$ の周期を計算することで，命題 2.16 を証明する．

$QR := \{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \mid \varepsilon(a) = 1\}$ とおき，$NR := \{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \mid \varepsilon(a) = -1\}$ とおく．以下，許容可能な新しい 3 つ組 $(r, s, t)$ を固定し，

$$p := p_{r,s,t} = \#(H_{r,s,t} \cap QR)$$
$$q := q_{r,s,t} = \#(H_{r,s,t} \cap NR)$$

とおく．$p$ と $q$ に対して，次が成り立つ．

**補題 C.11** $k$ の類数を $h$ とおき，$w := \#\mathcal{O}_k^\times$ とおく．このとき，

$$\frac{w}{2} \cdot (p - q) = h(\varepsilon(r) + \varepsilon(s) + \varepsilon(t)) \tag{C.2}$$

が成立する．

**証明** $d = 3, 4$ の場合は直接計算することで等式 (C.2) が成立することを確認できる．($d = 3$ の場合は $(h, w) = (1, 6)$ であり，$d = 4$ の場合は $(h, w) = (1, 4)$ であることに注意する．)

$d > 4$ の場合を考える．このとき，$\mathcal{O}_k^\times = \{\pm 1\}$ であることに注意する．虚二次体の類数公式 ([加黒斎 05, 系 4.29])

$$h = -\frac{w}{2d} \sum_{0<a<d} \varepsilon(a)a$$

を思い出そう．この公式から，任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して

$$h\varepsilon(x) = -\frac{w}{2d} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \varepsilon(a)\langle ax \rangle$$

が成立することが分かる．更に，$\varepsilon$ が奇指標であることと，$H_{r,s,t}$ が $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ の部分群 $\{\pm 1\}$ に関する商の完全代表系をなすことから，

$$h\varepsilon(x) = -\frac{w}{2d} \left( \sum_{a \in H_{r,s,t}} \varepsilon(a)\langle ax \rangle - \sum_{a \in H_{r,s,t}} \varepsilon(a)(d - \langle ax \rangle) \right) \tag{C.3}$$

が得られる．定義より，任意の $a \in H_{r,s,t}$ に対して $\langle ar \rangle + \langle as \rangle + \langle at \rangle = d$ が成立することに注意して，等式 (C.3) に $x = r, s, t$ それぞれを代入したものを足し合わせると，

$$h(\varepsilon(r) + \varepsilon(s) + \varepsilon(t)) = \frac{w}{2} \sum_{a \in H_{r,s,t}} \varepsilon(a)$$

を得る．従って，$p = \#(H_{r,s,t} \cap QR)$ と $q = \#(H_{r,s,t} \cap NR)$ より，所望の等式 (C.2) を得る． $\square$

補題 C.11 より，直ちに次の系が従う．

**系 C.12** $(r, s, t) = (1, 1, d-2)$ とすると，$p \neq q$ が成り立つ．

$QR$ と $NR$ に整列順序を入れ，$J(d)$ 上の $n := \phi(d)/2$ 次微分形式

$$\omega := \omega_{r,s,t} = \bigwedge_{a \in QR} \eta_{\langle ar \rangle, \langle as \rangle, \langle at \rangle},$$
$$\nu := \nu_{r,s,t} = \bigwedge_{a \in NR} \eta_{\langle ar \rangle, \langle as \rangle, \langle at \rangle}$$

を考える．補題 C.3 より，$\omega \in H^{p,q}(J(d)_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ 及び $\nu \in H^{p,q}(J(d)_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ が成立する．$\mathbb{C}$ の部分集合 $L_\omega$, $L_\nu$ を

$$L_\omega := \left\{ \int_\gamma \omega \;\middle|\; \gamma \in H_n(J(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \right\},$$
$$L_\nu := \left\{ \int_\gamma \nu \;\middle|\; \gamma \in H_n(J(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \right\}$$

