p-進保型形式と志村多様体

中村　健太郎 *

1　概要

本稿では, 志村多様体の p-進保型形式への応用として, p で有限傾斜 (finite slope) を持つ Siegel 保型形式の p-進族 (固有値多様体と呼ばれるリジッド解析的多様体) の構成に関する Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP1] の結果を紹介する.

この論文が書かれた当時 (出版は 2015 年), 固有値多様体を構成する一般的な方法としては他に, 完備コホモロジーを用いた構成 (Emerton [Em]), 過収束モジュラーシンボルを用いた構成 (Ash-Stevens [AS], Urban [Ur]) などが知られていた. いずれの構成においても保型形式を考えている代数群から定まる志村多様体 (より一般に局所対称空間) のコホモロジーを用いる点では共通しているが, どのようなコホモロジーを用いるかはそれぞれ異なっている.

[Em] においては, コホモロジーの係数は定数 ($\mathbb{Z}_p$) に固定されているが, 志村多様体の p におけるレベルを様々に動かしたある種の極限 (完備コホモロジー) が用いられる. [AS], [Ur] においては, 志村多様体のレベルは固定されているが, コホモロジーの係数が p 進解析的に定義される複雑なものになる. また, この両者においては, 考えているコホモロジーはベッチまたはエタールコホモロジーという位相的なコホモロジーであるという点は共通している. 例えば, [AS], [Ur] におけるコホモロジーの係数は, 代数群の代数的表現に付随する志村多様体上の局所系を自然に含むような大きな位相的層として定義される. ベッチコホモロジーが群コホモロジーとして記述されることなどから, これらの構成においてはコホモロジーやその係数を表現論的に考察することが重要になる.

これらに対し, [AIP1] の構成は (数論) 幾何的である. 志村多様体 (この論文では

* 佐賀大学　e-mail: `nkentaro@cc.saga-u.ac.jp`

Siegel モジュラー多様体を扱っている) のレベルは固定し大きな係数を考えるという点では [AS], [Ur] と共通しているが, 位相的コホモロジーではなく連接層のコホモロジーに近い代数的なコホモロジーが用いられるという点が異なる. 代数群の代数的表現に対して志村多様体上の保型ベクトル束が定義されたが, [AIP1] ではこのベクトル束を自然に含む過収束 (overconvergent) 保型ベクトル束と呼ばれる無限階数のベクトル束 (Banach 層) を構成し, これの大域切断 (0 次コホモロジー) を用いて固有値多様体を構成している. より正確には, 過収束保型ベクトル束は Siegel モジュラー多様体全体に定義される層ではなく, Siegel モジュラー多様体に付随する $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析的多様体の "ある開集合" 上に定義される層であり, この開集合上の大域切断が構成で用いられる. なお, [AIP2] では, 同様な考え方で Hilbert 保型式に対する固有値多様体を構成している.

以下本稿では, Siegel モジュラー多様体のどのような (p 進) 幾何的な側面を用いて Siegel 保型形式の p-進族が構成されるか, という [AIP1] の論文の技術的な部分の解説を行う. そのため, 保型形式の p-進族の研究の歴史について解説することができなかったが, これについては例えば [AIP1] の Introduction または [AIP3] などを参照されたい.

2 記号

本稿を通じて使用される記号をここにまとめる.

- $p \geqq 3$: 奇素数, L: $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}_L$: L の整数環.
- $\mathbb{C}_p := \hat{\overline{L}}$: L の代数閉包 $\overline{L}$ の p 進完備化, $v_p : \mathbb{C}_p^\times \to \mathbb{Q}$: $v_p(p) = 1$ となる付値, $|-|_p : \mathbb{C}_p \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$: $|p|_p = 1/p$ となる $\mathbb{C}_p$ 上の絶対値.
- $g \geqq 2$, $N \geqq 3$: 整数, $(p, N) = 1$ と仮定.
- $Y (:= \mathrm{Sh}_{K(N)}(\mathrm{GSp}_{2g/\mathbb{Q}}, X)_{/\mathcal{O}_L})$: Siegel モジュラー多様体, つまり, 主レベル N 構造を持つ g 次元主偏極アーベル多様体 $(A, \lambda, \psi_N : A[N] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g})$ のモジュライ空間.
- $Y_{\mathrm{Iw}}(p)$: 岩堀レベル p 構造を持つ Siegel モジュラー多様体, つまり, 主レベル N 構造と岩堀レベル p 構造を持つ g 次元主偏極アーベル多様体 $(A, \lambda, \psi_N, \mathrm{Fil}_\bullet \subseteq A[p])$ (ここで, $\mathrm{Fil}_\bullet = \{\{0\} = \mathrm{Fil}_0 \subseteq \mathrm{Fil}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Fil}_g \subseteq A[p]\}$ は, $\mathrm{Fil}_{i+1}/\mathrm{Fil}_i$ は位数 p で, 主偏極 λ と Weil ペアリングにより誘導さ

れる双対 $A[p] \times A[p] \to \mu_p$ で $\mathrm{Fil}_g = \mathrm{Fil}_g^{\perp}$(直交補空間) となるもの) のモジュライ空間. $Y, Y_{\mathrm{Iw}}(p)$ ともに, $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)$ 上定義されているものを考える.

- $X_{\mathrm{Iw}}(p) \to X$:$X_{\mathrm{Iw}}(p), X$ はそれぞれ $Y_{\mathrm{Iw}}(p)$, Y のトロイダルコンパクト化で, 射 $X_{\mathrm{Iw}}(p) \to X$ は自然な射 $Y_{\mathrm{Iw}}(p) \to Y$ と両立するもの (を一つとる).
- スキーム X に対して, $\mathrm{GL}_{g/X} := \mathrm{GL}_g(\mathcal{O}_X) \supset \mathrm{B}_{/X}$(上半三角行列全体)$\supset$ $\mathrm{T}_{/X}$(対角行列全体), $\mathrm{U}_{/X}$(べき単行列全体) (それぞれ X 上の代数群として考える).
- $X(\mathrm{T}) := \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$: T の指標群. 同型
$$X(\mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^g\colon \left[\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_g) \mapsto t_1^{k_1} \cdots t_g^{k_g}\right] \mapsto (k_1, \ldots, k_g)$$
で $\mathbb{Z}^g$ と同一視する.
- $X_+(\mathrm{T})$:支配的 (dominant) な指標全体, つまり, $X(\mathrm{T})$ の部分モノイドで上の同型で $\mathbb{Z}^g$ の部分集合 $\{(k_1, \ldots, k_g) \in \mathbb{Z}^g \mid k_1 \geqq \cdots \geqq k_g\}$ と対応するもの.

3 論文 [AIP1] の主定理

3.1 Siegel 保型形式

3.1.1 基本設定

$G \to Y$ を Y 上の普遍アーベルスキームとし, $e: Y \to G$ を単位元切断, $\omega_G := e^*(\Omega^1_{G/Y})$ を G の不変微分形式の層とする. ω_G は階数 g の局所自由 $\mathcal{O}_Y$ 加群である. Y 上のスキーム S に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^g, \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_S)$ を対応させる表現可能関手 $\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y^g, \omega_G)$ を $\mathcal{T}$ と表し, $\mathcal{T}$ を表現する Y 上のスキームも同じ記号 $\mathcal{T}$ で表す. 同様に, $\mathcal{T}^\times := \mathrm{Isom}_Y(\mathcal{O}_Y^g, \omega_G) \subseteq \mathcal{T}$ とおく. $\mathrm{GL}_{g/Y}$ の $\mathcal{O}_Y^g$ への自然な作用により, $\mathcal{T}$ および $\mathcal{T}^\times$ に $\mathrm{GL}_{g/Y}$ の自然な右作用が定まる. 特に, $\mathcal{T}^\times$ はこの作用によって Y 上の GL_g-torsor になる. 構造射を (同じ記号で) $\pi: \mathcal{T} \to Y, \pi: \mathcal{T}^\times \to Y$ と表す.

G, ω_G, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^\times$ などを $Y_{\mathrm{Iw}}(p)$ 上に引き戻したもの, $X, X_{\mathrm{Iw}}(p)$ 上へ自然に拡張したもの (G は $X, X_{\mathrm{Iw}}(p)$ 上の普遍半アーベルスキームとなる) なども, 同じ記号で G, ω_G などと表す.

3.1.2 保型ベクトル束

$X(\mathrm{T})$ 上の対合 (involution) $\kappa \mapsto \kappa'$ を, 自然な同型 $X(\mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^g$ によって $\mathbb{Z}^g$ 上の対合 $(k_1, \ldots, k_g) \mapsto (-k_g, \ldots, -k_1)$ に対応するものとする. これは対合 $X_+(\mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} X_+(\mathrm{T})$ を誘導する. $\kappa \in X_+(\mathrm{T})$ に対して, $X_{\mathrm{Iw}}(p)$ 上の $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{Iw}}(p)}$ 加群層 ω^κ を

$$\omega^\kappa := (\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\times})[\kappa'] := \{\varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\times} \mid \varphi(fh) = \kappa'(h)\varphi(f), {}^\forall f \in \mathcal{T}^\times, {}^\forall h \in \mathrm{B}_{/X_{\mathrm{Iw}}(p)}\}$$

(つまり, $X_{\mathrm{Iw}}(p)$ 上局所的に代数的な誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GL}_g}(\kappa')_{\mathrm{alg}/X_{\mathrm{Iw}}(p)}$ となる層) と定義する. ω^κ は有限局所自由 $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{Iw}}(p)}$ 加群になる.

3.1.3 Siegel 保型形式の空間

以上の準備のもとで, ($\mathcal{O}_L$ 上レベル N, 岩堀レベル p の) **重さ κ の Siegel 保型形式の空間**を $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa)$ によって定義する (つまり, 正則ベクトル値 Siegel 保型形式の $\mathcal{O}_L$ 上のモデルを考える). この空間の元を**重さ κ の Siegel 保型形式**と呼ぶ. また, **重さ κ の尖点的 Siegel 保型形式の空間**を

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa) := \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa(-D)) \subseteq \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa)$$

で定義し, この空間の元を**重さ κ の尖点的 Siegel 保型形式**と呼ぶ. ここで, $D := X_{\mathrm{Iw}}(p) \setminus Y_{\mathrm{Iw}}(p)$ とし, $\omega^\kappa(-D)$ は D でゼロとなる切断全体からなる ω^κ の部分層とする.

3.2 重さ空間

保型形式を補間する固有値多様体（eigenvariety）の構成のためには, まずは, 保型形式の重さを補間する**重さ空間（weight space）**というものを定義する必要がある. 我々の場合, 保型形式の重さは $X_+(\mathrm{T})$ でパラメトライズされているので, この $X_+(\mathrm{T})$ を稠密に含む “自然な"p 進的な対象を定義する必要がある.

3.2.1 重さ空間の定義

$\mathbb{Z}_p[[\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)]]$ を副有限アーベル群 $\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)(\xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_p^\times)^g)$ に付随する $\mathbb{Z}_p$ 係数の岩澤代数とする. $\mathcal{W}$ を $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ 上の許容的形式スキーム $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[[\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)]])$ のリジッド生成ファイバー (Berthelot 生成ファイバー) として得られる $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析的多様

体とする. $\mathcal{W}$ の $\mathbb{C}_p$-値点の集合 $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ は

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[[\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)]])(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) = \{\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{C}_p^\times : \text{連続準同型}\}$$

となっている. より一般に, $\mathbb{Q}_p$ 上の任意のアフィノイド代数 A に対して

$$\mathcal{W}(A) = \{\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to A^\times : \text{連続準同型}\}$$

が成り立つ. つまり, $\mathcal{W}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上のアフィノイド代数 A に対して群 $\{\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to A^\times : \text{連続準同型}\}$ を対応させる群関手を表現するリジッド解析的多様体である. この $\mathcal{W}$ を**重さ空間 (weight space)** と呼ぶ. 自然な制限写像 $\kappa \mapsto \kappa|_{\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)}$ は単射 $X(\mathrm{T}) \subset \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ を誘導する. この単射によって, $X_+(\mathrm{T})$ は $\mathcal{W}$ の中の Zariski 稠密な部分集合になることが知られている.

$X(\mathrm{T})$ 上の対合 $\kappa \mapsto \kappa'$ の拡張として, 対合 $\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) : \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_g) \mapsto \mathrm{diag}(t_g^{-1}, \ldots, t_1^{-1})$ から自然に誘導される $\mathcal{W}$ 上の対合も同じ記号で $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W} : \kappa \mapsto \kappa'$ と表す.

