志村多様体を用いた Galois 表現の構成

三枝 洋一 *

1 はじめに

F を代数体とし，$\Gamma_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ をその絶対 Galois 群とする．また，素数 ℓ および体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する．GL_n に対する大域 Langlands 予想により，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の「代数的な」尖点的保型表現と，Γ_F の「代数的な」n 次元既約 ℓ 進表現の間には一対一対応があると期待されている（$F = \mathbb{Q}$ の場合には [三枝 2, §4.5] でも述べた）．この主張を正確に述べるために，いくつか用語を思い出しておく．

定義 1.1 (1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π および F の無限素点 v に対し，Π_v の無限小指標を

$$\begin{cases} (a_{v,1},\ldots,a_{v,n}) \in \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n & F_v \cong \mathbb{R} \\ (a_{v,1},\ldots,a_{v,n}; b_{v,1},\ldots,b_{v,n}) \in (\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n)^2 & F_v \cong \mathbb{C} \end{cases}$$

とおく（GL_n の保型表現に関する用語については，[三枝 1] の 1.4 節を参照．F_v は F の v における完備化を表す）．Π が ***L* 代数的**であるとは，任意の無限素点 v に対し

$$\begin{cases} (a_{v,1},\ldots,a_{v,n}) \in \mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n & F_v \cong \mathbb{R} \\ (a_{v,1},\ldots,a_{v,n}; b_{v,1},\ldots,b_{v,n}) \in (\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n)^2 & F_v \cong \mathbb{C} \end{cases}$$

が成り立つことをいう．また，Π が ***C* 代数的**であるとは，任意の無限素点 v に対し

$$\begin{cases} (a_{v,1},\ldots,a_{v,n}) \in (\mathbb{Z}^n+\rho)/\mathfrak{S}_n & F_v \cong \mathbb{R} \\ (a_{v,1},\ldots,a_{v,n}; b_{v,1},\ldots,b_{v,n}) \in ((\mathbb{Z}^n+\rho)/\mathfrak{S}_n)^2 & F_v \cong \mathbb{C} \end{cases}$$

* 東京大学大学院数理科学研究科　e-mail: mieda@ms.u-tokyo.ac.jp

が成り立つことをいう[*1]．ただし，$\rho = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots, \frac{1-n}{2})$ である．

Π が**正則**であるとは，任意の無限素点 v に対し

$$\begin{cases} a_{v,1}, \dots, a_{v,n} \text{ が相異なる} & F_v \cong \mathbb{R} \\ a_{v,1}, \dots, a_{v,n} \text{ および } b_{v,1}, \dots, b_{v,n} \text{ がそれぞれ相異なる} & F_v \cong \mathbb{C} \end{cases}$$

が成り立つことをいう．

(2) $\rho\colon \Gamma_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を Γ_F の n 次元 ℓ 進表現とする．ρ が**代数的**であるとは，以下の 2 条件を満たすことをいう：
   - ρ は F のほとんど全ての有限素点において不分岐である．
   - ℓ を割り切る F の任意の素点 v に対し，$\rho_v = \rho|_{\Gamma_{F_v}}$ は de Rham である．ここで Γ_{F_v} は F_v の絶対 Galois 群を表す．

(3) Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の等圧的保型表現（[Clo90, Definition 1.2], [三枝 1, 定義 1.45] 参照）とし，ρ を Γ_F の n 次元半単純 ℓ 進表現とする．Π と ρ が**対応する**とは，F のほとんど全ての有限素点 v に対し，以下が成り立つことをいう：

   Π_v および ρ_v は不分岐であり，Π_v の佐武パラメータは $\rho(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値と多重集合として一致する．

   Π に対応する ρ，および ρ に対応する Π は存在すれば一意である（前者は Chebotarev 密度定理の，後者は [JS81] の帰結である）．

以下が GL_n の大域 Langlands 予想（の一つの定式化）の正確な主張である：

予想 1.2（GL_n の大域 Langlands 予想） 定義 1.1 (3) の対応によって，以下の 2 つは一対一に対応する：

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の L 代数的な尖点的保型表現．
- Γ_F の n 次元既約代数的 ℓ 進表現．

予想 1.2 の研究は，通常，以下のような順序で行われる：

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の L 代数的な尖点的保型表現 Π に対し，それに対応する n 次元半単純 ℓ 進表現 R_Π を構成する（**Galois 表現の構成問題**）．
2. 1 で構成した ℓ 進表現 R_Π の性質（既約性，代数性，局所成分の記述（**局所大域整合性**）など）を調べる．

[*1] C 代数的という用語は 4 節でのみ用いられる．[Clo90] における「代数的」はこちらの方を指す．

3. Γ_F の n 次元既約代数的 ℓ 進表現 ρ に対し，$\rho \cong R_\Pi$ となる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の L 代数的な尖点的保型表現 Π が存在することを示す（**Galois 表現の保型性問題**）.

本稿の目標は，Galois 表現の構成問題に関する以下の定理の証明を解説することである.

定理 1.3 ([HT01], [Shi11], [CH13], [HLTT16], [Sch15]) F を総実体または CM 体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の正則 L 代数的な尖点的保型表現とする．このとき，Π に対応する n 次元半単純 ℓ 進表現 R_Π が存在する.

$n=2$ かつ $F=\mathbb{Q}$ の場合の定理 1.3 は，重さ 2 以上の楕円モジュラー形式に伴う 2 次元 Galois 表現の存在についてのよく知られた定理（Eichler，志村，Deligne）に他ならない．その場合には，モジュラー曲線（$=\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ の志村多様体）のエタールコホモロジーを用いて Galois 表現が構成されるのであった．一方，F が CM 体の場合，あるいは $n\geq 3$ の場合には，$\mathrm{GL}_{n,F}$ の志村多様体は存在しないため，同様の証明は通用せず，より高度な技術が必要となる.

定理 1.3 の証明は，Π が偏極可能かどうかで大きく異なる．まず，保型表現の偏極可能性の定義をしておこう.

定義 1.4 F を総実体または CM 体とする．c を F の複素共役とし，$F^+=F^{c=1}$ とおく（F が総実体ならば $c=\mathrm{id}$, $F^+=F$ である）．Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現とする.

(1) Π が**偏極可能**であるとは，以下の条件を満たす Hecke 指標 $\chi\colon \mathbb{A}_{F^+}^\times/(F^+)^\times \to \mathbb{C}^\times$ が存在することをいう：
- $\Pi^c \cong \Pi^\vee \otimes (\chi\circ \mathrm{Nr}_{F/F^+}\circ \det)$.
- F^+ の無限素点 v に対する $\chi_v(-1)$ の値は v によらない.

(2) (1) において特に $\chi=1$ ととれるとき，すなわち $\Pi^c\cong\Pi^\vee$ となるとき，Π は**共役自己双対的 (CSD**[*2]**)** であるという.

注意 1.5 F が CM 体である場合，偏極可能な L 代数的保型表現 Π に対し，代数的な Hecke 指標 $\psi\colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times\to\mathbb{C}^\times$ であって $\Pi\otimes(\psi\circ\det)$ が CSD となるようなものをとることができる（[CHT08, Lemma 4.1.4] を参照）.

[*2] conjugate self-dual の略.