と定める．本小節では，（一部の議論を次の小節にまわして）次の定理を証明する．

**定理 C.13** ある複素数 $P(\omega), P(\nu) \in \mathbb{C}^\times$ が存在して，$\mathbb{Q}L_\omega = P(\omega)k$ 及び $\mathbb{Q}L_\nu = P(\nu)k$ が成立する．更に，この $P(\omega), P(\nu)$ について，

$$P(\omega) \sim b_k^p (2\pi i/b_k)^q,$$
$$P(\nu) \sim b_k^q (2\pi i/b_k)^p$$

が成立する．ここで，$b_k$ は定理 2.4 で与えた定数である．

定理 C.13 を用いると，本付録の目標であった命題 2.16 の証明を完遂できる．まず，それを見ておこう．

**命題 2.16 の証明** ここでは，一旦，定理 C.13 の主張を認めて，命題 2.16 を証明する．

$A_{r,s,t}$ は $(p, q)$ 型の $\mathcal{O}_k$ 乗法を持つ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のアーベル多様体である．系 C.12 より，$r, s, t$ を適切にとることで，$p \neq q$ が成り立つと仮定してよい．各 $a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ に対

して，$\eta_a$ を定理 C.9 で述べた $A_{r,s,t}$ 上の 1 次微分形式とする．このとき，$\omega, \nu$ はそれぞれ

$$\omega' := \bigwedge_{a \in QR} \eta_a \in H^n(A_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}}),$$
$$\nu' := \bigwedge_{a \in NR} \eta_a \in H^n(A_{r,s,t}/\overline{\mathbb{Q}})$$

の射影射 $\pi_{r,s,t}\colon J(d) \longrightarrow A_{r,s,t}$ によるの引き戻しである．$a \in QR$ のとき，$k^\times$ は $\eta_a$ に指標 $\chi^n$ で作用し，$a \in NR$ のとき，$k^\times$ は $\eta_a$ に指標 $\bar{\chi}^n$ で作用する．従って，$\omega' = \omega_{A_{r,s,t}}$ 及び $\nu' = \nu_{A_{r,s,t}}$ であるとしてよい．定義より，$\omega = \pi_{r,s,t}^*\omega'$ 及び $\nu = \pi_{r,s,t}^*\nu'$ が成り立つので，任意の $\gamma \in H_n(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に対して

$$\int_{\pi_{r,s,t*}\gamma} \omega_{A_{r,s,t}} = \int_\gamma \omega \in L_\omega,$$
$$\int_{\pi_{r,s,t*}\gamma} \nu_{A_{r,s,t}} = \int_\gamma \nu \in L_\nu$$

を得る．従って $\pi_{r,s,t}$ から誘導される写像 $H_n(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \longrightarrow H_n(A_{r,s,t}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ が全射であることと，定理 C.13 より，命題 2.16 の主張が得られる． □

定理 C.13 の証明には，次の小節で示される次の定理を用いる．

**定理 C.14（[Roh78]）** 次を満たす元 $\kappa \in H_1(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ が存在する．

(i) $\mathbb{Z}[A, B]\kappa = H_1(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ が成立する．

(ii) 任意の $j, k \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\int_{A^j B^k \kappa} \eta_{r,s,t} = \frac{B(r/d, s/d)}{d}(1-\zeta^r)(1-\zeta^s)\zeta^{rj+sk}$$

が成立する．ここで，$B(u, v) := \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt$ はベータ関数である．

**定理 C.13 の証明** 定理 C.14 の主張を一旦認めて，定理 C.13 を証明しよう．$(r, s, t)$ が許容可能な新しい 3 つ組であるとき，

$$(r', s', t') := (\langle -r \rangle, \langle -s \rangle, \langle -t \rangle)$$

も許容可能な新しい 3 つ組であり，$(p_{r,s,t}, q_{r,s,t}) = (q_{r',s',t'}, p_{r',s',t'})$ 及び $\nu_{r,s,t} = \omega_{r',s',t'}$ が成立する．従って，定理 C.13 の「$\nu$ の周期に関する主張」の証明は「$\omega$ の