3.2.2 重さの解析性

$w \in \mathbb{Q}$ に対して, $p^w \in \mathbb{C}_p$ を $v_p(p^w) = w$ となる元 (特に固定しない) とする. $\mathbb{Q}_p$ 上のアフィノイド代数 A, $a \in A$, $r \in |\mathbb{C}_p^\times|_p \subseteq \mathbb{R}$ に対して, $B(a, r)_{/A}$ を A 上定義された中心 a 半径 r の閉円盤とする. 例えば $p^w \in A$ の時は, $B(a, 1/p^w)_{/A} = \mathrm{Spm}(A\{\frac{T-a}{p^w}\})$ となる. ただし,

$$A\left\{\frac{T-a}{p^w}\right\} := \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{T-a}{p^w}\right)^n \in A[[T-a]] \;\middle|\; a_n \to 0\,(n \to \infty)\right\}$$

とする.

$w \in \mathbb{Q}_{>0}$ とする. 連続準同型 $\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to A^\times$ がリジッド解析的写像

$$\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)\left(B(1, 1/p^w)_{/A}\right)^g \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}/A}^{\mathrm{an}}$$

に延びるとき, κ **は w-解析的である**という. ここで $\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)\left(B(1, 1/p^w)_{/A}\right)^g$ は, 自然な同型 $\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_p^\times)^g$ で両辺を同一視して

$$\left(\bigcup_{a \in \mathbb{Z}_p^\times} B(a, 1/p^w)_{/A}\right)^g \subset \left(\mathbb{G}_{\mathrm{m}/A}^{\mathrm{an}}\right)^g$$

で定義される A 上のリジッド解析的多様体とする．例えば，$w \in \mathbb{Z}_{>0}$ のとき $\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to A^\times$ が w-解析的であるとは，任意の $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_g) \in (\mathbb{Z}_p^\times)^g$ に対して $a_{\underline{n}} \in A$ $(\underline{n} = (n_1, \ldots, n_g) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}^g)$ で $a_{\underline{n}} \to 0$ $(\sum_{i=1}^g n_i \to \infty)$ となるものが存在して，任意の $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_g) \in \mathbb{Z}_p^g$ に対して

$$\kappa(\underline{x} + p^w \underline{y}) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}^g} a_{\underline{n}} \underline{y}^{\underline{n}}$$

となることである．ただし，$\underline{x} + p^w \underline{y} := (x_1 + p^w y_1, \ldots, x_g + p^w y_g)$, $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_g) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}^g$ に対して $\underline{y}^{\underline{n}} := y_1^{n_1} \cdots y_g^{n_g}$ と表す．

$w \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して

$$\mathcal{W}_w := \{\kappa \in \mathcal{W} \mid \kappa \text{ は } w\text{-解析的}\}$$

と定めると，$\mathcal{W}_w$ は $\mathcal{W}$ の許容的開集合で

$$\mathcal{W} = \bigcup_{w \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathcal{W}_w$$

となることが知られている．特に，任意の A および任意の連続準同型 $\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to A^\times$ に対して，ある w が存在して κ は w-解析的となる．また，$\kappa \in \mathcal{W}_w$ ならば $\kappa' \in \mathcal{W}_w$ となる．

3.3 局所解析的過収束保型層と局所解析的過収束保型形式

保型形式 $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa)$ の p 進的な族を構成するためには，$\kappa \in X_+(\mathrm{T})$ に対してだけではなく，任意の $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対しても $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa)$ に対応する保型形式の空間を定義する必要がある．その際，κ が $\mathcal{W}$ の中を連続的に動くのに応じて，対応する保型形式の空間も連続的に変化するようなものでなければならないが，代数的な性質を持つ保型形式の空間 $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa)$ では条件が強過ぎて p 進的に変動できない．そこで，保型形式の空間を p 進解析的に拡張した**局所解析的過収束 (overconvergent) 保型形式の空間**と呼ばれる，より大きい空間を定義する必要がある．このように拡張したものを考えることで，任意の $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対して定義でき，かつ，$\mathcal{W}$ 上連続的に変動する空間を得ることができるようになる．

3.3.1 局所解析的過収束保型層

$\mathcal{X}, \mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)$ を $X_L, X_{\mathrm{Iw}}(p)_L$ に付随する L 上のリジッド解析的多様体とする. 特に, $\mathcal{X}(\overline{L}) = X(\overline{L})$ などとなっている. $x \in \mathcal{X}$ に対して, G_x を G の x への底変換とする. G_x に付随する p-可除群 (p-divisible group) に対して定まる Hodge 高さと呼ばれる不変量 $\mathrm{Hdg}(G_x) \in [0,1]$ (§5.2.3) を用いて, $v \in [0,1]$ に対して

$$\mathcal{X}(v) := \{x \in \mathcal{X} \mid \mathrm{Hdg}(G_x) \leqq v\}$$

と定義する. $\mathcal{X}(v)$ は $\mathcal{X}$ の許容的開集合となり, $\mathcal{X}(0)$ は p で通常 (ordinary) な（半）アーベル多様体全体と一致する. また, 標準的部分群の理論 (§5.3.2) を用いて, 十分ゼロに近い $v \in [0,1]$ に対して, 許容的開集合 $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \subset \mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) := \{x = (G_x, \lambda, \psi_N, \mathrm{Fil}_\bullet \subseteq G_x[p]) \in \mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p) \mid \\ \mathrm{Hdg}(G_x) \leqq v,\ \mathrm{Fil}_g \text{ は } G_x[p] \text{ の標準的部分群 }\}\end{aligned}$$

と定義する.

$w \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\kappa \in \mathcal{W}(L)$ を w-解析的な連続準同型とする. [AIP1] では, w に対して十分小さい $v \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ (より正確には, $v < \frac{1}{2p^{n-1}}$ $(p \geqq 5)$, $v < \frac{1}{3p^{n-1}}$ $(p = 3)$ かつ $w \in (n - 1 + \frac{v}{p-1}, n - v\frac{p^n-1}{p-1}]$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在するような v) に対して, **局所解析的過収束保型層**と呼ばれる $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の Banach 層 (§6.2) $\omega_w^{\dagger\kappa}$ を定義した. この Banach 層 $\omega_w^{\dagger\kappa}$ の構成が [AIP1] で最も重要な部分であり, Siegel モジュラー多様体の p-進幾何的な性質（特に, p-可除群の標準的部分群の理論）を駆使することで構成される (§5.3.2).

3.3.2 局所解析的過収束保型形式

定義 3.1 $\kappa \in \mathcal{W}(L)$ を w-解析的な連続準同型とする. L ベクトル空間 $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$ を**重さ κ の w-解析的 v-過収束 Siegel 保型形式の空間**と呼び, **重さ κ の局所解析的過収束 Siegel 保型形式の空間**を

$$\mathrm{M}^{\dagger\kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p)) := \varinjlim_{v \to +0, w \to \infty} \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$$

で定義する.

Banach 層の一般論 (§6.2) により, $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$ には自然に Banach L 加群の構造が入る.

$\kappa \in X_+(\mathrm{T})$ とする．このとき, 任意の $w \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して自然な単射

$$\omega^{\kappa}|_{\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)} \hookrightarrow \omega_w^{\dagger\,\kappa}$$

および, これから自然に誘導される単射

$$\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^{\kappa}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\,\kappa})$$

が存在する (§5.3.2).

$\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^{\kappa})$ のときと同様にして, L ベクトル空間

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\,\kappa}) := \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\,\kappa}(-D))$$

を**重さ κ の w-解析的 v-過収束尖点的 Siegel 保型形式の空間**と呼び, **重さ κ の局所解析的過収束尖点的 Siegel 保型形式の空間**を

$$\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}_{\mathrm{cusp}}(X_{\mathrm{Iw}}(p)) := \varinjlim_{v \to +0, w \to \infty} \mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\,\kappa})$$

で定義する．

3.3.3 相対的局所解析的過収束保型形式

アフィノイド開集合 $\mathcal{U} = \mathrm{Spm}(A) \subseteq \mathcal{W}$ に対して, A への "普遍的な" 連続準同型 $\kappa_{\mathcal{U}} : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to A^{\times}$ を次の自然な射の合成

$$\kappa_{\mathcal{U}} : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{h \mapsto [h]} \mathbb{Z}_p[[\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)]]^{\times} \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{\times} \xrightarrow{\mathrm{res}} A^{\times}$$

として定義する．$\kappa_{\mathcal{U}} : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to A^{\times}$ は w-解析的であるとし, v は上と同様に取る．[AIP1] では, より一般に $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \times_L \mathcal{U}$ 上の Banach 層 $\omega_w^{\dagger\,\kappa_{\mathcal{U}}}$ で, 任意の $x \in \mathcal{U}$ に対して

$$\omega_w^{\dagger\,\kappa_{\mathcal{U}}} \hat{\otimes}_A L_x \xrightarrow{\sim} \omega_w^{\dagger\,\kappa_x}$$

(ここで, L_x は x での剰余体で, κ_x は $x \in \mathcal{U}(L_x)$ に対応する準同型とする) となるものを構成している．Banach 層の一般論により, A 上相対的な尖点的局所解析的過収束保型形式の空間 $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \times_L \mathcal{U}, \omega_w^{\dagger\,\kappa_{\mathcal{U}}})$ は Banach A 加群となる．

同様にして, A 上相対的な尖点的局所解析的過収束保型形式の空間を

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \times_L \mathcal{U}, \omega_w^{\dagger\,\kappa_{\mathcal{U}}}) := \mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \times_L \mathcal{U}, \omega_w^{\dagger\,\kappa_{\mathcal{U}}}(-D \times_L \mathcal{U}))$$

で定義する．

3.4 Hecke 作用

3.4.1 Hecke 作用

各素数 $l \nmid Np$ での Hecke 環 $\mathbb{T}_l := \mathbb{Z}[\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_l)//\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_l)]$ (ここで, $(-)//(-)$ は両側剰余類を表すとする) の制限直積を $\mathbb{T}^{(Np)} := \otimes'_{l\nmid Np}\mathbb{T}_l$ と表す. $\mathbb{U}_p := \mathbb{Z}[U_{p,1},\ldots,U_{p,g}]$ (g 変数 $U_{p,1},\ldots,U_{p,g}$ の $\mathbb{Z}$ 係数多項式環) とし, $\mathbb{T} := \mathbb{T}^{(Np)} \otimes \mathbb{U}_p$ とおく.

注意 3.2 実際には, $\mathbb{U}_p$ は Atkin-Lehner 環と呼ばれる p での岩堀 Hecke 環の可換な部分環として定義される.

Siegel モジュラー多様体上の Hecke 対応で定まる作用により, $*$ = 空集合, および, $* = \mathrm{cusp}$ に対して

$$\mathrm{H}^0_*(X_{\mathrm{Iw}}(p),\ \omega^\kappa),\quad \mathrm{H}^0_*(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v),\omega_w^{\dagger\kappa}),\quad \mathrm{H}^0_*(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)\times_L \mathcal{U},\omega_w^{\dagger\kappa_{\mathcal{U}}})$$

上への $\mathbb{T}$ 作用を定義することができる (§5.3.3).

3.4.2 $\mathbb{U}_p$ 作用のコンパクト性

過収束保型形式の空間 $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v),\omega_w^{\dagger\kappa})$ (一般には L 上無限次元) は保型形式の空間 $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p),\ \omega^\kappa)$ (L 上有限次元) と比べて大き過ぎるので, $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p),\ \omega^\kappa)$ を補間するためには $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v),\omega_w^{\dagger\kappa})$ から扱い易い大きさの部分空間を切り取る必要がある. 通常 p-進保型形式の族の肥田理論では, p での U_p 作用から定義される通常射影 (ordinary projector) が重要であった. これの一般化として, 固有値多様体の構成においては $\mathbb{U}_p$ 作用のコンパクト性が重要になる. より正確に, [AIP1] では $U_{p,g}$ 作用に関する次の性質が重要となる.

- 作用 $U_{p,g}$ は Banach 加群 $\mathrm{H}^0_*(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v),\omega_w^{\dagger\kappa})$ および $\mathrm{H}^0_*(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)\times_L \mathcal{U},\omega_w^{\dagger\kappa_{\mathcal{U}}})$ 上のコンパクト作用素になる (§5.3.3)..

3.4.3 有限傾斜局所解析的過収束保型形式

$f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v),\omega_w^{\dagger\kappa})$ に対して, $\mathbb{U}_p f = \{uf \mid u \in \mathbb{U}_p\}$ で生成される $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v),\omega_w^{\dagger\kappa})$ の部分 L ベクトル空間を $\langle\mathbb{U}_p f\rangle_L$ とおく. $\mathbb{U}_p$ 作用のコンパクト

性との関連から, 固有値多様体の理論で保型形式を補間するためには次の有限傾斜性の条件を課さなければならない.