定理 1.3 の証明の方針は以下の通りである：

(A) Π が偏極可能な場合，F が CM 体であり，Π が CSD であるときが本質的である．この場合には，ユニタリ群の Arthur 分類を用いて，Π をユニタリ群の保型表現と関連付けることができる．このこととコンパクトなユニタリ型志村多様体のエタールコホモロジーを用いて R_Π を構成する．

(B) Π が偏極可能とは限らない場合，保型形式の合同の技術を用いて偏極可能な場合に帰着する．保型形式間のよい合同関係の存在を示す際に，非コンパクトなユニタリ型志村多様体のコンパクト化の境界が GL_n の局所対称空間と結び付くことを用いる．

(A) と (B) ではともに志村多様体を用いるが，その使われ方は全く異なることに注目していただきたい．なお，Π が偏極可能でない場合にも，志村多様体のエタールコホモロジーを用いて R_Π を構成できないだろうかという自然な疑問が湧くかもしれないが，そのようなことは期待できないということが分かっている（[JT20] を参照）．

本稿ではまず，2 節においてユニタリ群の Arthur 分類を概説し，3 節において (A) の部分を紹介する．(B) の部分は 4 節で解説される．

■記号 基本的に [三枝 2] と同様の記号を用いる．

- 環 A 上の対象 X および A 代数 B に対し，X の B への底変換を X_B と表す．
- 体 F に対し，その分離閉包を $\overline{F}$ で表し，絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を Γ_F で表す．
- $\mathbb{Q}$ のアデール環 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ を単に $\mathbb{A}$ で表す．また，$\mathbb{A}_f = \prod'_{v\neq\infty}\mathbb{Q}_v$ で有限アデール環を表す．
- 整数 $n \geq 1$ に対し，n 次単位行列を I_n で表す．また，n 次正方行列 Φ_n を $\Phi_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ (-1)^{n-1} & & & \end{pmatrix}$ で定める．

2 ユニタリ群の Arthur 分類

本節では，[Mok15] および [KMSW] によるユニタリ群の Arthur 分類を，本稿で用いる状況に限って概説する．Arthur 分類の基本については，[三枝 2, §5] を先にご

覧いただきたい．

E を虚二次体，F^+ を総実体とし，$F = EF^+$ とおく．F の複素共役を c で表す．F^+ および F に対する Langlands 群 L_{F^+}, L_F の存在（[三枝 2, 予想 4.28] 参照）を仮定する（これは説明の都合上のものであり，実際は Langlands 群の存在を使わずに全ての主張を定式化・証明することが可能である）．整数 $r \geq 1$ に対し $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_{F^+})$ の尖点的保型表現 π に対応する L_{F^+} の r 次元既約表現を ϕ_π とおく．$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現に対しても同様の記号を用いる．

$m \geq 1$ を整数とし，$\langle\ ,\ \rangle\colon F^m \times F^m \to \mathbb{Q}$ を $\langle x, y\rangle = -\langle y, x\rangle$, $\langle ax, y\rangle = \langle x, c(a)y\rangle$ $(x, y \in F^m, a \in F)$ を満たす非退化ペアリングとする．F^+ 上の代数群 U を以下で定める：F^+ 代数 R に対し

$$\mathrm{U}(R) = \{g \in \mathrm{GL}_m(F \otimes_{F^+} R) \mid \langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle\}.$$

ここでは，U が以下の仮定を満たす状況を考える．

仮定 2.1

- m は 3 以上の奇数である．
- F^+ の任意の有限素点 v に対し，$\mathrm{U} \otimes_{F^+} F_v^+$ は準分裂的である（v が F/F^+ で分解するならば $\mathrm{U} \otimes_{F^+} F_v^+ \cong \mathrm{GL}_m$ であるから，これは v が F/F^+ において非分解である場合の制約である）．
- F^+ のある無限素点 v_0 において $((F \otimes_{F^+} F_{v_0}^+)^m, \langle\ ,\ \rangle_{v_0})$ をエルミート形式と見たときの符号は $(1, m-1)$ であり，それ以外の無限素点 $v \neq v_0$ において $((F \otimes_{F^+} F_v^+)^m, \langle\ ,\ \rangle_v)$ をエルミート形式と見たときの符号は $(0, m)$ である．

$\mathrm{U}(\mathbb{A}_{F^+})$ の離散的保型表現の同型類のなす集合を $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ と書く．

$\mathrm{U} \otimes_{F^+} F \cong \mathrm{GL}_m$ であるから，U の双対群 $\widehat{\mathrm{U}}$ は GL_m の双対群，すなわち $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ と一致する．また，Galois 群 Γ_{F^+} の $\widehat{\mathrm{U}}$ への作用は $\mathrm{Gal}(F/F^+) = \{1, c\}$ を経由する．c の $\widehat{\mathrm{U}}$ への作用は $g \mapsto \Phi_m {}^t g^{-1} \Phi_m^{-1}$ で与えられる（Φ_m による共役をとっているのは，$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の標準的な splitting を保つようにするためである）．[三枝 2, 定義 7.1] で定めたように，U の大域 A パラメータとは，連続準同型

$$\psi\colon L_{F^+} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L\mathrm{U} = \widehat{\mathrm{U}} \rtimes \Gamma_{F^+}$$

であって以下の性質を満たすもののことであった：

- ψ は自然な射影 $L_{F^+} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \Gamma_{F^+}$, $\widehat{\mathrm{U}} \rtimes \Gamma_{F^+} \to \Gamma_{F^+}$ を保つ．

- $\psi|_{L_{F^+}}$ の像は半単純元からなる．ただし，$(g,\sigma)\in\widehat{\mathrm{U}}\rtimes\Gamma_{F^+}$ が半単純であるとは，$g\sigma(g)\in\widehat{\mathrm{U}}=\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ が半単純であることをいう．
- $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は代数的な準同型である．

U の大域 A パラメータの $\widehat{\mathrm{U}}$ 共役類全体を $\Psi(\mathrm{U})$ と書く．$\psi\in\Psi(\mathrm{U})$ が離散的であるとは，中心化群 $S_\psi=\mathrm{Cent}_{\widehat{\mathrm{U}}}(\mathrm{Im}\,\psi)$ の単位元を含む連結成分 S_ψ^0 が $\widehat{\mathrm{U}}$ の中心 $Z(\widehat{\mathrm{U}})=\mathbb{C}^\times$ に含まれることをいうのであった．離散的な大域 A パラメータのなす $\Psi(\mathrm{U})$ の部分集合を $\Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ と書く．

F^+ の素点 v に対し，

$$L_{F_v^+}=\begin{cases}W_{F_v^+}\times\mathrm{SU}(2) & v\nmid\infty\\ W_{F_v^+} & v\mid\infty\end{cases}$$

とおく．U の v における局所 A パラメータ $L_{F_v^+}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to\widehat{\mathrm{U}}\rtimes W_{F_v^+}$ も大域 A パラメータと同様に定義される（[三枝 2, 定義 7.1] 参照）．その $\widehat{\mathrm{U}}$ 共役類全体を $\Psi_v(\mathrm{U})$ と書く．$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ $(r\le m)$ の尖点的保型表現に対する Ramanujan 予想を仮定すると*3，$\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ に対し，その局所化 $\psi_v\in\Psi_v(\mathrm{U})$ を定めることができる（後述の命題 2.9 を使う）．

それでは，U に対する Arthur 分類を述べよう．

定義 2.2 $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ とする．$\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ であって以下の条件を満たすもの全体を $\mathcal{A}_\psi(\mathrm{U})$ と書く：

F^+ の素点の有限集合 S で以下を満たすものが存在する：
- S は F^+ の無限素点を全て含む．
- F^+ の素点 v が S に属さないならば，v は F/F^+ において不分岐であり，π_v は $\mathrm{U}(F_v^+)$ の不分岐表現である．さらに，π_v の佐武パラメータを $\phi_{\pi_v}^{\mathrm{ur}}\colon W_{F_v^+}/I_{F_v^+}\to\widehat{\mathrm{U}}\rtimes(W_{F_v^+}/I_{F_v^+})$ とすると，合成
$$L_{F_v^+}\xrightarrow{\mathrm{pr}_1}W_{F_v^+}\to W_{F_v^+}/I_{F_v^+}\xrightarrow{\phi_{\pi_v}^{\mathrm{ur}}}\widehat{\mathrm{U}}\rtimes(W_{F_v^+}/I_{F_v^+})$$
は合成
$$L_{F_v^+}\xrightarrow{\alpha}L_{F_v^+}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\xrightarrow{\psi_v}\widehat{\mathrm{U}}\rtimes W_{F_v^+}$$

*3 $\Psi_v(\mathrm{U})$ の定義の条件を少し緩めることでこの仮定を外す方法もあるが，ここでは述べない．

と $\widehat{\mathrm{U}}$ 共役である．ここで, α は $u\mapsto\left(u,\begin{pmatrix}|u|^{1/2} & 0\\ 0 & |u|^{-1/2}\end{pmatrix}\right)$ によって定まる準同型である．ただし，$|u|$ は合成 $L_{F_v^+}\to W_{F_v^+}^{\mathrm{ab}}\xrightarrow{\mathrm{Art}_{F_v^+}^{-1}}(F_v^+)^\times\xrightarrow{|-|_{F_v^+}}\mathbb{R}_{>0}$ による $u\in L_{F_v^+}$ の像を表す．