周期に関する主張」の証明に帰着される．そこで以下では，$\omega$ の周期に関する主張のみを示す．

定理 C.14 より，任意の $\gamma \in H_1(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に対して，ある $I_{r,s,t}(\gamma) \in \mathbb{Q}(\zeta)$ が存在して，

$$\int_{A^j B^k \kappa} \eta_{r,s,t} = B(r/d, s/d) I_{r,s,t}(\gamma)$$

が成立する．定理 C.14 より，任意の $a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ と任意の $\gamma \in H_1(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に対して，

$$\sigma_a(I_{r,s,t}(\gamma)) = I_{\langle ar \rangle, \langle as \rangle, \langle at \rangle}(\gamma)$$

が成立することが分かる．ここで，定義 C.5 で述べた通り，$\sigma_a$ は $\zeta$ を $\zeta^a$ に対応させる $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ の元である．

Künneth の公式より，自然な同型

$$\bigwedge^n \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(J(d), \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(J(d), \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

が成立する．$H_1(J(d), \mathbb{Z})$ は自由 $\mathbb{Z}$ 加群なので，自然な写像

$$\bigwedge^n \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(J(d), \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigwedge^n H_1(J(d), \mathbb{Z}), \mathbb{Z}\right)$$

は同型である．更に，$\bigwedge^n H_1(J(d), \mathbb{Z})$ と $H_n(J(d), \mathbb{Z})$ は自由 $\mathbb{Z}$ 加群なので，同型

$$H_n(J(d), \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^n H_1(J(d), \mathbb{Z}) \tag{C.4}$$

を得る．$\omega$ と $\nu$ の定義から，次の補題が直ちに得られる．

**補題 C.15**　任意の $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H_1(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に対して，

$$\int_{\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n} \omega = \left( \prod_{a \in QR} B(\langle ar \rangle / d, \langle as \rangle / d) \right) \cdot \det \Big( \sigma_a(I_{r,s,t}(\gamma_i)) \Big)_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ a \in QR}}$$

が成立する．

$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H_1(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ とする．このとき，

$$M(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \Big( \sigma_a(I_{r,s,t}(\gamma_i)) \Big)_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ a \in QR}} \in M_n(\mathbb{Q}(\zeta))$$

と定める．定義より，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/k)$ の任意の元 $\sigma$ は $M$ の列を置換するので，$\sigma \det M(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \pm \det M(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ が成立する．ここで，符号 $\pm$ は $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ に依存しない．従って，次の補題が得られる．

**補題 C.16** ある元 $u \in k^\times$ が存在して，任意の $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H_1(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に対して，$\det M(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = k\sqrt{u}$ が成立する．

同型 C.4 より，$H_n(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ は $H_1(J(d)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ の元の積で生成される $\mathbb{Z}$ 加群であるため，定理 C.13 の前半の主張，すなわち次の系が従う．

**系 C.17** $P(\omega) := \prod_{a \in QR} B(\langle ar \rangle/d, \langle as \rangle/d)$ と定めるとき，$\mathbb{Q}L_\omega = P(\omega)k$ が成立する．

あとは，$P(\omega) \sim b_k^p (2\pi i/b_k)^q$，すなわち

$$\prod_{a \in QR} B(\langle ar \rangle/d, \langle as \rangle/d) \sim (b_k)^{p-q} \pi^q \tag{C.5}$$

が成立することを示せばよい．

$d = 3, 4$ の場合は，これが成り立つことが直接確認できる．以下では $d > 4$ と仮定する．このとき，$w := \#\mathcal{O}_k^\times = 2$ が成り立つことに注意する．

$\varepsilon(r, s, t) := \varepsilon(r) + \varepsilon(s) + \varepsilon(t)$ とおく．$\varepsilon(-1) = -1$ と $w = 2$ に注意すると，$b_k$ の定義と補題 C.11 より，

$$\begin{aligned} b_k^{p-q} = b_k^{h\varepsilon(r,s,t)} &\sim \left( \pi^h \prod_{0<a<d} \Gamma(a/d)^{\varepsilon(a)} \right)^{\varepsilon(r,s,t)/2} \\ &\sim \left( \pi^h \prod_{a \in QR} \left( \Gamma(\langle a \rangle/d) \cdot \Gamma(1 - (\langle a \rangle/d))^{-1} \right) \right)^{\varepsilon(r,s,t)/2} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，Euler の相補公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ を用いると，

$$b_k^{p-q} \sim \left( \sqrt{\pi}^{h-n} \prod_{a \in QR} \Gamma(\langle a \rangle/d) \right)^{\varepsilon(r,s,t)} \tag{C.6}$$