定義 3.3 $\dim_L \langle \mathbb{U}_p f \rangle_L < \infty$ で, 全ての $1 \leqq i \leqq g$ に対して $U_{p,i}$ が $\langle \mathbb{U}_p f \rangle_L$ に同型で作用するとき, f は**有限傾斜**（finite slope）であるという.

注意 3.4 各 $U_{p,i}$ は岩堀 Hecke 環の中では可逆であることが知られており, 岩堀 Hecke 環の作用を持つ $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ （$\kappa \in X_+(\mathrm{T})$）は（固有代数多様体の連接層の大域切断であるから）有限次元 L ベクトル空間である. よって, $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^\kappa) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の全ての元は有限傾斜になる.

3.5 Siegel モジュラー固有値多様体の存在定理

3.5.1 局所解析的過収束 Hecke 固有形式

$0 \neq f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa}) \otimes_L \overline{L}$ を $\mathbb{T}$ 作用に関する同時固有形式とする. 本稿では, これを**局所解析的過収束 Hecke 固有形式**と呼ぶ ($l|N$ となる素数での Hecke 作用は考えない). 固有値を対応させる環準同型（つまり, 任意の $T \in \mathbb{T}$ に対して $Tf = \Theta_f(T)f$ で定義される環準同型）を $\Theta_f \colon \mathbb{T} \to \overline{L}$ と表す（ L ベクトル空間 $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$ の $\mathbb{T}$ 作用で安定な $\mathcal{O}_L$ 上のモデルがあること (§5) を用いると, より強く $\Theta_f \colon \mathbb{T} \to \mathcal{O}_{\overline{L}}$ となることがわかる). $U := \prod_{1 \leqq i \leqq g} U_{p,i} \in \mathbb{T}$ とおく. このとき, f が有限傾斜であることは $\Theta_f(U) \neq 0$ であることと同値である.

3.5.2 [AIP1] の主定理

L 上のリジッド解析的多様体 $\mathcal{Z}$ に対して, 部分 $\mathcal{O}_L$ 代数

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}^{\leqq 1} := \{ f \in \mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \mid |f(z)|_p \leqq 1 \, (\forall z \in \mathcal{Z}) \}$$

を定める.

$\mathcal{W}$ は重さ空間であることを思い出そう. 次の定理が Siegel モジュラー固有値多様体に関する [AIP1] の主定理である.

定理 3.5 ([AIP1, Theorem 1.1, Theorem 1.2]) $\mathcal{W}$ 上のリジッド解析的多様体

$$w : \mathcal{E} \to \mathcal{W}$$

と環準同型 $\Theta_{\mathcal{E}} : \mathbb{T} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\leqq 1}$ の組 $(\mathcal{E}, \Theta_{\mathcal{E}})$ で以下の性質を満たすものが存在する：

1. $\Theta_{\mathcal{E}}(U) \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\times}$.
2. $\mathcal{E}$ は g 同次元 (equidimensional), かつ, $w : \mathcal{E} \to \mathcal{W}$ は局所有限射.
3. 各 $\kappa \in \mathcal{W}(\overline{L})$ に対して, 写像

$$w^{-1}(\kappa)(\overline{L}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(\mathbb{T}, \overline{L}) : x \mapsto \Theta_x$$

(Θ_x は $\Theta_{\mathcal{E}}$ の x への底変換とする) は全単射

$$\begin{aligned} w^{-1}(\kappa)(\overline{L}) \xrightarrow{\sim} \{\Theta \colon \mathbb{T} \to \overline{L} \mid & \text{有限傾斜局所解析的過収束 Hecke 固有形式} \\ & f \in \mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}_{\mathrm{cusp}}(X_{\mathrm{Iw}}(p)) \otimes_L \overline{L} \text{ が存在して } \Theta = \Theta_f \text{となる} \} \end{aligned}$$

を誘導する.

4. $\mathcal{E}(\overline{L})$ の部分集合

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathrm{cl}} := \{x \in \mathcal{E}(\overline{L}) \mid \kappa := w(x) \in X_+(T) & \text{ であり, 有限傾斜 Hecke 固有形式} \\ f \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(X_{\mathrm{Iw}}(p), \omega^{\kappa}) \otimes_L \overline{L} & \text{ が存在して } \Theta_x = \Theta_f \text{となる} \} \end{aligned}$$

は $\mathcal{E}$ の中で Zariski 稠密である.

注意 3.6 主定理の主張においては, 扱う対象を $\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p))$ 全体ではなく尖点的な局所解析的過収束保型形式 $\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}_{\mathrm{cusp}}(X_{\mathrm{Iw}}(p))$ に制限している. このことと関連して, [AIP1] では $\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}_{\mathrm{cusp}}(X_{\mathrm{Iw}}(p))$ に対して $(\mathcal{U} = \mathrm{Spm}(A) \subseteq \mathcal{W})$

- $\mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \times_L \mathcal{U}, \omega_w^{\dagger\,\kappa_{\mathcal{U}}})$ は射影的 Banach A 加群である,
- 各 $x \in \mathcal{U}$ に対して, 自然な射

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \times_L \mathcal{U}, \omega_w^{\dagger\,\kappa_{\mathcal{U}}}) \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)_{L_x}, \omega_w^{\dagger\,\kappa_x})$$

は全射である,

という 2 つの性質が証明されている. 射影的という条件は固有値多様体の構成において Coleman の p 進スペクトル理論を適用するために必要な条件である (§4.2). 全射性は同型

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) \times_L \mathcal{U}, \omega_w^{\dagger\,\kappa_{\mathcal{U}}}) \hat{\otimes}_A L_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)_{L_x}, \omega_w^{\dagger\,\kappa_x})$$

を誘導し, この同型の存在は定理の条件 4. と関連する. これらの性質の証明は, [AIP1] の論文で技術的に最も難しい部分である (本稿では説明できない). 証明では,

$Y_{\mathrm{Iw}}(p)$ のトロイダルコンパクト化 $X_{\mathrm{Iw}}(p)$ だけではなく極小コンパクト化も用いる. $g=1$ のとき（つまり, モジュラー曲線のとき）は, $\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p))$ 全体に対しても上の 2 つの性質と同様の性質が証明できる. 従って, 主定理の主張も $\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p))$ 全体を考えたもの (特に, Eisenstein 級数も含むよう) に拡張することができる. $g \geqq 2$ の場合, $\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p))$ に対する上の 2 つの性質の反例は [AIP1] では特に挙げられていないが「We believe that the cuspidality assumption is necessary when $g \geqq 2$」というコメントがある.

3.6 局所解析的過収束保型形式の古典性定理

定理 3.5 の性質 4. は, $X_+(\mathrm{T})$ が $\mathcal{W}$ の中で稠密であることと次に述べる古典性定理との帰結である.

$\kappa=(k_1,\ldots,k_g)\in X_+(\mathrm{T})$, $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_g)\in\mathbb{R}^g_{\geqq 0}$ とする. 各 i に対して $U_{p,i}$ の固有値の v_p での付値が a_i 未満となる $\{U_{p,i}\}_{1\leqq i\leqq g}$ の同時一般化固有ベクトルの生成する $\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p))\otimes_L \overline{L}$ の部分 $\overline{L}$ 加群を $(\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p))\otimes_L \overline{L})^{<\underline{a}}$ と表す.

定理 3.7 ([AIP1, Theorem 7.1.1]) $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_g)\in\mathbb{R}^g_{\geqq 0}$ を

$$a_i := k_{g-i}-k_{g-i+1}+1 \ \ (1\leqq i\leqq g-1),\ \ a_g := k_g-\frac{g(g-1)}{2}$$

と定める. このとき, 包含関係

$$\mathrm{M}^{\dagger\,\kappa}(X_{\mathrm{Iw}}(p))^{<\underline{a}}\subseteq \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(p),\omega^{\kappa})$$

が成り立つ.

注意 3.8 この定理の証明も本稿ではできないが, 定理 3.5 の性質 4. が, この古典性定理の帰結であることの理由 (雰囲気？) を簡単に説明したい. まず, $X_+(\mathrm{T})$ が $\mathcal{W}$ の中で稠密であることから, 任意の重さの固有形式の十分近くには重さが $X_+(\mathrm{T})$ に含まれる固有形式が存在する. よって, 重さが $X_+(\mathrm{T})$ に含まれる任意の固有形式の十分近くに古典的固有形式があることを示せばよい. 古典性定理は, $U_{p,i}$ の固有値の p 進付値が保型形式の重さと比べて十分小さければ, その保型形式は古典的であるということを主張している. $U_{p,i}$ の固有値の p 進付値と保型形式の重さに関して, 前者は局所的には定数であり, 後者は各点の周りで激しく変動する（例えば, $\kappa=(k_1,\ldots,k_g)$

のどんな小さな近傍を取っても, 十分大きな m_i に対して $(k_1+p^{m_1},\dots,k_g+p^{m_g})$ はその近傍に含まれる) ので, 古典性定理の条件を満たすような点が十分近くに存在し, 古典性定理から古典的固有形式が十分近くに存在することが示せる.

4 固有値多様体の構成の抽象論（Eigenvariety machine）

4.1 Banach 加群上のコンパクト作用素

4.1.1 Banach 加群

A を L 上のアフィノイド代数, $|-|$ を A 上のノルムとする.

定義 4.1 A-加群 M と関数 $|-|: M\to\mathbb{R}_{\geqq 0}$ が以下の性質を満たすとき, $(M,|-|)$ をノルム付き A 加群とよぶ:

1. $m\in M$ に対して, $|m|=0$ となることと $m=0$ となることは同値,
2. 各 $m,n\in M$ に対して, 不等式 $|m+n|\leqq\sup\{|m|,|n|\}$ が成り立つ,
3. 各 $a\in A$, $m\in M$ に対して, 不等式 $|am|\leqq|a||m|$ が成り立つ.

ノルム $|-|$ から定まる位相に関して完備となるノルム付き A 加群 $(M,|-|)$ を **Banach A 加群**という.

ノルム付き A 加群 $(M,|-|)$ に対して, M 上の別のノルム関数 $|-|'$ が $|-|$ と同相な位相を M に誘導することと, $|-|'$ が $|-|$ とノルムとして同値となることは同値である. そこで以下では, Banach A 加群を (位相的 A 加群と見て) 単に M と表し, ノルム $|-|$ は特に固定しないことにする.

M を A 加群, A_0 を A の有界開部分 $\mathcal{O}_L$ 代数, M_0 を M の p-進完備な部分 A_0 加群で $M_0[1/p]=M$ となるものとする. このとき, M には M_0 が単位球となるような Banach A 加群の構造が自然に入る.

二つの Banach A 加群 M, M' に対して, Banach A 加群 $M\hat{\otimes}_A M'$ をセミノルム付き A 加群 $M\otimes_A M'$ の分離完備化として定義する. ここで, $x\in M\otimes_A M'$ のセミノルムは, $\inf_{x=\sum_i m_i\otimes m_i'}\{\sup_i\{|m_i||m_i'|'\}\}$ と定義される ($|-|$, $|-|'$ はそれぞれ M, M' 上のノルム).

4.1.2 射影的 Banach 加群

定義 4.2 1. 集合 I に対して, A 加群 $C_A(I)$ を

$$C_A(I) := \{f : I \to A \mid \lim_{i\to\infty} f(i) = 0\}$$

と定義する. ここで, $\lim_{i\to\infty} f(i) = 0$ とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して I の有限部分集合 I_ε が存在して任意の $i \in I \setminus I_\varepsilon$ に対して $|f(i)| < \varepsilon$ となることとする. $|f| := \sup_{i\in I} |f(i)|$ で定義されるノルムにより $C_A(I)$ は Banach A 加群となる.

2. Banach A 加群 M に対して, 集合 I が存在して $C_A(I) \xrightarrow{\sim} M$ となるとき, M は**正規直交化可能** (orthonormalizable) という.
3. Banach A 加群 M に対して, 集合 I と Banach A 加群 M' が存在して $M \oplus M' \xrightarrow{\sim} C_A(I)$ となるとき, M は**射影的**であるという.