定理 2.3（近同値類への分割） $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})=\coprod_{\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})}\mathcal{A}_\psi(\mathrm{U})$ が成り立つ．

定理 2.4（局所 Arthur 分類） v を F^+ の素点とする．$\mathrm{U}(F_v^+)$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合を $\Pi_{\mathrm{unit}}(\mathrm{U}(F_v^+))$ と書く．

(1) $\psi\in\Psi_v(\mathrm{U})$ に対し，$\Pi_{\mathrm{unit}}(\mathrm{U}(F_v^+))$ 上の有限集合 Π_ψ（すなわち，有限集合 Π_ψ と写像 $\Pi_\psi\to\Pi_{\mathrm{unit}}(\mathrm{U}(F_v^+))$ の組），および写像 $\Pi_\psi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\psi;\ \pi\mapsto\langle -,\pi\rangle$ を定義することができる．ここで，$\mathfrak{S}_\psi=\pi_0(\mathrm{Cent}_{\widehat{\mathrm{U}}}(\mathrm{Im}\,\psi)/Z(\widehat{\mathrm{U}})^{\Gamma_{F_v^+}})$ であり（$\pi_0(-)$ は連結成分のなす群を表す），$\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ は $\mathfrak{S}_\psi$ 上の指標の集合を表す．
Π_ψ を ψ に対応する**（局所）*A* パケット**と呼ぶ．Π_ψ および $\Pi_\psi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ はエンドスコピー指標関係式による特徴付けを持つ．

(2) v が F/F^+ で不分岐な有限素点であり，$\psi\in\Psi_v(\mathrm{U})$ が $\psi|_{I_{F_v^+}\times\mathrm{SU}(2)\times\{1\}}=1$ を満たすとする．このとき，Π_ψ は唯一の不分岐表現 π^{ur} を含み，$\langle -,\pi^{\mathrm{ur}}\rangle=1$ である．π^{ur} の佐武パラメータは $L_{F_v^+}\xrightarrow{\alpha}L_{F_v^+}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\xrightarrow{\psi}\widehat{\mathrm{U}}\rtimes W_{F_v^+}$ で与えられる．

(3) F^+ の有限素点 v が F において $v=ww^c$ と分解するとき，任意の $\psi\in\Psi_v(\mathrm{U})$ に対し $\#\Pi_\psi=1$, $\mathfrak{S}_\psi=1$ である．さらに，同型 $\mathrm{U}(F_v^+)\cong\mathrm{GL}_m(F_w)$ によって Π_ψ の唯一の元を $\mathrm{GL}_m(F_w)$ の既約許容表現とみなしたときの L パラメータは以下で与えられる：

$$L_{F_w}=L_{F_v^+}\xrightarrow{\alpha}L_{F_v^+}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\xrightarrow{\psi}\widehat{\mathrm{U}}\rtimes W_{F_v^+}=\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})\times W_{F_w}\xrightarrow{\mathrm{pr}_1}\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}).$$

定義 2.5 $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ に対し，大域 A パケット Π_ψ を

$$\Pi_\psi=\left\{\bigotimes_v\pi_v\ \middle|\ \pi_v\in\Pi_{\psi_v},\ \text{ほとんど全ての } v\nmid\infty \text{ に対し } \pi_v \text{ は不分岐}\right\}$$

と定める．$\mathfrak{S}_\psi=\pi_0(S_\psi/Z(\widehat{\mathrm{U}})^{\Gamma_{F^+}})$ とおくと，F^+ の各素点 v に対し，自然な準同型 $\mathfrak{S}_\psi\to\mathfrak{S}_{\psi_v}$ が定まる．これを $s\mapsto s_v$ と書く．$\pi\in\Pi_\psi$ および $s\in\mathfrak{S}_\psi$ に対して $\langle s,\pi\rangle=\prod_v\langle s_v,\pi_v\rangle$ とすることで，写像 $\Pi_\psi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\psi;\ \pi\mapsto\langle -,\pi\rangle$ が定まる．

定理 2.6（大域 Arthur 分類） ある指標 $\varepsilon_\psi \in \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ が存在して，以下を満たす：

$$\mathcal{A}_\psi(\mathrm{U}) = \{\pi \in \Pi_\psi \mid \langle -, \pi\rangle = \varepsilon_\psi\}.$$

$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ のときは $\varepsilon_\psi = 1$ である．

さらに，任意の $\pi \in \mathcal{A}_\psi(\mathrm{U})$ に対し，$m(\pi) = 1$ である．

注意 2.7 一般に，局所 Arthur 分類を正規化するためには，以下のデータを固定する必要がある：

- 準分裂内部形式の Whittaker データ．
- 純内部形式，拡大純内部形式，リジッド内部形式などの付加構造．

より詳しい説明については，[三枝 3, §2.6] を参照．本節で考えている，F 上のエルミート形式に付随するユニタリ群 U の場合には，付加構造として純内部形式を用いることができる．F^+ の素点 v に対し，$\mathrm{U}\otimes_{F^+}F_v^+$ に純内部形式の構造を与えることは，以下を満たすような $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元 a_v を与えることと同値である：

- v が F/F^+ で分解するときは $a_v = 0$．
- v が F/F^+ で非分解な有限素点であり，m が偶数のときは，

$$a_v = \begin{cases} 0 & (\mathrm{U}\otimes_{F^+}F_v^+ \text{ が準分裂であるとき}) \\ 1 & (\mathrm{U}\otimes_{F^+}F_v^+ \text{ が準分裂でないとき}) \end{cases}$$

  （m が奇数のときは条件なし）．
- v が無限素点のときは，$\mathrm{U}\otimes_{F^+}F_v^+ \cong \mathrm{U}(p_v, q_v)$ と書くと，m が偶数のときは $a_v = \dfrac{m}{2} + q_v \pmod 2$（$m$ が奇数のときは条件なし）．

さらに，各素点における純内部形式を集めたもの $(a_v)_v$ が大域的な純内部形式を定めるための条件は $\sum_v a_v = 0$ である．$\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ の記述を行うためには，この条件も課す必要がある．詳細は [KMSW, §0.3.3] を参照．

ここでは仮定 2.1 を課しているため，全ての素点 v に対し $a_v = 0$ ととることができる．定理 2.4 の主張は，$a_v = 0$ ととったときのものである．$a_v \neq 0$ の場合には，定理 2.4 における $\mathfrak{S}_\psi$ の定義を変更する必要が生じる．[KMSW, §1.6.1] を参照．

また，m が奇数の場合には，U の準分裂内部形式の Whittaker データも一意的となり，そのとり方を気にする必要がない．

$\mathrm{U}(\mathbb{A}_{F^+})$ の保型表現と $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ の保型表現を繋げるために，大域 A パラメータ $\psi \in \Psi(\mathrm{U})$ についてもう少し詳しく見ておこう．ψ を $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ に制限することで，Γ_F への射影を保つ準同型

$$\psi|_{L_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \times \Gamma_F$$

が得られる．第一射影と合成することで，これは $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の m 次元半単純表現

$$\mathrm{pr}_1 \circ \psi|_{L_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$$

と同一視できる．では，逆に $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の m 次元半単純表現が与えられたとき，それがいつ U の大域 A パラメータから来るのであろうか？その答えは以下で与えられる：

定義 2.8 $L_{F^+} \to L_{F^+}/L_F \cong \mathrm{Gal}(F/F^+) = \{1, c\}$ によって c にうつる L_{F^+} の元を固定し，それも c と書く．$\rho\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ を半単純表現とし，$\rho^c = \rho \circ \mathrm{Ad}(c)$ とおく（$\mathrm{Ad}(c)$ は $c \in L_{F^+}$ による共役を表す）．

(1) $\rho^c \cong \rho^\vee$ であるとき，ρ は**共役自己双対的 (CSD)** であるという．

(2) $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 不変な非退化双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle\colon \rho \times \rho^c \to \mathbb{C}$ であって

$$\langle y, \rho(c^2)x\rangle = \langle x, y\rangle$$

を満たすものが存在するとき，ρ は**共役直交的**であるという．共役直交的ならば CSD である．

これらの条件は c の L_{F^+} への持ち上げのとり方によらない．

命題 2.9（[GGP12, Theorem 8.1]） $\psi \mapsto \mathrm{pr}_1 \circ \psi|_{L_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は，$\Psi(\mathrm{U})$ から $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の共役直交的な m 次元半単純表現の同型類の集合への全単射を与える．