が得られる．一方, ガンマ関数によるベータ関数の表示 $B(u, v) = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v)$ と Euler の相補公式から，

$$B(\langle ar \rangle/d, \langle as \rangle/d) \sim \frac{\Gamma(\langle ar \rangle/d)\Gamma(\langle as \rangle/d)\Gamma(\langle at \rangle/d)}{\pi} \tag{C.7}$$

が従う．$\varepsilon(r)$ の値が $0, 1, -1$ のいずれであっても，

$$\prod_{a\in QR}\Gamma(\langle ar\rangle/d) \sim \sqrt{\pi}^{n(1-\varepsilon(r))}\left(\prod_{a\in QR}\Gamma(\langle ar\rangle/d)\right)^{\varepsilon(r)}$$

が成立することが確認できるので，(C.7) から

$$B(\langle ar\rangle/d, \langle as\rangle/d) \sim \sqrt{\pi}^{n(1-\varepsilon(r,s,t))}\prod_{a\in QR}\Gamma(\langle ar\rangle/d)^{\varepsilon(r,s,t)}$$

が得られる．よって，(C.6) と合わせて

$$B(\langle ar\rangle/d, \langle as\rangle/d) \sim \sqrt{\pi}^{n-\varepsilon(r,s,t)h} b_k^{p-q}$$

が成り立つ．$n = p+q$ かつ $h\varepsilon(r,s,t) = p-q$ より，$n - \varepsilon(r,s,t)h = 2q$ が成り立つので，所望の式 (C.5) を得る．これで定理 C.13 の証明が完了した． □

## C.3　定理 C.14 の証明

本小節では，前小節で保留にしていた，定理 C.14 の証明を行う．

まず，Fermat 曲線の基本群とホモロジー群の様子を観察しておこう．$\epsilon := e^{\pi i/d}$ とおく．$0 \leq j \leq d-1$ を満たす整数 $j$ に対して，

$$a_j := (0 : \zeta^j : 1),\ b_j := (\zeta^j : 0 : 1),\ c_j := (\epsilon\zeta^j : 0 : 1) \in F(d)(\mathbb{C})$$

と定めて，$F(d)_{af} := F(d)_{\mathrm{an}} \setminus \{a_j, b_j, c_j \mid 0 \leq j \leq d-1\}$ とおく．このとき，Riemann 面の $d^2$ 次不分岐 Galois 被覆

$$C_d\colon F(d)_{af} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0,1\};\ (x : y : 1) \longmapsto x^d$$

が定まる．区間 $(0,1)$ 内の点 $z_0$ を固定し，$\ell_A, \ell_B \in \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}, z_0)$ それぞれを中心 0，中心 1 の $z_0$ を通る左回り（正の向き）の円周（のホモトピー類）とする．このとき，$\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}, z_0)$ は $\ell_A$ と $\ell_B$ で生成される自由群になる．

$P_0 := (\sqrt[d]{z_0} : \sqrt[d]{1-z_0} : 1) \in C^{-1}(z_0) \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ とおく．$C_d$ から誘導される単射 $\pi_1(C_d)\colon \pi_1(F(d)_{af}.P_0) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}, z_0)$ の像は $\ell_A^d$, $\ell_B^d$ と交換子部分群

$$\langle \gamma\ell_A\ell_B\ell_A^{-1}\ell_B^{-1}\gamma^{-1} \mid \gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}, z_0)\rangle$$