例 4.3 $w \in \mathbb{Q}_{>0}$ とし, $\mathbb{Z}_p$ 上の A に値を持つ w-解析的関数のなす A 加群, つまり,

$$\mathbb{Z}_p + B(0, 1/p^w)_{/A} := \bigcup_{a\in\mathbb{Z}_p} B(a, 1/p^w)_{/A} \subseteq B(0,1)_{/A}$$

上のリジッド解析的関数の空間を

$$\mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A) := \Gamma(\mathbb{Z}_p + B(0, 1/p^w)_{/A}, \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p+B(0,1/p^w)_{/A}})$$

とおく. $\mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A)$ は正規直交化可能な Banach A 加群となる. 例えば $w \in \mathbb{Z}_{>0}$ のとき, 任意の元 $f \in \mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A)$ に対して $a_n^{(i)} \in A$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$, $0 \leqq i \leqq p^w - 1$) で $a_n^{(i)} \to 0$ ($n \to \infty$) となるものが存在して, 任意の $y \in \mathbb{Z}_p$ に対して

$$f(i + p^w y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} y^n$$

となる. このとき, $f \mapsto (a_n^{(i)})_{n\geqq 0, 0\leqq i\leqq p^w-1}$ は Banach A 加群の同型

$$\mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A) \xrightarrow{\sim} C_A(\coprod_{0\leqq i\leqq p^w-1} \mathbb{Z}_{\geqq 0})$$

を導く.

4.1.3 コンパクト準同型

A を L 上のアフィノイド代数, $|-|$ を A 上のノルムとする. M, N を二つの Banach A 加群とする. M から N への連続 A 線形準同型のなす A 加群を $\mathrm{Hom}(M, N)$ と表す. $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$ に対してノルムを $|f| := \sum_{m \in M \setminus \{0\}} \frac{|f(m)|}{|m|}$ と定義することで $\mathrm{Hom}(M, N)$ は Banach A 加群となる. $\mathrm{Im}(f)$ が有限生成 A 加群となる $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$ 全体からなる $\mathrm{Hom}(M, N)$ の部分 A 加群を $\mathrm{Hom}(M, N)_{\mathrm{fin}}$ と表す. $\mathrm{Hom}(M, N)_{\mathrm{fin}}$ の $\mathrm{Hom}(M, N)$ 内での閉包を $\mathrm{Hom}(M, N)_{\mathrm{comp}}$ で表す. $\mathrm{Hom}(M, N)_{\mathrm{comp}}$ の元を**コンパクト準同型**という. Banach A 加群の間の射 $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ に対して, f または g がコンパクトならば合成 $g \circ f$ もコンパクトとなる（定義から明らか）.

例 4.4 次に挙げる 2 つの写像 g_1, g_2 はコンパクト写像の典型例であり, 固有値多様体への応用においてもこのタイプのコンパクト写像が現れる. まず, $w' > w \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して, 自然な包含写像

$$g_1 : \mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A) \hookrightarrow \mathrm{LA}_{w'}(\mathbb{Z}_p, A)$$

はコンパクトである. 実際, 例えば $w' = w + 1 > w \in \mathbb{Z}_{>0}$ の場合, $f \in \mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A)$ が $(a_n^{(i)})_{n \geqq 0, 0 \leqq i \leqq p^w - 1} \in C_A(\bigsqcup_{0 \leqq i \leqq p^w - 1} \mathbb{Z}_{\geqq 0})$ と対応しているとすると, $0 \leqq i \leqq p^w - 1$, $0 \leqq j \leqq p - 1$ および $y \in \mathbb{Z}_p$ に対して

$$\begin{aligned} f((i + p^w j) + p^{w+1} y) &= f(i + p^w (j + py)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} (j + py)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{n-k} p^k y^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} j^{n-k} a_n^{(i)} \right) y^k =: \sum_{k=0}^{\infty} p^k b_k^{(i + p^w j)} y^k \end{aligned}$$

となっているので, 包含写像 $\mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A) \hookrightarrow \mathrm{LA}_{w'}(\mathbb{Z}_p, A)$ は写像

$$C_A(\bigsqcup_{0 \leqq i \leqq p^w - 1} \mathbb{Z}_{\geqq 0}) \hookrightarrow C_A(\bigsqcup_{0 \leqq i \leqq p^{w'} - 1} \mathbb{Z}_{\geqq 0}) : (a_n^{(i)})_{n \geqq 0} \mapsto (p^n b_n^{(i)})_{n \geqq 0}$$

と同一視され（i の部分の添え字は省略した）, これがコンパクト準同型であることは容易にわかる. 同様な考察で

$$g_2 : \mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A) \to \mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A) : f \mapsto \tilde{f} := [z \mapsto f(pz)]$$

で定まる写像もコンパクトであることがわかる. $w > 1$ のときは $\tilde{f} \in \mathrm{LA}_{w-1}(\mathbb{Z}_p, A)$ となり (収束半径が大きくなり), $g_2 : \mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A) \to \mathrm{LA}_{w-1}(\mathbb{Z}_p, A) \hookrightarrow \mathrm{LA}_w(\mathbb{Z}_p, A)$ は包含写像を経由するので, 包含写像のコンパクト性からも写像 g_2 のコンパクト性を導くことができる.

4.2 Eigenvariety machine

4.2.1 設定

以下, 次のデータ $(A, M, \mathbb{T}, U)$ を固定する.

- $\mathcal{U} := \mathrm{Spm}(A)$: L 上の被約かつ同次元 (equidimensional) アフィノイド.
- M: 射影的 Banach A 加群.
- $\mathbb{T}$: $\mathrm{End}(M) := \mathrm{Hom}(M, M)$ の可換部分 A 代数.
- $U \in \mathbb{T}$: コンパクト作用素.

注意 4.5 Siegel モジュラー固有値多様体への応用では, $\mathcal{U}$ は重さ空間 $\mathcal{W}$ のアフィノイド開集合, M は A 上相対的な尖点的局所解析的過収束保型形式の空間, $\mathbb{T}$ は Hecke 環, $U = \prod_{1 \leqq i \leqq g} U_{p,i}$ に対して理論を適用する.

この状況で, M への $\mathbb{T}$ 作用の同時固有値系をパラメトライズする $\mathcal{U}$ 上のリジッド解析的多様体 (固有値多様体と呼ぶ) $\mathcal{E}$ を構成することが, ここでの我々の目標である.

4.2.2 構成の概略

もしも M が A 上有限生成であると仮定すると, $\mathbb{T}$ は有限 A 代数 $\mathrm{End}(M)$ の可換部分 A 代数となるので, $\mathbb{T}$ は L 上のアフィノイドの構造を持ち,

$$\mathcal{E} \colon = \mathrm{Spm}(\mathbb{T}) \to \mathcal{U}$$

(射は自然な構造射) が求める固有値多様体となる.

一般の場合の固有値多様体の構成の基本的なアイデアは, (大雑把に言えば)M をコンパクト作用素 U の "A 上有限生成となる一般化固有ベクトル空間へ分解" し, 分解して得られる空間それぞれに対して前段の方法で構成した固有値多様体を貼り合わせることで全体の固有値多様体を構成するというものである. M が "A 上有限生成とな

る一般化固有ベクトル空間へ分解" することを保証するのが次に解説する **Coleman の p 進スペクトル理論**であり, この理論が固有値多様体の構成の理論的な核となっている. より正確には, 一般化固有ベクトルの空間が有限生成となるためには固有値が可逆元 (有限傾斜) という条件が必要である. 従って, 固有値多様体 $\mathcal{E}$ は U の固有値がゼロでない $\mathbb{T}$ の同時固有値系をパラメトライズする空間になる.

4.2.3 Coleman の p 進スペクトル理論

各 $x \in \mathcal{U}$ に対して, M の x での底変換の完備化として得られる Banach L_x 加群 (L_x は x での剰余体) を M_x と表し, $\mathbb{T}$, U の M_x への底変換をそれぞれ $\mathbb{T}_x$, U_x と表す. U_x は M_x のコンパクト作用素となる. よって, $f_n \to U_x$ ($n \to \infty$) となる $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{End}(M_x)_{\mathrm{fin}}$ が存在するが, このとき次の式の右辺

$$\det(1 - TU_x|M_x) := \lim_{n\to\infty}\det(1 - Tf_n|_{\mathrm{Im}(f_n)}|\,\mathrm{Im}(f_n)) \in L_x[[T]]$$

は収束し (ここでは, 各 $m \geqq 0$ に対して T^m の係数が収束するという意味とする), この極限は $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の取り方によらないことが証明できる. べき級数 $\det(1-TU_x|M_x)$ は任意の $x \in \mathbb{C}_p$ に対して $\det(1 - xU_x|M_x)$ が収束するという強い収束性を持つことも簡単に証明できる.

M が射影的という我々の状況では, 以上の定義を A 上に自然に拡張することができる. つまり, A 係数のべき級数 $\det(1 - TU|M) \in A[[X]]$ で, 各 $x \in \mathcal{U}$ での底変換が $\det(1 - TU_x|M_x)$ となるものを自然に定義することができる. 簡単のため, これを

$$P(T) := \det(1 - TU|M)$$

とおく. 前段で述べた $\det(1 - TU_x|M_x)$ の持つ収束性により, $P(T)$ は L 上のリジッド解析的多様体 $\mathcal{U} \times_L (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}$ 上のリジッド解析的関数になる.

定義 4.6 $P(T) = 0$ で定まる $\mathcal{U} \times_L (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}$ の Zariski 閉部分多様体を

$$\mathcal{Z} := \mathrm{Spm}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}\times_L(\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}}/(P(T)))$$

と表す. $\mathcal{Z}$ を (A, M, U) に付随する**スペクトル多様体**と呼ぶ.

注意 4.7 $(x, \lambda) \in \mathcal{U} \times_L (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}$ に対して, $(x, \lambda) \in \mathcal{Z}$ であることと, $\lambda \neq 0$ かつ $U_x m = \lambda^{-1} m$ となる $m \in M_x \otimes_{L_x} \overline{L}_x \setminus \{0\}$ が存在することは同値となる. つまり, $\mathcal{Z}$ は M への U 作用の有限傾斜な固有値をパラメトライズする空間である.

M への U 作用に関する広義固有空間分解に関して次が成り立つ.

定理 4.8 $p_1 : \mathcal{Z} \to \mathcal{U}$ を自然な射影とする. このとき, $\mathcal{Z}$ の許容的開アフィノイド被覆 $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ で以下の性質を満たすものを取ることができる：

1. $\mathcal{U}_i := p_1(\mathcal{V}_i)$ は $\mathcal{U}$ のアフィノイド開集合 ($\mathcal{U}_i = \mathrm{Spm}(A_i)$ とおく), かつ, $p_1|_{\mathcal{V}_i} : \mathcal{V}_i \to \mathcal{U}_i$ は有限平坦となる,
2. $P_i(T) \in A_i[[X]]$ を $P(T)$ の A_i への底変換とする. このとき,
$$P_i(T) = Q_i(T)R_i(T),$$
$$Q_i(T) \in 1 + A_i[T]\,(\text{多項式!}),\ R_i(T) \in 1 + A_i[[T]],\ (Q_i(T), R_i(T)) = 1$$
となる $P_i(T)$ の分解があり,
$$\mathcal{V}_i = \mathrm{Spm}(A_i[T]/(Q_i^*(T))) \subset \mathcal{U}_i \times_L (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}$$
となる. ここで, $Q_i^*(T) := T^{\deg Q_i(T)} Q_i(1/T)$ とする.

さらに, このとき次が成り立つ.

3. M_i を M の A_i への底変換とすると, U 作用で安定な閉 A_i 加群への分解
$$M_i = N_i \oplus F_i$$
で,
$$Q_i^*(U)N_i = \{0\},\ \ Q_i^*(U)|_{F_i} \in \mathrm{Aut}(F_i)$$
を満たすものが一意的に存在する. このとき, N_i は階数 $\deg Q_i(T)$ の有限生成射影的 A_i 加群で
$$\det(1 - UT|N_i) = Q_i(T)$$
となる.
4. 対応 $\mathcal{V}_i \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{V}_i) := N_i$ は有限局所自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ 加群 $\mathcal{M}$ を定める.

注意 4.9 分解の一意性から, $\mathbb{T}$ は N_i, F_i に作用し, 従って $\mathcal{M}$ にも作用する.

定義 4.10 $\mathbb{T}$ の像で生成される $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}}(\mathcal{M})$ の連接部分 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ 代数に付随するリジッド解析的多様体を $\mathcal{E}$ と表す. $\mathcal{E}$ を $(A, M, \mathbb{T}, U)$ **に付随する固有値多様体**と呼ぶ.