注意 2.10 (1) 命題 2.9 においては，m が奇数であるという仮定を使っている．m が偶数の場合には，「共役直交的」が「共役シンプレクティック」に置き換わる．

(2) v を F^+ の素点とし，w を v の上にある F の素点とする．F/F^+ において v が非分解であるとき，定義 2.8 と同様にして $\psi \in \Psi_v(\mathrm{U})$ が CSD であること，共役直交的であることが定義され，命題 2.9 と同様のことが成り立つ．

共役直交的な A パラメータの重要な例として，以下のものがある．

命題 2.11（[Mok15, Example 2.5.8]） $\Pi_1,\dots,\Pi_r$ を $\mathrm{GL}_{m_1}(\mathbb{A}_F),\dots,\mathrm{GL}_{m_r}(\mathbb{A}_F)$ $(m_1+\cdots+m_r=m)$ の尖点的保型表現とし，$\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ の等圧的保型表現 $\Pi=\Pi_1\boxplus\cdots\boxplus\Pi_r$ は CSD かつ正則 L 代数的であると仮定する (Langlands 和 $\boxplus$ については [Clo90, §1.1] および [三枝 1, 定義 1.45] を参照)．L_F の表現 $\phi_\Pi=\phi_{\Pi_1}\oplus\cdots\oplus\phi_{\Pi_r}$ を $L_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現とみなしたもの $\phi_\Pi\boxtimes\mathbf{1}$ をまた ϕ_Π と書く．このとき，ϕ_Π は $L_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の共役直交的な半単純表現である．

証明 $L_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 不変な非退化双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle\colon\phi_\Pi\times\phi_\Pi^c\to\mathbb{C}$ がスカラー倍を除き一意的であり，$\langle y,\phi_\Pi(c^2)x\rangle=\langle x,y\rangle$ を満たすことを示せばよい．このためには，F の無限素点 w を固定して，$\phi_\Pi|_{W_{F_w}}$ に対して同じことを示せばよい．Π は CSD かつ正則 L 代数的であるから，$\phi_\Pi|_{W_{F_w}}\colon W_{F_w}=\mathbb{C}^\times\to\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ は以下のような形をしている：

$$z\mapsto\mathrm{diag}((z/\overline{z})^{a_1},\dots,(z/\overline{z})^{a_m})\quad(a_1,\dots,a_m\in\mathbb{Z},\ a_1>\cdots>a_m).$$

この形から，W_{F_w} 不変な非退化双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle\colon\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$ は

$$\langle(x_i),(y_i)\rangle=x_1y_1+\cdots+x_my_m$$

のスカラー倍であることがすぐに分かる．v を w の下にある F^+ の素点とし，$c\in W_{F_v^+}\setminus W_{F_w}=W_\mathbb{R}\setminus W_\mathbb{C}$ として j をとる．$x\in\mathbb{C}^m$ に対し $\phi_\Pi|_{W_{F_w}}(j^2)(x)=x$ であることに注意すると，$\langle\ ,\ \rangle$ が共役直交的であることが分かる． □

以下ではしばらく，Π を命題 2.11 の通りとする．ϕ_Π が定める $\Psi(\mathrm{U})$ の元をまた ϕ_Π と書く．ϕ_Π が離散的であることは，$\Pi_1,\dots,\Pi_r$ が相異なり，かつ各 Π_i が CSD であることと同値である．

■近同値類 $\mathcal{A}_{\phi_\Pi}(\mathrm{U})$ の記述 近同値類 $\mathcal{A}_{\phi_\Pi}(\mathrm{U})$ を具体的に記述しておこう．$\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ とする．π が近同値類 $\mathcal{A}_{\phi_\Pi}(\mathrm{U})$ に属することは，F^+ の素点の有限集合 S であって以下の条件を満たすものが存在することと同値である：

- S は F^+ の無限素点を全て含む．
- F^+ の素点 v が S に属さないならば，v は F/F^+ において不分岐であり，π_v は $\mathrm{U}(F_v^+)$ の不分岐表現である．さらに，w を v の上にある F の素点とするとき，π_v は Π_w と以下のような関係にある．

π_v の佐武パラメータを $\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi_v}\colon W_{F_v^+}/I_{F_v^+} \to \widehat{\mathrm{U}} \rtimes (W_{F_v^+}/I_{F_v^+})$ とおくと，$\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi_v}|_{W_{F_w}/I_{F_w}}$ は Π_w の佐武パラメータに一致する．特に，v が F/F^+ において分解するならば，同型 $\mathrm{U}(F_v^+) \cong \mathrm{GL}_m(F_w)$ のもとで $\pi_v \cong \Pi_w$ である．

注意 2.12　この状況を，Π が π の **（弱）底変換**であるということがある．より一般に，$\mathrm{U}(\mathbb{A}_{F^+})$ の離散的とは限らない保型表現 π および $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ の等圧的保型表現 Π に対し上の条件を満たす S が存在するならば，Π は π の底変換であるといい，$\Pi = \mathrm{BC}(\pi)$ と書くことにする．この用語は，4 節で用いられる．

■無限素点における局所 A パケットの記述　v を F^+ の無限素点とし，w をその上にある F の素点とする．

命題 2.13　$\phi_{\Pi,v}$ は離散的な L パラメータである．

証明　Π_w がコホモロジー的であることとエンドスコピー指標関係式から，$\Pi_{\phi_{\Pi,v}}$ はコホモロジー的な表現を含むことが分かる（[Lab11, Lemme 4.4] 参照）．$\mathrm{U}(F_v^+)$ は離散系列表現を持つから，緩増加かつコホモロジー的な表現は離散系列表現である（[NP, §3] の冒頭を参照）．よって L パケット $\Pi_{\phi_{\Pi,v}}$ は離散系列表現を含むので，$\phi_{\Pi,v}$ は離散的な L パラメータである．□

この命題より，$\phi_{\Pi,v}$ は完全に決まってしまう．

命題 2.14　(1) Π_w の無限小指標を

$$(a_{w,1},\ldots,a_{w,m};-a_{w,m},\ldots,-a_{w,1})\ (a_{w,1},\ldots,a_{w,m}\in\mathbb{Z}, a_{w,1}>\cdots>a_{w,m})$$

とすると，$\phi_{\Pi,v}\colon W_{F_v^+} = W_{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathrm{U}} \rtimes W_{\mathbb{R}}$ は以下で与えられる：
- $z \in \mathbb{C}^\times \subset W_{\mathbb{R}}$ に対し，$\phi_{\Pi,v}(z) = (\mathrm{diag}((z/\overline{z})^{a_{w,1}},\ldots,(z/\overline{z})^{a_{w,m}}), z)$.
- $j \in W_{\mathbb{R}}$ に対し，$\phi_{\Pi,v}(j) = (\Phi_m, j)$.

(2) $\mathrm{Cent}_{\widehat{\mathrm{U}}}(\mathrm{Im}\,\phi_{\Pi,v}) = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m) \mid \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$, $\mathfrak{S}_{\phi_{\Pi,v}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{m-1}$ である．

(3) $\mathrm{U}(F_v^+) \cong \mathrm{U}(p_v,q_v)$ $(p_v+q_v=m)$ と表すと，L パケット $\Pi_{\phi_{\Pi,v}}$ の元は $\mathfrak{S}_m/(\mathfrak{S}_{p_v}\times\mathfrak{S}_{q_v})$ でパラメータ付けられる（$\mathfrak{S}_m$, $\mathfrak{S}_{p_v}$, $\mathfrak{S}_{q_v}$ は対称群を表す）．特に $v = v_0$（仮定 2.1 参照）ならば $\#\Pi_{\phi_{\Pi,v}} = m$ であり，$v \neq v_0$ ならば $\#\Pi_{\phi_{\Pi,v}} = 1$ である．

証明 (1) は [BC05, Proposition 4.3.2] を参照．(2) は (1) からすぐに分かる．(3) は [Clo11, §3] を参照． □