で生成される部分群 $H$ になる．実際，ループ $\ell_A^d$，$\ell_B^d, \gamma\ell_A\ell_B\ell_A^{-1}\ell_B^{-1}\gamma^{-1}$ は $0, 1$ での回転数が $d$ の倍数になるので，$F(d)$ のループに持ち上がるので $H \subseteq \operatorname{Im}\pi_1(C_d)$ であり，更に $H$ は指数 $d^2$ の部分群であることから不分岐被覆の Galois 理論より $H = \operatorname{Im}\pi_1(C_d)$ が言える．従って，$H_1(F(d)_{af}, \mathbb{Z}) \simeq H^{\mathrm{ab}}$ が成り立つ．以下この同型で両者を同一視する．この同一視のもとで，$H_1(F(d)_{af}, \mathbb{Z})$ は $\ell_A^d$，$\ell_B^d$ と

$$(\ell_A^j\ell_B^k)(\ell_A\ell_B\ell_A^{-1}\ell_B^{-1})(\ell_A^j\ell_B^k)^{-1} \quad (0 \le j, k \le d-1)$$

で生成されるアーベル群である．ループ $\ell_A, \ell_B$ はそれぞれ，

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}, z_0)/H &= \operatorname{Gal}\left((F(d)_{af}, P_0)\middle/(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}, z_0)\right)\\ &\subseteq \operatorname{Aut}(F(d)_{af}, P_0)\end{aligned}$$

という同一視の下で $F(d)_{af}$ の自己同型 $A, B$ に対応している．これにより，$A, B$ の $\gamma \in H_1(F(d)_{af}, \mathbb{Z}) = H^{\mathrm{ab}}$ への作用は

$$\begin{aligned}A\gamma &= \ell_A\gamma\ell_A^{-1}\\ B\gamma &= \ell_B\gamma\ell_B^{-1}\end{aligned}$$

となる．従って $H_1(F(d)_{af}, \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}[A, B]$ 加群として 3 つの元 $\gamma_1 := \ell_A^d$, $\gamma_2 := \ell_B^d$, 及び $\gamma_3 := \ell_A\ell_B\ell_A^{-1}\ell_B^{-1}$ で生成される．以下では，$\kappa := -\gamma_3$ とおく．

**定理 C.14 の証明**　上でとった $\kappa$ が定理 C.14 の条件 (i)(ii) を満たすことを示そう．

まず，条件 (i) が満たされていること，すなわち，$\kappa$ が $\mathbb{Z}[A, B]$ 加群の $H_1(F(d), \mathbb{Z})$ の生成元になることを示そう．そのためには，$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ であること，すなわち，許容可能な任意の $(r, s, t)$ に対して，

$$\int_{\gamma_1} \eta_{r,s,t} = \int_{\gamma_2} \eta_{r,s,t} = 0$$

が成り立つことを示せばよい．まず，ループ $\gamma_1$ の積分については，

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \eta_{r,s,t} &= \int_{\ell_A^d} (z^{1/d})^{r-1}((1-z)^{1/d})^{s-d} dz^{1/d}\\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \int_{\ell_A} (z^{1/d})^{r-1}((1-z)^{1/d})^{s-d} dz^{1/d} = 0\end{aligned}$$

となる．ここで，多価関数 $z^{1/d}$ および $(1-z)^{1/d}$ はそれぞれ最初に主値 $z_0 \mapsto \sqrt[d]{z_0}$, $z_0 \mapsto \sqrt[d]{1-z_0}$ をとるように定めて，曲線に沿って解析接続していくものとした．ループ $\gamma_2$ の積分についても，同様にして $\int_{\gamma_2} \eta_{r,s,t} = 0$ が示せる．以上より，

$$H_1(F(d), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[A, B]\kappa$$

であることが示された．

最後に $\kappa$ が定理 C.14 の条件 (ii) を満たすことを示す．複素積分を計算する標準的な議論（Cauchy の積分定理を用いて積分路を変更して，極限をとるという議論）により，

$$\begin{aligned}
\int_\kappa \eta_{r,s,t} &= -\int_{\ell_A \ell_B \ell_A^{-1}} \eta_{r,s,t} \\
&= -(-1+\zeta^r - \zeta^{r+s} + \zeta^s) \int_0^1 t^{(r-1)/d}(1-t)^{(s-d)/d} dt^{1/d} \\
&= (1-\zeta^r)(1-\zeta^s)\frac{B(r/d, s/d)}{d}
\end{aligned}$$