構成から以下がわかる．自然な射 $w : \mathcal{E} \to \mathcal{Z} \xrightarrow{p_1} \mathcal{U}$ があり，この射 w は局所有限射，$\mathcal{E}$ は同次元でその次元は $\mathcal{U}$ の次元と等しい．$x \in \mathcal{U}$ に対して，集合 $w^{-1}(x)$ は $M_x \otimes_{L_x} \overline{L}_x$ への $\mathbb{T}_x$ 作用の同時固有値系で U_x の固有値がゼロでないもの全体からなる集合と 1 対 1 に対応する．

5 局所解析的過収束保型層の構成

この節では，[AIP1] で最も重要な局所解析的過収束保型層 $\omega_w^{\dagger\kappa}$ $(\kappa \in \mathcal{W}, w \in \mathbb{Q}_{>0})$ の構成の概略について解説する．

5.1 基本的なアイデア

古典的な重さ $\kappa \in X_+(\mathrm{T})$ に対して，保型層 ω^κ は局所的には代数的な誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GL}_g}(\kappa')$ と同型であった．よって，ω^κ の解析化である $\omega_w^{\dagger\kappa}$ の構成のためには，局所的に解析的な誘導表現となるようなものを構成すればよい，と考えることは自然であろう．その際に重要なことは，最終的には Coleman の p 進スペクトル理論で何らかの有限性を持つものを取り出さなければならないので，p での Hecke 環のある元がコンパクトに作用するような解析的な対象を取らなければならないことである．そのような対象として，[AIP1] では以下に解説する岩堀型の解析的誘導表現が用いられている（実際は，[AIP1] だけではなく，現在までに知られている固有値多様体の多くの構成において，それぞれの代数群に応じた岩堀型の解析的誘導表現が用いられている）．

5.1.1 岩堀型の解析的誘導表現

$\mathrm{GL}_g(\mathbb{Q}_p)$ の岩堀部分群を

$$\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p) := \{h \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p) \mid h \pmod{p} \in \mathrm{B}(\mathbb{F}_p)\}$$

と表し，部分群 $\mathrm{I}_-(\mathbb{Z}_p) \subseteq \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ を

$$\mathrm{I}_-(\mathbb{Z}_p) := \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p) \cap \mathrm{U}_-(\mathbb{Z}_p)$$

で定める．ここで，U_- は下半三角べき単行列全体のなす部分群とする．岩堀分解から写像

$$\mathrm{I}_-(\mathbb{Z}_p) \times \mathrm{B}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p) \colon (i, b) \mapsto ib$$

は同相写像である. p での Hecke 作用と関連するものとして

$$\mathrm{T}^{-} := \{\mathrm{diag}(p^{m_1}, \ldots, p^{m_g}) \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p) \mid m_1 > \cdots > m_g\}$$

を定める. $t = \mathrm{diag}(p^{m_1}, \ldots, p^{m_g}) \in \mathrm{T}^{-}$, $h = (h_{i,j})_{1 \leqq i,j \leqq g} \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{Q}_p)$ に対して $t^{-1}ht = (p^{m_j - m_i} h_{i,j})_{1 \leqq i,j \leqq g}$ であるので, 特にこれは作用 $\mathrm{T}^{-} \times \mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p) : (t, i) \mapsto t^{-1}it$ を誘導し, $t^{-n}\,\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p)t^{n} \to \{I_g\}$ $(n \to \infty)$ となる. さらに, 岩堀分解から作用

$$\mathrm{T}^{-} \times \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p) : (t, ib) \mapsto t^{-1}itb$$

$(i \in \mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p), b \in \mathrm{B}(\mathbb{Z}_p))$ を誘導する.

$w \in \mathbb{Q}_{>0}$ とする. 連続関数 $f : \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p) \to A$ が w-解析的であるとは, ($\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} (p\mathbb{Z}_p)^{\frac{g(g-1)}{2}}$ となる自然な同相のもとで) $f|_{\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p)}$ が

$$\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p)\left(B(0, 1/p^{w})_{/A}\right)^{\frac{g(g-1)}{2}} := \left(\bigcup_{a \in p\mathbb{Z}_p} B(a, 1/p^{w})_{/A}\right)^{\frac{g(g-1)}{2}} \subset \left((\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}_{/A}\right)^{\frac{g(g-1)}{2}}$$

上のリジッド解析的関数に延びることと定義する. $\kappa \in \mathcal{W}(A)$ を w-解析的な準同型とする. このとき, w-解析的な誘導表現 $V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,A}$ (または, $V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa/\mathrm{Spm}(A)}$ とも書く) を

$$V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,A} := \{f : \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p) \to A \mid f|_{\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p)} \text{は } w\text{-解析的}, \\ f(ib) = \kappa'(b)f(i), {}^{\forall}i \in \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p), {}^{\forall}b \in \mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)\}$$

で定義する. $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$ 作用に関する保型性と岩堀分解により, 対応 $f \mapsto f|_{\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p)}$ は $V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,A}$ から $\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p)$ 上の w-解析的関数の空間への A 加群としての同型を与える. この同型により $V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,A}$ に Banach A 加群の構造を与える. T^{-} の $\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p)$ への作用を用いて, $V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,A}$ への T^{-} 作用を $f \in V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,A}$, $t \in \mathrm{T}^{-}$ に対して $tf \in V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,A}$ を

$$tf(ib) := f(t^{-1}itb) \ \ (i \in \mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p), b \in \mathrm{B}(\mathbb{Z}_p))$$

で定める. T^{-} の $\mathrm{I}_{-}(\mathbb{Z}_p)$ への作用の性質とコンパクト写像の例 (§4.1.3) から T^{-} の任意の元の $V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,A}$ への作用はコンパクトとなる. この作用は p での Hecke 作用と関連するものであり特に重要になる.

$\kappa \in X_{+}(\mathrm{T}) \subseteq \mathcal{W}(L)$ のとき, 自然な単射

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GL}_g}(\kappa')_{\mathrm{alg}/L} \hookrightarrow V^{w-\mathrm{an}}_{\kappa,L} : f \mapsto f|_{\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)}$$

が存在する.

5.1.2 局所解析的過収束保型層の構成の概略

局所解析的過収束保型層 $\omega_w^{\dagger\kappa}$ の定義の基本的なアイデアは, $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上局所的に $V_{\kappa/\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)}^{w-\mathrm{an}}$ となる $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の Banach 層を構成することである.

$\kappa \in X_+(\mathrm{T})$ に対しては, $\mathrm{GL}_{g/X_{\mathrm{Iw}}(p)}$ は $\mathcal{T}^\times = \mathrm{Isom}_{X_{\mathrm{Iw}}(p)}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{Iw}}(p)}^g, \omega_G)$ への作用として, 幾何的に自然なものとして現れた. そのため, $\omega_w^{\dagger\kappa}$ の構成では, $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上局所的に

$$\mathrm{I}_-(\mathbb{Z}_p)B(0,1/p^w)_{/A}^{\frac{g(g-1)}{2}} \times \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)B(1,1/p^w)_{/A}^g \times \mathrm{U}(\mathbb{Z}_p) \cdots (*)$$

となり, $\mathcal{T}^\times$ と関係を持つ空間を構成する必要がある. $(*)$ は, $\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ と $B(0,1/p^w)_{/A}^{\frac{g(g-1)}{2}} \times B(1,1/p^w)_{/A}^g$ との交わりを持つ積になっているが, $\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ の部分は $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の普遍アーベル多様体 G の p^n 等分点 $G[p^n]$ の標準的部分群への作用として, $B(0,1/p^w)_{/A}^{\frac{g(g-1)}{2}} \times B(1,1/p^w)_{/A}^g$ の部分はベクトル束 ω_G のフィルトレイションへの作用として現れる. この両者から, 積 $(*)$ を得るためには, 交わりでの両者の関係を調べる必要がある. これは, 標準的部分群と ω_G を Hodge-Tate 写像と呼ばれる写像で結びつけることで行われる.

以下の小節では, 上に定義なしで述べたことのおおまかな解説を行う.

5.2 準備

5.2.1 Hodge-Tate 写像

S をスキーム, G を S 上有限表示平坦群スキームとする. $\omega_G := e^*(\Omega_{G/S}^1)$ を不変微分形式の層とする. G および ω_G は対応

$$S' \mapsto G(S'), \quad S' \mapsto \Gamma(S', \omega_{G\times_S S'})$$

によって S 上の fppf 層とみなす. $G^D := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_{m/S})$ を G の Cartier 双対とする (つまり, G^D は S 上の fppf 層

$$S' \mapsto \mathrm{Hom}_{S'\text{-group}}(G\times_S S', \mathbb{G}_{m/S'})$$

を表現する S 上の群スキーム). 標準的な同型 $G \xrightarrow{\sim} (G^D)^D$ があることに注意. 標準的な不変微分形式 $\frac{dT}{T} \in \omega_{\mathbb{G}_m}$ を用いて **Hodge-Tate 写像**

$$\mathrm{HT}_G : G^D \to \omega_G$$

を

$$\mathrm{HT}_G(S') : \mathrm{Hom}_{S'\text{-group}}(G \times_S S', \mathbb{G}_{m/S'}) \to \Gamma(S', \omega_{G\times_S S'}) : f \mapsto f^*\left(\frac{dT}{T}\right)$$

で定義される fppf 層の射とする．

例 5.1　$G = \mu_{n/S} = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}_{m/S} \xrightarrow{x\mapsto x^n} \mathbb{G}_{m/S})$ のとき，

$$G^D = \mathrm{Hom}(\mu_{n/S}, \mathbb{G}_{m/S}) = (\mathbb{Z}/n)_{/S}$$

(定数群スキーム) である．$\Omega_{\mu_{n/S}/S} = \left(\mathcal{O}_S[T]/(T^n - 1, nT^{n-1})\right)\frac{dT}{T}$ であるから（$T = 1$ を代入することで）$\omega_{\mu_{n/S}} = (\mathcal{O}_S/n)\frac{dT}{T}$ となる．$\mathrm{HT}_{\mu_{n/S}}$ は

$$\mathrm{HT}_{\mu_{n/S}} : (\mathbb{Z}/n)_{/S} \to (\mathcal{O}_S/n)\frac{dT}{T} : 1 \mapsto \frac{dT}{T}$$

で与えられる写像になる．特に，$\mathrm{HT}_{\mu_{n/S}}$ を線形化したものは fppf $\mathcal{O}_S$ 加群の同型

$$\mathrm{HT}_{\mu_{n/S}} \otimes \mathrm{id} : (\mathbb{Z}/n)_{/S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \omega_{\mu_{n/S}}$$

を導く．より一般に，降下（descent）理論により，G が乗法的（つまり，S 上エタール局所的に $\mu_{n/S}$（$n \geqq 0$）の有限個の積となるもの）のときも同型

$$\mathrm{HT}_G \otimes \mathrm{id} : G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \omega_G$$

が得られる．反対に，G がエタールのときは $\omega_G = 0$ であるから HT_G もゼロ写像となる．

5.2.2　通常 p 可除群

$\mathfrak{X}$ を $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ 上局所有限型な形式スキーム，$G = \varinjlim_n G[p^n]$ を $\mathfrak{X}$ 上の p 可除群とする．$n = 1$ に対して ($\iff$ 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して)，$\mathfrak{X}$ 上の有限平坦群スキームの完全列

$$0 \to G[p^n]^0 \to G[p^n] \to G[p^n]^{\text{ét}} \to 0$$

で $G[p^n]^{\text{ét}}$ はエタール，$G[p^n]^0$ は乗法的となるものが存在するとき，G は**通常（ordinary）**であるという．このような拡大は (標準的同型を除いて) 一意的に取れ，従って $G^{\text{ét}} := \varinjlim_n G[p^n]^{\text{ét}}$ および $G^0 := \varinjlim_n G[p^n]^0$ も $\mathfrak{X}$ 上の p 可除群になる．このとき，上の短完全列から誘導される短完全列

$$0 \to \omega_{G[p^n]^{\text{ét}}} \to \omega_{G[p^n]} \to \omega_{G[p^n]^0} \to 0$$

があるが, $G[p^n]^{\text{ét}}$ はエタールで $\omega_{G[p^n]^{\text{ét}}} = \{0\}$ なので同型

$$\omega_{G[p^n]} \xrightarrow{\sim} \omega_{G[p^n]^0}$$

を得る．さらに, Hodge-Tate 写像によって, 乗法的な $G[p^n]^0$ に対して同型

$$\mathrm{HT}_{G[p^n]^0} \otimes \mathrm{id} : (G[p^n]^0)^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \omega_{G[p^n]^0}$$

が得られる．この二つの同型と自然な同型

$$\omega_G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/p^n \xrightarrow{\sim} \omega_{G[p^n]}$$

とを合成することで, 同型

$$(G[p^n]^0)^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/p^n$$

が得られ, この同型の n に関する射影極限を取ることで同型

$$T_p((G^0)^D) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \omega_G$$

が得られる．ここで, $T_p((G^0)^D) := \varprojlim_n (G[p^n]^0)^D$ とする．

5.2.3 Hasse 不変量

S を $p\mathcal{O}_S = 0$ となるスキームとする．$\mathcal{O}_S$ 加群 M や S 上のスキーム X に対して, 絶対 Frobenius $\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S : x \mapsto x^p$ による底変換をそれぞれ $M^{(p)}, X^{(p)}$ と表す．G を S 上の p 可除群とする．G の Verschiebung $V : G^{(p)} \to G$(つまり, G^D の相対 Frobenius $F : G^D \to (G^D)^{(p)}$ の双対射) は G, $G^{(p)}$ の不変微分形式間の $\mathcal{O}_S$ 準同型 $V^* : \omega_G \to \omega_{G^{(p)}}$ を誘導する．底変換との可換性から自然な同型 $\omega_{G^{(p)}} \xrightarrow{\sim} (\omega_G)^{(p)}$ が存在し, ω_G は階数 $\dim G$ の射影的 $\mathcal{O}_S$ 加群であるので, V^* の行列式により誘導される射

$$\det(\omega_G) \xrightarrow{\det(V^*)} \det(\omega_{G^{(p)}}) \xrightarrow{\sim} \det((\omega_G)^{(p)}) \xrightarrow{\sim} (\det(\omega_G))^{(p)} \xrightarrow{\sim} (\det(\omega_G))^{\otimes p}$$

（ここで, 最後の同型は任意の可逆 $\mathcal{O}_S$ 加群 $\mathcal{L}$ に対して $\mathcal{L}^{(p)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\otimes p} : a \otimes x \mapsto a \cdot x^{\otimes p}$ （$a \in \mathcal{O}_S, x \in \mathcal{L}$）で定まる自然な同型とする）は $\mathcal{O}_S$ 準同型

$$\mathcal{O}_S \to (\det(\omega_G))^{\otimes(p-1)}$$

を誘導する. この射による $1 \in \mathcal{O}_S$ の像を

$$\mathrm{Ha}(G) \in (\det(\omega_G))^{\otimes(p-1)}$$

と表し, これを G の **Hasse 不変量**と呼ぶ.