以下では，状況をさらに簡単にするために，次の仮定をおく：

仮定 2.15 F/F^+ は任意の有限素点において不分岐である．

これは非常に強い仮定であるが，Galois 表現を構成する際にはこの場合に帰着することができる．

■Π が尖点的である場合 n が奇数（かつ Π が偏極可能）の場合の定理 1.3 の証明には，Arthur 分類を以下の状況で用いる．

定義 2.16 Π を $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ の CSD かつ正則 L 代数的な尖点的保型表現とし，以下の条件を仮定する：

> F^+ の有限素点 v が F/F^+ において非分解ならば，v の上にある F の素点 w に対し Π_w は不分岐表現である（このとき $\phi_{\Pi,v}$ は不分岐な L パラメータとなる）．

F^+ の各有限素点 v に対し，$\mathrm{U}(F_v^+)$ の既約許容表現 π_v を以下のように定める：

- v が F/F^+ において非分解ならば，π_v は $\Pi_{\phi_{\Pi,v}}$ に属する唯一の不分岐表現．
- v が F/F^+ において $v = ww^c$ と分解するならば，$\pi_v = \Pi_w$．

さらに，$\pi_f = \bigotimes'_{v\nmid\infty} \pi_v$ とおく．

定理 2.17 $\pi'_\infty = \bigotimes_{v\mid\infty} \pi'_v$ を $\prod_{v\mid\infty} \mathrm{U}(F_v^+)$ の既約許容表現とするとき，$\pi_f \otimes \pi'_\infty$ が $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ に属することは，F^+ の任意の無限素点 v に対し $\pi'_v \in \Pi_{\phi_{\Pi,v}}$ が成り立つことと同値である．さらにこのとき $m(\pi_f \otimes \pi'_\infty) = 1$ が成り立つ．

証明 定理 2.6 および $\mathfrak{S}_{\phi_\Pi} = 1$ より明らかである． □

■$\Pi = \Pi_1 \boxplus \Pi_2$ の場合 n が偶数（かつ Π が偏極可能）の場合の定理 1.3 の証明には，Arthur 分類を以下の状況で用いる．

定義 2.18 Π_1 を $\mathrm{GL}_{m-1}(\mathbb{A}_F)$ の CSD かつ正則 L 代数的な尖点的保型表現とし，以下の条件を仮定する：

F^+ の有限素点 v が F/F^+ において非分解ならば，v の上にある F の素点 w に対し $\Pi_{1,w}$ は不分岐表現である．

また，$\Pi_2\colon \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ を CSD な代数的 Hecke 指標であって以下の条件を満たすものとする：

- F^+ の有限素点 v が F/F^+ において非分解ならば，v の上にある F の素点 w に対し $\Pi_{2,w}$ は不分岐である．
- $\Pi = \Pi_1 \boxplus \Pi_2$ は正則である．

$\pi_f = \bigotimes'_{v\nmid\infty} \pi_v$ を定義 2.16 と同様に定める．

定理 2.19 Π_{ϕ_{Π},v_0} の部分集合 $\Pi^+_{\phi_{\Pi},v_0}$ であって，以下を満たすものが存在する：$\pi'_\infty = \bigotimes_{v|\infty} \pi'_v$ を $\prod_{v|\infty} \mathrm{U}(F_v^+)$ の既約許容表現とするとき，$\pi_f \otimes \pi'_\infty$ が $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ に属することは，F^+ の任意の無限素点 v に対し

$$\pi'_v \in \begin{cases} \Pi^+_{\phi_{\Pi},v_0} & v = v_0 \\ \Pi_{\phi_{\Pi},v} & v \neq v_0 \end{cases}$$

が成り立つことと同値である．さらにこのとき，$m(\pi_f \otimes \pi'_\infty) = 1$ が成り立つ．

$\Pi^+_{\phi_{\Pi},v_0}$ の位数は $m-1$ または 1 である．

証明 $\mathfrak{S}_{\phi_\Pi} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．$\mathfrak{S}_{\phi_\Pi}$ の非自明元を s と書く．F^+ の無限素点 $v \neq v_0$ に対し，$\Pi_{\phi_{\Pi},v}$ に属する唯一の元を π_v と書き（命題 2.14 (3) 参照），

$$\Pi^+_{\phi_{\Pi},v_0} = \left\{ \tau \in \Pi_{\phi_{\Pi},v_0} \;\middle|\; \langle s_{v_0}, \tau\rangle \cdot \prod_{v|\infty, v\neq v_0} \langle s_v, \pi_v\rangle = 1 \right\}$$

とおく．$\Pi^+_{\phi_{\Pi},v_0}$ の位数を調べよう．命題 2.14 (3) で述べたように，Π_{ϕ_{Π},v_0} は $\mathfrak{S}_m/(\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1})$ でパラメータ付けられるのであった．このパラメータ付けを適切に正規化すると，$\tau \in \Pi_{\phi_{\Pi},v_0} = \mathfrak{S}_m/(\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1})$ に対し，

$$\langle -, \tau\rangle\colon \mathfrak{S}_{\phi_{\Pi},v_0} = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \mid \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}/\{\pm(1, \ldots, 1)\} \to \{\pm 1\}$$

は $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \mapsto \prod_{i=2}^m \varepsilon_{\tau(i)}$ の ± 1 倍で与えられる．$s_{v_0} = [(1, \ldots, 1, -1)]$ なので，

$$\langle s_{v_0}, \tau\rangle = \begin{cases} \pm 1 & \tau(1) = m \\ \mp 1 & \tau(1) \neq m \end{cases}$$

（複号同順）である．この計算については [Shi11, §3.6], [Clo11, §3] を参照．このことから $\#\Pi^+_{\phi_{\Pi,v_0}}$ は $m-1$ または 1 であることが分かる．

$\Pi^+_{\phi_{\Pi,v_0}}$ が条件を満たすことを証明しよう．F^+ の有限素点 v に対し，$\langle s_v, \pi_v\rangle = 1$ である．実際，v が F/F^+ において分解するならば定理 2.4 (3) より $\mathfrak{S}_{\phi_{\Pi,v}} = 1$ であり，v が F/F^+ において非分解ならば π_v は不分岐表現なので定理 2.4 (2) より $\langle s_v, \pi_v\rangle = 1$ である．よって定理 2.6 より，$\prod_{v|\infty} \mathrm{U}(F_v^+)$ の既約許容表現 $\pi'_\infty = \bigotimes_{v|\infty} \pi'_v$ に対し，$\pi_f \otimes \pi'_\infty$ が $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ に属することは，F^+ の任意の無限素点 v に対し $\pi'_v \in \Pi_{\phi_{\Pi,v}}$ であり，かつ $\prod_{v|\infty}\langle s_v, \pi'_v\rangle = 1$ であることと同値である．$v \neq v_0$ に対し $\pi'_v \in \Pi_{\phi_{\Pi,v}}$ ならば $\pi'_v = \pi_v$ であり，$\prod_{v|\infty}\langle s_v, \pi'_v\rangle = 1 \iff \langle s_{v_0}, \pi'_{v_0}\rangle \cdot \prod_{v|\infty, v\neq v_0}\langle s_v, \pi_v\rangle = 1 \iff \pi'_{v_0} \in \Pi^+_{\phi_{\Pi,v_0}}$ が成り立つ．よって，$\pi_f \otimes \pi'_\infty$ が $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ に属することは，F^+ の任意の無限素点 v に対し

$$\pi'_v \in \begin{cases} \Pi^+_{\phi_{\Pi,v_0}} & v = v_0 \\ \Pi_{\phi_{\Pi,v}} & v \neq v_0 \end{cases}$$

が成り立つことと同値であることが分かった．$\pi_f \otimes \pi'_\infty \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{U})$ ならば，定理 2.6 から $m(\pi_f \otimes \pi'_\infty) = 1$ である． □

Π_1 にもう少し強い正則性を課すと，Π_2 をうまく選んで $\#\Pi^+_{\phi_{\Pi,v_0}} = m-1$ とすることができる．

定義 2.20 Π_1 を $\mathrm{GL}_{m-1}(\mathbb{A}_F)$ の CSD かつ正則 L 代数的な保型表現とする．Π_1 が F の無限素点 w において**申正則** (Shin regular) であるとは，w における Π_1 の無限小指標

$$(a_{w,1}, \dots, a_{w,m-1}; -a_{w,m-1}, \dots, -a_{w,1}) \quad (a_{w,1} > \dots > a_{w,m-1})$$