が成り立つ．各 $j, k \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\int_{A^j B^k \kappa} \eta_{r,s,t} = \int_\kappa (A^j B^k)^* \eta_{r,s,t} = \zeta^{rj+sk} \int_\kappa \eta_{r,s,t}$$

であるので，条件 (ii) が成り立つ． □

# 参考文献


[AH62] Atiyah, M. F. and Hirzebruch, F., *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology **1** (1), 1962, 25–45.

[CS67] Chowla, S. and Selberg, A., *On Epstein's Zeta-function*, J. Reine Angew. Math. **227**, 1967, 86–110.

[Del68] Deligne, P., *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome **35**, 1968, 107–126.

[Del70] Deligne, P., *Equations diffétielles points à singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math. **163**, Berlin, Heidelberg, New York; Springer, 1970.

[DMOS82] Deligne, P., Milne, J. S., Ogus, A. and Shih, K.–Y., *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math. **900**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[Gro78] Gross, B. H., *On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg*, Invent. math. **45** (2), 1978, 193–211.

[Gro18] Gross, B. H., *On the periods of abelian varieties*, preprint, 2018. `http://abel.math.harvard.edu/~gross/preprints/`

[Hod50] Hodge, W. V. D., *The topological invariants of algebraic varieties*, Proceedings ICM 1950, AMS, Providence, RI, 1952, 181–192.

[KO68] Katz, N. M. and Oda, T., *On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters*, J. Math. Kyoto Univ. **8** (2), 1968, 199–213.

[Kan90] Kaneko, M., *A generalization of the Chowla-Selberg formula and the zeta functions of quadratic orders*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **66** (7), 1990, 201–203.

[Ler97] Lerch, M., *Sur quelques formules relatives au nombre des classes*, Bulletin des Sciences Mathématiques **21**, 1897, 290–304

[Mil86] Milne, J. S., *Jacobian Varieties*, Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984); Springer, New York, 1986, 167–212.

[NT91] Nakkajima, Y. and Taguchi, Y., *A generalization of the Chowla-Selberg formula*, J. Reine Angew. Math. **419**, 1991, 119–124.

[Roh78] Rohrlich, D. E., appendix to [Gro78].

[Ser56] Serre, J.-P., *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6**, 1956, 1–42.

[Shi66] Shimura, G., *Moduli and fibre systems of abelian varieties*, Ann. of Math. **83** (2), 1966, 294–338.

[Sil94] Silverman, J. H., *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Math. **151**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[SGA1] *Revêtements Étales et Groupe Fondamental* (SGA 1), Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[SGA4] Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas (SGA 4; Tome

1–3), Lecture Notes in Math. **269**, **270** and **305**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972–1973.

[Voi02] Voisin, C., *Hodge theory and complex algebraic geometry I*, Cambridge Studies in Advanced Math. **76**, (2002).

[Wei76] Weil, A., *Sur les Périodes des Intégrales Abéliennes*, Comm. Pure App. Math. **29**, 1976, 813–819

[加藤 88] 加藤十吉，位相幾何学，裳華房，数学シリーズ，1988.

[加黒斎 05] 加藤和也， 黒川重信，斎藤毅，数論 I Fermat の夢と類体論，岩波書店，2005.

[向井 08] 向井 茂， モジュライ理論 II，岩波書店，2008.

## 本報告集

[石塚] 石塚 裕大， アーベル多様体の基礎，本報告集.

[阿部] 阿部 紀行， Hermite 対称領域，本報告集.

[今井] 今井 直毅， 志村多様体の正準モデルの構成，本報告集.

[越川] 越川 皓永，Siegel モジュラー多様体，本報告集.

[清水] 清水 康司，志村多様体の整モデル，本報告集.

[松本] 松本 雄也， 志村多様体と K3 曲面: Tate 予想への応用，本報告集.