G を $\mathcal{O}_L$ 上の p 可除群とする. $\mathcal{O}_{L,1} := \mathcal{O}_L/p$ とおく. 同型

$$(\det(\omega_{G\otimes_{\mathcal{O}_L}\mathcal{O}_{L,1}}))^{\otimes(p-1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{L,1}$$

を一つ取り, $H \in \mathcal{O}_L$ を, この同型による $\mathrm{Ha}(G) := \mathrm{Ha}(G \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1})$ の像の $\mathcal{O}_L$ への持ち上げとする. このとき,

$$\mathrm{Hdg}(G) := \max\{v_p(H), 1\} \in [0,1]$$

と表し, これを G の **Hodge 高さ**と呼ぶ. $\mathrm{Hdg}(G)$ は, 同型や持ち上げ H の取り方によらない. さらに, 次の同値関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hdg}(G) = 0 &\iff V : (G \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1})^{(p)} \to G \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1}\text{はエタール}\\ &\iff G \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1}\ \text{は通常}\\ &\iff G\ \text{は通常}\ .\end{aligned}$$

また, 上の同値な条件が成り立つとき,

$$G[p^n]^0 \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1} = \mathrm{Ker}(F^n : G \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1} \to (G \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1})^{(p^n)})$$

が成り立つ.

G が $\mathcal{O}_L$ 上のアーベル多様体のとき, $\mathrm{Ha}(G)$, $\mathrm{Hdg}(G)$ を G に付随する p 可除群の Hasse 不変量, Hodge 高さと定義する.

5.3 $\omega_w^{\dagger\kappa}$ の定義の概略

$\mathfrak{X}$ を X の p 進完備化とする. $v \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ に対して (簡単のため $p^v \in L$ とする), $\mathfrak{X}(v)$ を次で定義する. まず, $\mathfrak{X}$ の開集合 $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A)$ で $\det(\omega_G)^{\otimes(p-1)}|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$ となるものを考える. この同型による Hasse 不変量 $\mathrm{Ha}(G) \in \det(\omega_G \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1})^{\otimes(p-1)}$ の $\det(\omega_G)^{\otimes(p-1)}$ への持ち上げ (一つ選ぶ) の像を $\mathrm{Ha} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$ とおき,

$$\mathfrak{U}(v) := \mathrm{Spf}\left(A\left\{\frac{\mathrm{Ha}}{p^v}\right\}\right) \to \mathfrak{U}$$

と定める. これは, 持ち上げや同型の取り方によらずに定まり, 貼り合わせによって

$$\mathfrak{X}(v) \to \mathfrak{X}$$

を定めることができる. $\mathfrak{X}(v)$ のリジッド生成ファイバーは $\mathcal{X}(v)$ となる.

標準的部分群の理論を用いると, 同様にして, $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ の形式モデル $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ を定義することができる (§5.3.2).

$\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の Banach 層 $\omega_w^{\dagger\kappa}$ は, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の形式的 Banach 層 $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ のリジッド生成ファイバー (§6.2) として定義される. そこで以下, $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ の定義の概略について解説する.

5.3.1 $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上の $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ の定義

$\mathfrak{X}(0)$ 上においては G(に付随する p 可除群) は通常であるので, $\mathfrak{X}(0)$ 上乗法的な p 可除群 G^0 と $\mathfrak{X}(0)$ 上エタールな p 可除群 $G^{\text{ét}}$ があり, $\mathfrak{X}(0)$ 上の p 可除群の短完全列

$$0 \to G^0 \to G \to G^{\text{ét}} \to 0$$

が存在し, Hodge-Tate 写像により得られる同型

$$(G[p^n]^0)^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/p^n$$

および

$$T_p((G^0)^D) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \omega_G$$

が存在する. このとき, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ は

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0) = \{x = (G_x, \lambda, \psi_N, \mathrm{Fil}_\bullet \subseteq G_x[p]) \mid (G_x, \lambda, \psi_N) \in \mathfrak{X}(0), \mathrm{Fil}_g = G_x[p]^0\}$$

で定義される.

ここでは, 一般の $v \in [0,1]$ に対する $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ の定義, 及び, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の形式的 Banach 層 $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ の定義の概略を解説するための準備として, まずは, $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ を $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上に制限したものが, 上の G の分解と Hodge-Tate 写像を用いてどう定義されるかについて解説する.

$n \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$ に対して, $\mathcal{X}(0)$ のエタール被覆 $\mathcal{X}_1(p^n)(0)$ を

$$\mathcal{X}_1(p^n)(0) := \mathrm{Isom}_{\mathcal{X}(0)}((\mathbb{Z}/p^n)^g, (G[p^n]^0)^D)$$

で定義し, $\mathfrak{X}(0)$ の $\mathcal{X}_1(p^n)(0)$ での正規化を $\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ と表す．これらは 4 つ組

$$(G, \lambda, \psi_N, \psi : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \xrightarrow{\sim} (G[p^n]^0)^D)$$

(ただし G は通常) の同型類を (適当なベース上で) 分類する空間である．$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ への自然な作用を通じて, 有限群 $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ が $\mathcal{X}_1(p^n)(0)$ 及び $\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ にそれぞれ $\mathcal{X}(0)$, $\mathfrak{X}(0)$ 上の同型として作用している．

この作用の部分群 $\mathrm{I}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) := \{g \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) | \bar{g} \in \mathrm{B}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\}$ への制限で割ることで自然な同一視

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0) = \mathfrak{X}_1(p^n)(0)/\,\mathrm{I}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

が得られる．商写像を

$$\pi_3 : \mathfrak{X}_1(p^n)(0) \to \mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$$

と表す．

また, $\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ 上の普遍的な同型 $\psi : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \xrightarrow{\sim} (G[p^n]^0)^D$ の $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}$ への底拡大と Hodge-Tate 写像から誘導される同型

$$(G[p^n]^0)^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)} \xrightarrow{\sim} \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}/p^n$$

の合成として同型

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)} \xrightarrow{\sim} \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}/p^n \cdots (**)$$

が得られる．

次に,

$$\mathcal{GR} := \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}}(\mathcal{O}^g_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}, \omega_G)/(\mathrm{B}_{/\mathfrak{X}_1(p^n)(0)})$$

を ω_G のフィルトレイション

$$\mathrm{Fil}_\bullet\omega_G = \{\{0\} = \mathrm{Fil}_0\omega_G \subseteq \mathrm{Fil}_1\omega_G \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Fil}_g\omega_G = \omega_G\}$$

で各 $\mathrm{gr}_i\omega_G := \mathrm{Fil}_i\omega_G/\mathrm{Fil}_{i-1}\omega_G$ が階数 1 となるものをパラメトライズする $\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ 上のグラスマン多様体とし,

$$\mathcal{GR}^+ := \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}}(\mathcal{O}^g_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}, \omega_G)/(\mathrm{U}_{/\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}) \to \mathcal{GR}$$

を各 i に対する $\mathrm{gr}_i\omega_G$ の基底 w_i の集合 $\{w_i\}_{i=1}^g$ をパラメトライズする $\mathcal{GR}$ 上の形式スキームとする．

$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ の標準基底を $\{e_i\}_{i=1}^g$ とし, $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ の標準的なフィルトレイション $\mathrm{Fil}_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ を $\mathrm{Fil}_i(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g := \oplus_{j=1}^i \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}e_j$ で定める.

以上の準備の下, $w \in (n-1, n]$ で $p^w \in L$ となるものに対し, 同型 $(**)$ を mod p^w して得られる同型

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}/p^w \xrightarrow{\sim} \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}/p^w \cdots (***)$$

を考える. 各元 $\mathrm{Fil}_\bullet\omega_G \in \mathcal{GR}$ は, mod p^w することで同型 $(***)$ の右辺のフィルトレイションを導くが, これが同型 $(***)$ を通じて左辺の $\mathrm{Fil}_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ から自然に誘導されるフィルトレイションと等しくなるとき, $\mathrm{Fil}_\bullet\omega_G$ は w-**許容的である**といい, w-許容的なもの全体を (この関手を表現する形式スキームを)

$$\mathfrak{IW}_w \to \mathcal{GR}$$

と表す. この射と自然な構造射 $\mathcal{GR} \to \mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ との合成を

$$\pi_2 : \mathfrak{IW}_w \to \mathfrak{X}_1(p^n)(0)$$

と表す. また, $(\mathrm{Fil}_\bullet\omega_G, \{w_i\}_{i=1}^g) \in \mathcal{GR}^+ \to \mathfrak{X}_1(p^n)$ で, $\mathrm{Fil}_\bullet\omega_G$ が w-許容的で, かつ, $\{w_i\}_{i=1}^g \pmod{p^w}$ が同型 $(**)$ を通じて $\{e_i \otimes 1\}_{i=1}^g \pmod{p^w}$ と等しくなるとき, $(\mathrm{Fil}_\bullet\omega_G, \{w_i\}_{i=1}^g)$ は w-**許容的である**といい, w-許容的なもの全体を

$$\mathfrak{IW}_w^+ \to \mathcal{GR}^+$$

と表す. $(\mathrm{Fil}_\bullet\omega_G, \{w_i\}_{i=1}^g) \mapsto \mathrm{Fil}_\bullet\omega_G$ で定まる射を

$$\pi_1 : \mathfrak{IW}_w^+ \to \mathfrak{IW}_w$$

と表す.

$\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ 上の形式的な単位円盤を $\mathfrak{B}(0,1) := \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}\{X\})$ とおく. ω_G の $\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ 上局所的な基底を取ると, $\mathcal{GR}$ および $\mathcal{GR}^+$ はそれぞれ ($\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ 上の) $\mathrm{GL}_g\,/\,\mathrm{B}$ および $\mathrm{GL}_g\,/\,\mathrm{U}$ と自然に同一視されるが, このとき w-許容的な基底を選ぶと $\mathfrak{IW}_w$ および $\mathfrak{IW}_w^+$ はそれぞれ

$$\mathfrak{IW}_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p^w\mathfrak{B}(0,1) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^w\mathfrak{B}(0,1) & p^w\mathfrak{B}(0,1) & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \mathrm{B}\,/\,\mathrm{B}$$

および

$$\mathfrak{IW}_w^+ = \begin{pmatrix} 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) & 0 & \dots & 0 \\ p^w\mathfrak{B}(0,1) & 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^w\mathfrak{B}(0,1) & p^w\mathfrak{B}(0,1) & \cdots & 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) \end{pmatrix} \times \mathrm{U}\,/\,\mathrm{U}$$

と自然に同一視できる.