が，ある奇数 $1 \le k \le m-2$ に対し $a_{w,k} - a_{w,k+1} \ge 2$ を満たすことをいう．Π_1 がある無限素点 w において申正則であるとき，単に申正則であるという．

補題 2.21（[Shi11, Lemma 7.3]） Π_1 を定義 2.18 の通りとし，さらに申正則であると仮定する．このとき，CSD な代数的 Hecke 指標 $\Pi_2\colon \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ であって定義 2.18 の条件を満たすものをうまくとると，$\#\Pi^+_{\phi_{\Pi,v_0}} = m-1$ とすることができる．

証明 概要のみ述べる．F の無限素点 w における Π_1 の無限小指標を

$$((a_{w,1}, \dots, a_{w,m-1}); (-a_{w,m-1}, \dots, -a_{w,1})) \quad (a_{w,1} > \dots > a_{w,m-1})$$

と書く．Π_1 が串正則であるような F の無限素点 w_1 および $a_{w_1,k} - a_{w_1,k+1} \geq 2$ となる奇数 $1 \leq k \leq m-2$ を固定する．

定義 2.18 における条件を満たす Hecke 指標 Π_2, Π'_2 を以下のようにとる：Π_2, Π'_2 の w における無限小指標をそれぞれ $(b_w; -b_w)$, $(b'_w; -b'_w)$ としたとき，

- $w = w_1$ ならば $b_{w_1} > a_{w_1,1}$, $a_{w_1,k} > b'_{w_1} > a_{w_1,k+1}$.
- $w \neq w_1$, $w|_E = w_1|_E$ ならば $b_{w,1} > a_{w,1}$, $b'_{w,1} > a_{w,1}$.

このとき，$\Pi = \Pi_1 \boxplus \Pi_2$ に対して $\#\Pi_{\phi_{\Pi,v_0}} = 1$ ならば $\Pi' = \Pi_1 \boxplus \Pi'_2$ に対して $\#\Pi_{\phi_{\Pi',v_0}} = m-1$ であることが無限素点における写像 $\Pi_{\phi_{\Pi,v}} \to \widehat{\mathfrak{S}}_{\phi_{\Pi,v}}$ の具体的な記述を用いて示せる．[Clo11, §3], [CHL11a, §3.3] 等を参照． $\square$

■一般ユニタリ群 GU の保型表現　ここまではユニタリ群 $\mathrm{U}(\mathbb{A}_{F^+})$ の保型表現について述べてきたが，志村多様体と直接関係するのはユニタリ群ではなく，以下で定義する一般ユニタリ群である．

定義 2.22　$\mathbb{Q}$ 上の代数群 GU を以下で定める：$\mathbb{Q}$ 代数 R に対し，

$$\mathrm{GU}(R) = \{(g,\lambda) \in \mathrm{GL}_m(F \otimes_{\mathbb{Q}} R) \times R^\times \mid \langle gx, gy \rangle = \lambda \langle x, y \rangle\}.$$

準同型 sim: $\mathrm{GU} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ を $(g,\lambda) \mapsto \lambda$ で定めると，次の完全系列がある：

$$1 \to \mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U} \to \mathrm{GU} \xrightarrow{\mathrm{sim}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to 1.$$

$T = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ とおく．$\theta\colon T \times \mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U} \to \mathrm{GU}$; $(t,g) \mapsto tg$ は代数群の全射である．$T^1 = \mathrm{Ker}(T \xrightarrow{\mathrm{Nr}_{E/\mathbb{Q}}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ とおく．$T^1 \to T \times \mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U}$; $t \mapsto (t, t^{-1})$ により T^1 は $\mathrm{Ker}\,\theta$ と同一視される．Z を GU の中心とする．$\mathbb{Q}$ 代数 R に対し，$Z(R) = \{a \in (F \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \mid \mathrm{Nr}_{F/F^+}(a) \in R^\times\}$ となる．

補題 2.23　m を奇数とする．

(1) $\mathbb{Q}$ の素点 v が以下のいずれかの条件を満たすとする：
- v は無限素点である．
- v は E で分解する有限素点である．
- v は F で不分岐な有限素点である．

このとき，$\theta_{\mathbb{Q}_v}\colon T(\mathbb{Q}_v) \times (\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U})(\mathbb{Q}_v) \to \mathrm{GU}(\mathbb{Q}_v)$ は全射である．

(2) $\theta_{\mathbb{A}}\colon T(\mathbb{A})\times(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U})(\mathbb{A})\to\mathrm{GU}(\mathbb{A})$ は開写像であり，その像は指数有限の部分群である．

(3) $\mathrm{GU}(\mathbb{A})=\mathrm{GU}(\mathbb{Q})\,\mathrm{U}(\mathbb{A}_{F^+})Z(\mathbb{A})$ である．

証明　(1) は [HT01, p. 201] および [CHL11b, Appendix] を参照．(2) も (1) の証明から分かる．(3) は [CHL11b, Lemma 1.1.3] 参照．□

この補題を用いると，定理 2.17 および定理 2.19，補題 2.21 の GU 版を導くことができる．

定理 2.24（[CHL11b, Proposition 1.2.4, Corollary 1.2.5]）　Π を定義 2.16 の通りとし，その中心指標を ω_Π と書く．指標 $\chi\colon T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q})\to\mathbb{C}^\times$ を $\chi^c\chi^{-1}=\omega_\Pi|_{T(\mathbb{A})}$ となるようにとる（[CHT08, Lemma 4.1.4] を参照）．

v_0 と異なる F^+ の無限素点 v に対し，$\Pi_{\phi_{\Pi,v}}$ の唯一の元を π_v と書く．このとき，各 $\tau\in\Pi_{\phi_{\Pi,v_0}}$ に対し，$T(\mathbb{R})\times\prod_{v|\infty}\mathrm{U}(F_v^+)$ の表現 $\chi_\infty\boxtimes(\tau\otimes\bigotimes_{v|\infty,v\neq v_0}\pi_v)$ は $\mathrm{GU}(\mathbb{R})$ の既約離散系列表現を与える．$\Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}=\{\chi_\infty\boxtimes(\tau\otimes\bigotimes_{v|\infty,v\neq v_0}\pi_v)\mid\tau\in\Pi_{\phi_{\Pi,v_0}}\}$ とおく．

このとき，$\mathrm{GU}(\mathbb{A}_f)$ の既約許容表現 σ_f で以下の条件を満たすものが存在する：

- σ_f の $\theta_{\mathbb{A}_f}\colon T(\mathbb{A}_f)\times(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U})(\mathbb{A}_f)\to\mathrm{GU}(\mathbb{A}_f)$ による引き戻しは $\chi_f\boxtimes\pi_f$ を含む．
- $\mathrm{GU}(\mathbb{R})$ の既約許容表現 σ'_∞ に対し，$\sigma_f\otimes\sigma'_\infty$ が $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GU})$ に属することは $\sigma'_\infty\in\Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}$ と同値である．さらにこのとき，$m(\sigma_f\otimes\sigma'_\infty)=1$ である．

定理 2.25（[CHL11b, Proposition 1.2.6, Corollary 1.2.7]）　Π_1 を定義 2.18 の通りとし，さらに中正則であると仮定する．Π_2 を補題 2.21 の条件を満たすようにとる．$\Pi=\Pi_1\boxplus\Pi_2$ に対し，指標 $\chi\colon T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q})\to\mathbb{C}^\times$ を定理 2.24 と同様にとる．$\Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}$ を定理 2.24 と同様に定める．また，$\Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}$ の定義において，$\Pi_{\phi_{\Pi,v_0}}$ を $\Pi^+_{\phi_{\Pi,v_0}}$ に置き換えて得られる表現の集合を $\Pi^+_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}$ と書く．

このとき，$\mathrm{GU}(\mathbb{A}_f)$ の既約許容表現 σ_f で以下の条件を満たすものが存在する：

- σ_f の $\theta_{\mathbb{A}_f}\colon T(\mathbb{A}_f)\times(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U})(\mathbb{A}_f)\to\mathrm{GU}(\mathbb{A}_f)$ による引き戻しは $\chi_f\boxtimes\pi_f$ を含む．
- $\mathrm{GU}(\mathbb{R})$ の既約許容表現 σ'_∞ に対し，$\sigma_f\otimes\sigma'_\infty$ が $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GU})$ に属することは $\sigma'_\infty\in\Pi^+_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}$ と同値である．さらにこのとき，$m(\sigma_f\otimes\sigma'_\infty)=1$ である．

3 偏極可能な場合の Galois 表現の構成

前節での準備のもとに，定理 1.3 を Π が偏極可能である場合に証明しよう．まず，Galois 表現の貼り合わせの議論（[HT01, Theorem VII.1.9 の証明], [Shi11, §7.2], [Sor20], [CHL11b, Proposition 5.1] を参照）と注意 1.5 によって，以下の条件が成立する場合に帰着できる：

- F は CM 体であり, $F^+ = F^{c=1}$ とおくと, ある虚二次体 E に対して $F = EF^+$ が成り立つ.
- F/F^+ は任意の有限素点において不分岐である．特に $F^+ \neq \mathbb{Q}$ である.
- Π は CSD である.
- F^+ の有限素点 v が F/F^+ において非分解ならば，v の上にある F の素点 w について Π_w は不分岐表現である.

以下では，n の偶奇によって場合分けを行う.

■ユニタリ型志村多様体　n が奇数の場合には $m = n, n$ が偶数の場合には $m = n+1$ とおく．このとき，第 2 節冒頭のような非退化ペアリング $\langle\ ,\ \rangle\colon F^m \times F^m \to \mathbb{Q}$ であって仮定 2.1 を満たすものが存在する（これは [Kot86, Proposition 2.6] を用いて簡単に証明できる．[Clo91, §2] を参照）.

体の埋め込み $\tau_0\colon E \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定し，これにより E を $\mathbb{C}$ の部分体とみなす．F^+ の無限素点 v_0 に対応する体の埋め込み $F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ と合わせることで，F を $\mathbb{C}$ の部分体とみなす.

同型

$$F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = E \otimes_{\mathbb{Q}} F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong E \otimes_{\mathbb{Q}} \prod_{v\colon F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}} \mathbb{R} = \prod_{v\colon F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}} E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow[\cong]{\tau_0} \prod_{v\colon F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}} \mathbb{C}$$

によって $F^m \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ と $\prod_v \mathbb{C}^m$ を同一視する．さらに $\prod_v \mathbb{C}^m$ の $\prod_v \mathbb{C}$ 加群としての自己同型 α を選ぶことで，$F^m \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \prod_v \mathbb{C}^m \xrightarrow[\cong]{\alpha} \prod_v \mathbb{C}^m$ および $\langle\ ,\ \rangle$ が $\prod_v \mathbb{C}^m$ 上に定めるペアリングの各 v 成分 $\langle\ ,\ \rangle_v$ が

$$\langle (x_i), (y_i) \rangle_v = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\bigl(\sqrt{-1}(x_1\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2 - \cdots - x_m\overline{y}_m)\bigr) & v = v_0 \\ \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\bigl(\sqrt{-1}(-x_1\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2 - \cdots - x_m\overline{y}_m)\bigr) & v \neq v_0 \end{cases}$$

となるようにすることができる（-1 の平方根 $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ は一つ選んでおく）．$\mathbb{R}$ 代

数の準同型 $h\colon \mathbb{C}\to M_m(F)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ を，合成 $\mathbb{C}\xrightarrow{h} M_m(F)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\cong\prod_v M_m(\mathbb{C})\xrightarrow[\cong]{\alpha}\prod_v M_m(\mathbb{C})$ が

$$z\mapsto(\underbrace{\mathrm{diag}(z,\overline{z},\ldots,\overline{z})}_{v_0\ \text{成分}},\underbrace{\overline{z}I_m,\ldots,\overline{z}I_m}_{v_0\ \text{以外の成分}})$$

となるように定める．

以上で PEL データ $(F,c,F^m,\langle\ ,\ \rangle,h)$ が定まったので，これより PEL 型志村多様体 $\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset\mathrm{GU}(\mathbb{A}_f)}$ が得られる．リフレックス体は F である．$[F^+:\mathbb{Q}]\ge 2$ であるから GU は中心を法として非等方的であり，したがって Sh_K は F 上射影的な代数多様体である．$\dim\mathrm{Sh}_K=m-1$ である．

ξ を $\mathrm{GU}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ の代数的既約表現とするとき，Sh_K 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}_\xi$ が定まるのであった．エタールコホモロジー

$$H^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{F}_\xi)=\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{F}},\mathcal{F}_\xi)$$

は $\mathrm{GU}(\mathbb{A}_f)\times\Gamma_F$ の表現となる．これを用いて Galois 表現 R_Π の構成を行う．

■n が奇数の場合　まず，n が奇数の場合を考える．χ および σ_f を定理 2.24 の通りにとる．また，$\mathrm{GU}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ の代数的既約表現 ξ を，任意の $\sigma_\infty\in\Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}$ が $\xi^\vee$ と同じ無限小指標を持つようにとる．

定義 3.1　$H^{m-1}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{F}_\xi)[\sigma_f]=\mathrm{Hom}_{\mathrm{GU}(\mathbb{A}_f)}(\sigma_f,H^{m-1}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{F}_\xi))$ とおき，その半単純化を $\rho_{\chi\boxtimes\Pi}$ と書く．$\rho_{\chi\boxtimes\Pi}$ は Γ_F の半単純 ℓ 進表現である．

$\rho_{\chi\boxtimes\Pi}$ の次元は，松島・村上公式（[大島, §4] 参照）から容易に計算することができる．

命題 3.2　以下が成り立つ：

- $\dim\rho_{\chi\boxtimes\Pi}=m$.
- $i\neq m-1$ に対し $H^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{F}_\xi)[\sigma_f]=0$.

証明　エタールコホモロジーと Betti コホモロジーの比較，および松島・村上公式から，Γ_F の作用を忘れると

$$H^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{F}_\xi)\cong\bigoplus_{\sigma'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GU})}(\sigma'_f)^{\oplus m(\sigma')}\otimes H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K_\infty;\sigma'_\infty\otimes\xi)$$

であった．ただし，$\mathfrak{g}$ は GU の Lie 環であり，K_∞ は PEL データから定まる準同型 $h\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GU}_{\mathbb{R}}$ の $\mathrm{GU}(\mathbb{R})$ における中心化群である．両辺の σ_f 部分をとると，定理 2.24 より，ベクトル空間の同型

$$\rho_{\chi\boxtimes\Pi} \cong \bigoplus_{\sigma_\infty \in \Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}} H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \sigma_\infty \otimes \xi)$$

が得られる．$\Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}$ の元は離散系列表現であったから，[VZ84] より，各 $\sigma_\infty \in \Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}}$ に対し

$$\dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \sigma_\infty \otimes \xi) = \begin{cases} 1 & i = m-1 \\ 0 & i \neq m-1 \end{cases}$$

となることが分かる．これと $\#\Pi_{\phi_{\chi\boxtimes\Pi,\infty}} = m$ より主張が得られる． □

$\{\mathrm{Sh}_K\}$ の整正準モデルの Lefschetz 数の計算と安定跡公式を組み合せることで，次が証明できる[*4]：

定理 3.3 素数 $p \neq \ell$ において PEL データ $(F, c, F^m, \langle\ ,\ \rangle, h)$ が不分岐であるとする（[清水, §4.1] 参照）．さらに，p の上にある F の任意の素点において Π が不分岐であり，また，χ_p が不分岐であると仮定する．$\mathfrak{p}$ を p の上にある F の素点とし，$\Pi_{\mathfrak{p}}$ の佐武パラメータを $\alpha_{\mathfrak{p},1}, \ldots, \alpha_{\mathfrak{p},m}$ とおく．このとき，$\rho_{\chi\boxtimes\Pi}$ も $\mathfrak{p}$ において不分岐であり，$\rho_{\chi\boxtimes\Pi}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})$ の固有値は

$$q_{\mathfrak{p}}^{\frac{m-1}{2}} \chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_{\mathfrak{p}}))^{-1} \alpha_{\mathfrak{p},1}^{-1}, \quad \ldots \quad , \quad q_{\mathfrak{p}}^{\frac{m-1}{2}} \chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_{\mathfrak{p}}))^{-1} \alpha_{\mathfrak{p},m}^{-1}$$