以上により, 次の射の列

$$\pi := \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1 : \mathfrak{IW}_w^+ \xrightarrow{\pi_1} \mathfrak{IW}_w \xrightarrow{\pi_2} \mathfrak{X}_1(p^n)(0) \xrightarrow{\pi_3} \mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$$

を得たが, 以上の議論から $\mathfrak{IW}_w^+$ は $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上局所的には

$$\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p) \begin{pmatrix} 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) & 0 & \dots & 0 \\ p^w\mathfrak{B}(0,1) & 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^w\mathfrak{B}(0,1) & p^w\mathfrak{B}(0,1) & \cdots & 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) \end{pmatrix} \mathrm{U}\,/\,\mathrm{U}$$

となるような (岩堀型の w-解析的誘導表現を考えるときに現れた) 空間になっていることがわかる. また,

$$\mathfrak{T}_w := \begin{pmatrix} 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+p^w\mathfrak{B}(0,1) \end{pmatrix}$$

とおくと, $\mathfrak{IW}_w^+$ は $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上 $\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)\mathfrak{T}_w\,\mathrm{U}$ が自然に作用 (U は自明に作用) している.

ここで, $\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to \mathcal{O}_L^\times$ を w-解析的な指標とし, $\kappa' : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to \mathcal{O}_L^\times$ を §3.1 で定めた対合 $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W} : \kappa \mapsto \kappa'$ による κ の像とする. このとき κ' も w-解析的であり,「w-解析的」の定義より κ' は

$$\kappa' : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)\mathfrak{T}_w \to \widehat{\mathbb{G}}_m$$

へ延長するが, U 上自明と定めることで, さらに

$$\kappa' : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)\mathfrak{T}_w\,\mathrm{U} \to \widehat{\mathbb{G}}_m$$

へ延長する.

以上の設定で, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上の $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ を次のように定義する.

定義 5.2 $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上の重さ κ, w-解析的な収束保型形式の層 $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ を

$$\begin{aligned}\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa} &:= (\pi_*\mathcal{O}_{\mathfrak{IW}_w^+})[\kappa'] \\ &:= \{\varphi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{IW}_w^+} \mid \varphi(x\cdot h) = \kappa'(h)\varphi(x), \forall x \in \mathfrak{IW}_w^+, \forall h \in \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)\mathfrak{T}_w\,\mathrm{U}\}\end{aligned}$$

で定義する.

注意 5.3 命題 6.3 の直前に書いてある議論を用いると, $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ が $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上の形式的 Banach 層となっていることが以下のようにしてわかる. まず, $(\kappa')^0 := \kappa'|_{\mathfrak{T}_w} : \mathfrak{T}_w \to \widehat{\mathbb{G}}_m$ とおく. $\pi_1 : \mathfrak{IW}_w^+ \to \mathfrak{IW}_w$ は $\mathfrak{T}_w$-torsor であるので, $((\pi_1)_*\mathcal{O}_{\mathfrak{IW}_w^+})[(\kappa')^0]$ は可逆 $\mathcal{O}_{\mathfrak{IW}_w}$-加群となる. また, $\pi_2 : \mathfrak{IW}_w \to \mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ は局所的には $p^w\mathfrak{B}(0,1)$ の有限個の積であったので, 特に π_2 は平坦なアフィン射で, $(\pi_2)_*(((\pi_1)_*\mathcal{O}_{\mathfrak{IW}_w^+})[(\kappa')^0])$ は $\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ 上平坦な (有限生成でない) 形式的 Banach 層となる. 最後に, これを有限射 $\pi_3 : \mathfrak{X}_1(p^n)(0) \to \mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ で順像をとり, 有限群作用 $\kappa'/(\kappa')^0 : \mathrm{T}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to \mathcal{O}_L^\times$ での固定部分を取ったものが $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ であるので, 命題 6.3 の直前に書いてある議論から $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ は $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上の形式的 Banach 層となる.

この注意と命題 6.3 から, 次を定義することができる.

定義 5.4 $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上の重さ κ, w-解析的な収束保型形式の Banach 層 $\omega_w^{\dagger\kappa}$ を形式的 Banach 層 $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ のリジッド生成ファイバーとして定義する.

$\kappa \in X_+(\mathrm{T})$ とする. 次の自然な射

$$\begin{aligned}\mathfrak{IW}_w^+ \to \mathcal{GR}^+ = \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}}(\mathcal{O}^g_{\mathfrak{X}_1(p^n)(0)}, \omega_G)/\,\mathrm{U} \\ \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)}}(\mathcal{O}^g_{\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)}, \omega_G)/\,\mathrm{U}\end{aligned}$$

およびこれのリジッド生成ファイバーにより, 層の射

$$\omega^\kappa|_{\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)} \to \mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}, \quad \omega^\kappa|_{\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)} \to \omega_w^{\dagger\kappa}$$

が誘導される. 今までの構成により, この射は, 代数的な誘導表現から岩堀型の解析的誘導表現への自然な射

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GL}_g}(\kappa')_{\mathrm{alg}/L} \hookrightarrow V_{\kappa,L}^{w-\mathrm{an}} : f \mapsto f|_{\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)}$$

を $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ および $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上に実現したものになっていることがわかる.

5.3.2 $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ の定義の概略 (標準的部分群の理論を用いた構成)

上に解説した $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上での $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ の構成から, G が通常ではない部分にまで $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ を自然に拡張するためには, G が通常のときに存在した短完全列

$$0 \to G[p^n]^0 \to G[p^n] \to G[p^n]^{\text{ét}} \to 0$$

および, Hodge-Tate 写像により得られる同型

$$(G[p^n]^0)^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/p^n$$

(の近似) を G が通常でない場合に拡張できればよい. このために必要なのが, すでに本文中でも何度か言及している標準的部分群の理論である. 次に述べる (最終的には) Fargues による標準的部分群の存在定理 (の一部の抜粋) は, p 可除群 G に対して, $\mathrm{Hdg}(G)$ が固定した $n \geqq 1$ に対して十分小さければ, 上のような $G[p^n]$ の分解と Hodge-Tate 写像による同型の近似がある, ということを主張している.

$a \in v(\mathcal{O}_L)$ に対して, $\mathcal{O}_{L,a} := \mathcal{O}_L/p^a$ とおき, 長さ有限 $\mathcal{O}_L$ 加群 $M = \oplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{L,a_i}$ に対して $\deg(M) := \sum_{i=1}^d a_i$ と定める.

定理 5.5 ([Far], または, [AIP1, Theorem 3.1.1, Proposition 3.2.1]) $n \geqq 1$ とする. G を $\mathcal{O}_L$ 上の g 次元 p 可除群とし, $v := \mathrm{Hdg}(G) < \frac{1}{2p^{n-1}}$ かつ $p \geqq 5$, または $\mathrm{Hdg}(G) < \frac{1}{3p^{n-1}}$ かつ $p = 3$ を満たすと仮定する. また, $v \in v(\mathcal{O}_L)$ が成り立つと仮定する. このとき, $G[p^n]$ の**レベル** n **標準的部分群**と呼ばれる以下の性質を満たす $\mathcal{O}_L$ 上平坦な閉部分群スキーム $H_n \subseteq G[p^n]$ が存在する.

(1) $G[p^n] \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1-v}$ の部分群スキームとして,

$$H_n \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1-v} = \mathrm{Ker}(F^n) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,1-v}.$$

(2) $H_n(\overline{L}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/p^n)^g$.

(3) $1 \leqq k \leqq n$ に対して, $H_n[p^k]$ は G のレベル k 標準的部分群になる.

(4) $(\ ,\ ) : G[p^n]^D \times G[p^n] \to \mu_{p^n}$ を自然なペアリングとし, H_n の零化空間 (annihilator) を $H_n^{\perp} := \{x \in G[p^n]^D | (x, y) = 1\,(\forall y \in H_n)\}$ と表す. このとき, $\mathrm{Hdg}(G^D) = \mathrm{Hdg}(G)$ で, $H_n^{\perp}$ は $G^D[p^n]$ のレベル n 標準的部分群となる.

(5) $H_n \hookrightarrow G[p^n]$ が誘導する射 $\omega_{G[p^n]} \to \omega_{H_n}$ は同型

$$\omega_{G[p^n]} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,n-v\frac{p^n-1}{p-1}} \xrightarrow{\sim} \omega_{H_n} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,n-v\frac{p^n-1}{p-1}}$$

を誘導する

(6) $\deg(\mathrm{coker}(\mathrm{HT}_{H_n} \otimes \mathrm{id} : H_n^D(\overline{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\overline{L}} \to \omega_{H_n} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\overline{L}})) = \frac{v}{p-1}$.

注意 5.6 本稿では解説できないが, H_n は有限群スキームの Harder-Narasimhan フィルトレイションの理論によって一意的に特徴付けられる ([Far]).

以下, 簡単のため $p \geqq 5$ と仮定する.

$n \geqq 1$ とし, $v \in v(\mathcal{O}_L) \cap [0, \frac{1}{2p^{n-1}})$ とする. このとき, 上の定理より, $\mathfrak{X}(v)(\mathcal{O}_L)$ の各点に対応する p 可除群はレベル n 標準的部分群を持つ. このときさらに, $\mathfrak{X}(v)$ 上の $G[p^n]$ の平坦閉部分群 H_n で各点に特殊化したらその点での標準的部分群となるものが存在する ([AIP1, Proposition 4.1.3]). この H_n は $\mathfrak{X}(0)$ 上の $G[p^n]^0$ の拡張になっているが, 以下の構成は (基本的には)$\mathfrak{X}(0)$ の場合に $G[p^n]^0$ を用いていた部分を H_n に変えることによってなされる.

まず, $\mathcal{X}_1(p^n)(v) = \mathrm{Isom}_{\mathcal{X}(v)}((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g, H_n^D)$ とし, $\mathfrak{X}_1(p^n)(v)$ を $\mathcal{X}_1(p^n)(v)$ の中での $\mathfrak{X}(v)$ の正規化として定め,

$$\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) := \mathcal{X}_1(p^n)(v)/\,\mathrm{I}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}), \quad \mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) := \mathfrak{X}_1(p^n)(v)/\,\mathrm{I}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

と定める.

次は, $\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ 上の $\mathfrak{IW}_w$ と $\mathfrak{IW}_w^+$ を $\mathfrak{X}_1(p^n)(v)$ 上に拡張したいのであるが, そのためには Hodge-Tate 写像から得られる同型

$$(G[p^n]^0)^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \omega_G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/p^n$$

を H_n^D に変えたものが必要となる. ここで問題なのは, 定理の性質 (6) からわかるように, 通常でない場合は Hodge-Tate 写像は同型を誘導しない (全射でない) ことである. [AIP1] ではこの困難を克服するために, Hodge-Tate 写像の像に現れる ω_G を $\mathcal{F}$ に変えれば同型になるような ω_G の部分 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v)}$ 加群 $\mathcal{F}$ を構成し, $\mathfrak{X}_1(p^n)(0)$ 上の場合に ω_G を用いていた部分を $\mathcal{F}$ に変えることで $\mathfrak{X}_1(p^n)(v)$ 上の $\mathfrak{IW}_w$ などを構成した. ここで重要なのは, 定理の性質 (6) によって Hodge-Tate 写像の像についてはある程度よく分かっているということである. より詳しく, $\mathcal{F}$ の構成は以下のように行う.

$w \in v(\mathcal{O}_L) \cap [0, n - v\frac{p^n}{p-1}]$ とする. まず, $\mathfrak{X}_1(p^n)(v)$ 上の H_n^D の基底 $x_1, \ldots, x_g$ を取り, $z_1, \ldots, z_g \in \omega_G$ を $\mathrm{HT}_{H_n}(x_1), \ldots, \mathrm{HT}_{H_n}(x_g) \in \omega_{H_n}$ の自然な全射 $\omega_G \to \omega_{G[p^n]} \to \omega_{H_n}$ による任意の持ち上げとする. このとき, $\mathcal{F}$ を $z_1, \ldots, z_g$ で生成され

る ω_G の部分 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v)}$ 加群とする. 定理の性質 (5)(6) を用いることで, $\mathcal{F}$ は持ち上げの取り方によらずに定まり, $p^{\frac{v}{p-1}}\omega_G \subseteq \mathcal{F}$ が成り立ち, さらに Hodge-Tate 写像により同型

$$\mathrm{HT}_{H_n} : H_n^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v),w} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v)}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v),w}$$

が得られることがわかる ([AIP1, Proposition 4.3.1]). ただし, ここで $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v),w} := \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v)}/p^w\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v)}$ とおいた.

この $\mathcal{F}$ と上の Hodge-Tate 写像から誘導される同型が得られれば, ω_G の代わりに $\mathcal{F}$ を用いる (例えば, ω_G のグラスマン多様体 $\mathcal{GR}$ を用いていた部分は $\mathcal{F}$ のグラスマン多様体に変える) ことで, 残りは $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(0)$ 上の場合のと全く同様に $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ および $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の層 $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}, \omega_w^{\dagger\kappa}$ の構成を行うことができる.

$\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(0)$ 上の場合と異なる点は, $\mathcal{GR}$ を $\mathcal{F}$ を用いて定義しているため, $\kappa \in X_+(\mathrm{T})$ の場合の自然な射 $\omega^\kappa|_{\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)} \to \mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ が存在しないことである. しかし, 包含関係 $p^{\frac{v}{p-1}}\omega_G \subseteq \mathcal{F} \subseteq \omega_G$ があり, p を可逆にすれば両者は等しくなるので, リジッド生成ファイバーを取った後は自然な射

$$\omega^\kappa|_{\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)} \to \omega_w^{\dagger\kappa}$$

が存在する ([AIP1, §5.3]).

5.3.3 Hecke 作用素のコンパクト性

最後に, p での Hecke 作用 $U_{p,g}$ のコンパクト性が標準的部分群のどのような性質から導かれるかを簡単に説明することで本章を終えたい.

注意 5.7 $\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) := Y_{\mathrm{Iw}}(p)_L^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ とおく. このとき, 自然な制限射 $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$ は単射であり, 像は “有界" な関数全体と一致することが知られている (“有界"の定義, および, この事実については [AIP1, Proposition5.5.2] 参照). これより, $U_{p,g}$ を $\mathrm{H}^0(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$ の有界性を保つ自己準同型として定義すればよい. よって, 以下は $\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上で考える. また, 上の事実から $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$ はトロイダルコンパクト化の取り方によらないこともわかることに注意する.

まず, L 上のスキーム S に対して, 組 $(A, \lambda, \psi_N, \mathrm{Fil}_\bullet \subseteq A[p], K \subseteq A[p])$ (ここで, $(A, \lambda, \psi_N, \mathrm{Fil}_\bullet \subseteq A[p]) \in Y_{\mathrm{Iw}}(p)_L$ で $K \subseteq A[p]$ は $K \oplus \mathrm{Fil}_g A[p] = A[p]$ かつ

$K^{\perp} = K$ となるもの) の同型類を対応させる関手を表現する L 上のスキームを C_g とおく. $p_1 : C_g \to Y_{\mathrm{Iw}}(p)_L$ を $(A, \lambda, \psi_N, \mathrm{Fil}_{\bullet}, K) \mapsto (A, \lambda, \psi_N, \mathrm{Fil}_{\bullet})$ で定まる射とし, $p_2 : C_g \to Y_{\mathrm{Iw}}(p)_L$ を $(A, \lambda, \psi_N, \mathrm{Fil}_{\bullet}, K) \mapsto (A/K, \lambda', \psi'_N, \mathrm{Fil}_{\bullet} + K/K)$ で定まる射 (ここで, λ', ψ'_N は λ, ψ_N から自然に定まるもの) とする. Hecke 作用素 $U_{p,g}$ は, 対応

$$\begin{tikzcd} & C_g \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Y_{\mathrm{Iw}}(p)_L & & Y_{\mathrm{Iw}}(p)_L \end{tikzcd}$$

のリジッド生成ファイバーを (左下の)$\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ に制限したものによって定義されるのであるが, ここで重要なのが次の命題である.

命題 5.8 ([Far, Proposition.17]) G を $\mathcal{O}_L$ 上の p 可除群とし, $\mathrm{Hdg}(G) < \frac{p-2}{2p-2}$ を満たすと仮定する. H_1 を G のレベル 1 標準的部分群とし, K を $G[p]$ の平坦閉部分群で $H_1 \oplus K = G[p]$ となるものとする. このとき $\mathrm{Hdg}(G/K) = \frac{1}{p}\mathrm{Hdg}(G)$ が成り立ち, $G[p]/K$ は G/K のレベル 1 標準的部分群となる.

この命題によって, 上の対応を $\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ に制限することで以下の図式を得る.

$$\begin{tikzcd} & C_g^{\mathrm{an}}|_{p_1^{-1}(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v))} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v) & & \mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(\frac{v}{p}). \end{tikzcd}$$

この対応から準同型

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(\frac{v}{p}), \omega_w^{\dagger\kappa}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$$

が定まり (詳細は [AIP1, Lemma 6.2.1.2]),

$$U_{p,g} : \mathrm{H}^0(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa})$$

は, この準同型と自然な制限写像

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(v), \omega_w^{\dagger\kappa}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{Y}_{\mathrm{Iw}}(p)(\frac{v}{p}), \omega_w^{\dagger\kappa})$$

との合成で定義される. 制限写像は ($v > 0$ のとき) コンパクトであり (§4.1.3), コンパクト写像との合成写像は再びコンパクトとなるので $U_{p,g}$ はコンパクトになる.

6 形式的 Banach 層と Banach 層

6.1 形式的 Banach 層

$\mathfrak{X}$ を $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ 上平坦かつ局所有限型な形式スキームとする. 正の整数 $n \geqq 1$ に対して, $\mathfrak{X}$ の法 ϖ^n 還元として得られる $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L/\varpi^n\mathcal{O}_L)$ 上のスキームを X_n と記す.

定義 6.1 $\mathfrak{X}$ 上の層の族 $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で以下の性質を満たすものを形式的 Banach 層 (formal Banach sheaf) と呼ぶ:

1. $\mathfrak{F}_n$ は $\mathcal{O}_L/\varpi^n$ 上平坦な準連接 $\mathcal{O}_{X_n}$-加群,
2. 全ての $n \geqq m$ に対して, $i^*\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_m$ を満たす ($i : X_m \hookrightarrow X_n$ は自然な閉埋め込みとする).

逆極限 $\varprojlim_n \mathfrak{F}_n$ として定義される $\mathfrak{X}$ 上の層を同じ記号で $\mathfrak{F}$ と記す. 形式的 Banach 層 $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が平坦であるとは, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathfrak{F}_n$ が平坦 $\mathcal{O}_{X_n}$ 加群となることとする. $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ を $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ 上平坦かつ局所有限型な形式スキームの間の射, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{X}$ 上の形式的 Banach 層とする. このとき, $\mathfrak{F}$ の f による引き戻しを $f^*\mathfrak{F} := (f^*\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で定義する. これは $\mathfrak{X}'$ 上の形式的 Banach 層となる.

6.2 Banach 層

定義 6.2 $\mathcal{X}$ は L 上のリジッド空間とする. $\mathcal{X}$ 上の $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 加群層 $\mathcal{F}$ が以下を満たすとき, $\mathcal{F}$ を Banach 層という:

1. $\mathcal{X}$ の各アフィノイド開部分集合 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ 加群 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ は Banach $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ 加群になる,
2. 制限射は連続,
3. $\mathcal{X}$ の許容的アフィノイド開被覆 $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ があり, 各 $i \in I$ 及び各アフィノイド $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_i$ に対して, 制限射により誘導される射
$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}_i)}\mathcal{F}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$$
は $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})$ 加群の同型になる.

上記 3 の条件を満たす許容的アフィノイド被覆 $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ で, 各 $i \in I$ に対して

$\mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ が射影的 Banach $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}_i)$ 加群となるものが取れるとき, $\mathcal{F}$ は射影的であるという.

A を L 上のアフィノイド代数とし, $\mathcal{X}$ は L 上の準コンパクトかつ準分離的なリジッド空間とする. $\mathcal{F}$ を $\mathcal{X} \times_L \mathrm{Spm}(A)$ 上の Banach 層であるとする. このとき, $\mathrm{H}^0(\mathcal{X} \times_L \mathrm{Spm}(A), \mathcal{F})$ は自然な Banach A 加群の構造を持つ.

6.3 形式的 Banach 層のリジッド生成ファイバー

$\mathfrak{X}$ を $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ 上の平坦かつ局所有限型な形式スキームとし, $\mathcal{X}$ を $\mathfrak{X}$ のリジッド生成ファイバーとする. $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{X}$ 上の形式的 Banach 層とする.

$\mathfrak{F}$ は平坦であると仮定する. この仮定のもとで, $\mathfrak{F}$ に付随する $\mathcal{X}$ 上の Banach 層 $\mathcal{F}$ を以下のようにして定義する. そのためには, $\mathcal{X}$ の各準コンパクト (quasi compact) 開集合 $\mathcal{U}$ に対して $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を定義すればよい. $\mathcal{U}$ を $\mathcal{X}$ の準コンパクト開集合とする. Raynaud の定理により準コンパクトかつ準分離的なリジッド解析的多様体は, 形式的スキームを許容的ブローアップにより局所化した圏を用いて記述できるので, ある許容的ブローアップ $h : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ で $\mathcal{U}$ が $\mathfrak{X}'$ の開集合 $\mathfrak{U}'$ の生成ファイバーとなるものを取ることができる. このとき $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) := (h^*\mathfrak{F})(\mathfrak{U}') \otimes_{\mathcal{O}_L} L$$

によって定義する. $\mathfrak{F}$ が平坦という仮定のもとで, $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ は (標準的な同型は除いて) $h : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ の取り方によらない ([AIP1, Lemma A.2.2.2]). こうして定義された $\mathcal{X}$ 上の Banach 層 $\mathcal{F}$ を $\mathfrak{F}$ のリジッド生成ファイバーと呼ぶ.

この構成を我々の設定に対して (つまり, 過収束保型層に対して) 適用するためには, 構成を次のような (一般には平坦ではない) 場合へ拡張する必要がある. $g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ を $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ 上平坦かつ局所有限型形式スキームの間の有限射とし, そのリジッド生成ファイバー (に誘導される射) を $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ と表す. $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{X}$ 上の平坦形式的 Banach 層とし, そのリジッド生成ファイバーを $\mathcal{F}$ とする. 有限群 G が $\mathfrak{X}$ に $\mathfrak{Y}$ 上の同型として作用し, かつ $\mathfrak{F}$ もこの作用と両立する G の作用を持つとする. ここで, g_* は完全関手なので $g_*\mathfrak{F} := (g_*\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathfrak{Y}$ 上の形式的 Banach 層であることに注意する.

以上の設定で, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathfrak{Y}$ 上の前層

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{Y} \mapsto (g_*\mathfrak{F}(\mathfrak{U}))^G \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L/\varpi^n$$

の層化を $(g_*\mathfrak{F}_n)^G$ と表し, $(g_*\mathfrak{F})^G := ((g_*\mathfrak{F}_n)^G)_{n\in\mathbb{N}}$ とおく. $(g_*\mathfrak{F})^G$ は $\mathfrak{Y}$ 上の (一般

には平坦ではない) 形式的 Banach 層になる.

命題 6.3 ([AIP1, Proposition A.2.2.4]) 層 $(f_*\mathcal{F})^G$ は $\mathcal{Y}$ 上の Banach 層になる. さらに, 各許容的ブローアップ $h:\mathfrak{Y}'\to\mathfrak{Y}$ と各開部分形式スキーム $\mathfrak{V}\subset\mathfrak{Y}'$ に対して ($\mathcal{V}\subset\mathcal{Y}$ をそのリジッド生成ファイバーとすると),

$$(f_*\mathcal{F})^G(\mathcal{V}) = h^*(g_*\mathfrak{F})^G(\mathfrak{U}) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$$

が成り立つ. ここで, $\mathcal{V}$ は $\mathfrak{V}$ のリジッド生成ファイバーとする.

平坦な場合と同様に, $(f_*\mathcal{F})^G$ を $(g_*\mathfrak{F})^G$ のリジッド生成ファイバーと呼ぶ.

注意 6.4 $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)$ を $X_{\mathrm{Iw}}(p)$ の p 進完備化として得られる $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ 上の形式スキームとする. $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ のモデルとして, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)\to\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)$ を自然に定義することができる. [AIP1] では, まず, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の形式的 Banach 層 $\mathfrak{w}_w^{\dagger\kappa}$ を定義し, これのリジッド生成ファイバーとして $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(p)(v)$ 上の Banach 層 $\omega_w^{\dagger\kappa}$ を定義している.

参考文献

[AIP1] F. Andreatta, A. Iovita, and V. Pilloni, p-adic families of Siegel modular cuspforms, Ann. of Math. (2) 181 (2015), no. 2, 623-697.

[AIP2] F. Andreatta, A. Iovita, and V. Pilloni, On overconvergent Hilbert modular cusp forms, Astérisque 382, 163-193.

[AIP3] F. Andreatta, A. Iovita, and V. Pilloni, p-adic variation of automorphic sheaves, Proceedings of the ICM–Rio de Janeiro 2018, Vol. 2, 249-276.

[AS] A. Ash, G. Stevens, p-Adic families of modular symbols for GL_g, preprint (2009).

[Em] M. Emerton, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke aigenforms, Invent. Math. 164 (2006), 1-84.

[Far] L. Fargues, La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles, avec la collaboration de Yichao Tian, Ann. Sci. École Norm. Sup. 44 (2011), 905-961.

[Ur] E. Urban, Eigenvarieties, Ann. of Math. (2) 174 (2011), 1685-1784