となる．ここで，$q_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ における F の剰余体の位数であり，$\varpi_{\mathfrak{p}}$ は $F_{\mathfrak{p}}$ の素元である．

この定理より，$R_\Pi = \rho^\vee_{\chi\boxtimes\Pi}(-\frac{m-1}{2}) \otimes (\chi \circ \mathrm{Nr}_{F/E})_\ell^{-1}$ が Π に対応することが分かる．ここで，$(\chi \circ \mathrm{Nr}_{F/E})_\ell$ は代数的 Hecke 指標 $\chi \circ \mathrm{Nr}_{F/E}$ に伴う Γ_F の 1 次元 ℓ 進表現を表す（[HT01, p. 20] 参照）．

■n が偶数の場合 次に，n が偶数の場合に，Π が CSD かつ申正則であると仮定して定理 1.3 を証明する．前節と記号を合わせるために，ここでは Π を Π_1 と書く．CSD な代数的 Hecke 指標 Π_2 を補題 2.21 の通りにとり，$\Pi = \Pi_1 \boxplus \Pi_2$ とおく．さ

[*4] [三枝 2, §10] における定理 6.1 (1) の証明と似ている．

らに，χ および σ_f を定理 2.25 の通りにとる．$\mathrm{GU}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ の代数的既約表現 ξ を n が奇数の場合と同様にとり，$\rho_{\chi\boxtimes\Pi}$ を定義 3.1 の通りに定める．

以下の命題は，定理 2.24 の代わりに定理 2.25 を用いて，命題 3.2 と全く同様に証明することができる．

命題 3.4 以下が成り立つ：

- $\dim \rho_{\chi\boxtimes\Pi} = n$.
- $i \neq m-1$ に対し $H^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}}, \mathcal{F}_\xi)[\sigma_f] = 0$.

さらに，Lefschetz 数の計算と安定跡公式を用いて次が証明できる[*5]：

定理 3.5 素数 $p \neq \ell$ において PEL データ $(F, c, F^m, \langle\ ,\ \rangle, h)$ が不分岐であるとする．さらに，p の上にある F の任意の素点において Π が不分岐であり，また，χ_p が不分岐であると仮定する．$\mathfrak{p}$ を p の上にある F の素点とし，$\Pi_{1,\mathfrak{p}}$ の佐武パラメータを $\alpha_{\mathfrak{p},1}, \ldots, \alpha_{\mathfrak{p},m-1}$ とおく．このとき，$\rho_{\chi\boxtimes\Pi}$ も $\mathfrak{p}$ において不分岐であり，$\rho_{\chi\boxtimes\Pi}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})$ の固有値は

$$q_\mathfrak{p}^{\frac{m-1}{2}} \chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_\mathfrak{p}))^{-1} \alpha_{\mathfrak{p},1}^{-1}, \quad \ldots \quad , \quad q_\mathfrak{p}^{\frac{m-1}{2}} \chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_\mathfrak{p}))^{-1} \alpha_{\mathfrak{p},m-1}^{-1}$$

となる．

この定理より，$R_\Pi = \rho_{\chi\boxtimes\Pi}^\vee(-\frac{m-1}{2}) \otimes (\chi \circ \mathrm{Nr}_{F/E})_\ell^{-1}$ が Π に対応することが分かる．

以上の証明において，m が偶数の場合には Π が申正則であるという仮定が必要であった．Chenevier-Harris [CH13] は，無限素点においてコンパクトであるユニタリ群の固有値多様体 (eigenvariety) を用いることで，申正則でない場合を申正則な場合に帰着させ，Π が偏極可能な場合に定理 1.3 の証明を完成させた．この部分は志村多様体とは直接関係しないため，本稿では説明を割愛する．なお，固有値多様体の構成は [中村] でも扱われるが，これは無限素点においてコンパクトでない簡約群に関するものであるため，[CH13] で扱っているものの構成に比べてはるかに難解であることを付記しておく．

[*5] こちらは [三枝 2, §10] における定理 6.1 (2) の証明と似ている．

4 偏極可能とは限らない場合の Galois 表現の構成

4.1 証明の方針

ここでは，定理 1.3 における素数 ℓ を p と書くことにする（したがって，体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_p \cong \mathbb{C}$ が固定されている状況にある）．3 節と同様，F が CM 体である場合のみを考えれば十分である．本節では，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の L 代数的な保型表現の代わりに，C 代数的な保型表現（定義 1.1 参照）を考える．C 代数的な保型表現に指標 $|\det|^{\frac{1-n}{2}}$ をテンソルすると L 代数的になるので，これらにさほど大きな差はない．C 代数的な保型表現と Galois 表現の対応については，以下のように定める：

定義 4.1 Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の C 代数的な等圧的保型表現とし，ρ を Γ_F の n 次元半単純 p 進表現とする．Π と ρ が対応するとは，L 代数的な等圧的保型表現 $\Pi\otimes|\det|^{\frac{1-n}{2}}$ と ρ が対応することをいう．

注意 4.2 Π を偏極可能かつ正則 C 代数的な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現とするとき，$\Pi\otimes|\det|^{\frac{1-n}{2}}$ は偏極可能かつ正則 L 代数的な尖点的保型表現である．このことと前節で証明した偏極可能な場合の定理 1.3 を合わせることで，Π に対応する Γ_F の n 次元半単純 p 進表現が存在することが分かる．

$F^+=F^{c=1}$ を F の最大総実部分体とし，U^* を F^+ 上の準分裂 $2n$ 次ユニタリ群とする[*6]．このとき，$\mathrm{Res}_{F/F^+}\mathrm{GL}_n$ は U^* の Levi 部分群であるから，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の正則 C 代数的な尖点的保型表現 Π に対し，$\mathrm{U}^*(\mathbb{A}_{F^+})$ への放物型誘導 $\mathrm{Ind}\,\Pi$ を考えることができる．これは $\mathrm{U}^*(\mathbb{A}_{F^+})$ の保型表現であり，$\mathrm{BC}(\mathrm{Ind}\,\Pi)=\Pi\boxplus\Pi^{c\vee}$ を満たしている（BC については注意 2.12 を参照．2 節とは考えているユニタリ群が異なるが，底変換の定義は同様である）．仮に Π に対応する Galois 表現 R_Π が存在するならば，$\Pi\boxplus\Pi^{c\vee}$ に対応する Galois 表現は $R_\Pi\oplus R_\Pi^{c\vee}(1-n)$ である．逆に，$\Pi\boxplus\Pi^{c\vee}$ に対応する Galois 表現 $R_{\Pi\boxplus\Pi^{c\vee}}$ が存在するならば，それをなんとかして直和分解す

[*6] 4.2 節では U^* ではなく準分裂一般ユニタリ群 GU^* を用いるが，説明が若干煩雑になるので，本小節では U^* と GU^* の違いは無視する．

ることで，Π に対応する Galois 表現 R_Π が得られるのではないかと期待される．

$$
\begin{tikzcd}
 & \Pi \arrow[r, mapsto, dashed] \arrow[dl, mapsto, "\text{放物型誘導}"'] \arrow[d, mapsto] & R_\Pi \arrow[d, mapsto] \\
\operatorname{Ind}\Pi \arrow[r, mapsto, "\mathrm{BC}"'] & \Pi \boxplus \Pi^{c\vee} \arrow[r, mapsto, dashed] & R_\Pi \oplus R_\Pi^{c\vee}(1-n)
\end{tikzcd}
$$

では，$R_{\Pi\boxplus\Pi^{c\vee}}$ を構成することはできるだろうか？ $\Pi \boxplus \Pi^{c\vee}$ は CSD かつ C 代数的である．Π を Hecke 指標で捻ったものに置き換えれば，正則にすることもできる．しかし，$\Pi \boxplus \Pi^{c\vee}$ は尖点的ではないため，このままでは偏極可能な場合の定理 1.3 を適用することができない．そこで，以下のようなことを考える．

> $\operatorname{Ind}\Pi$ に「p 進的に収束する」$\mathrm{U}^*(\mathbb{A}_{F^+})$ の**尖点的**保型表現の列 $\{\pi_i\}$ であって，無限成分 $\pi_{i,\infty} = \bigotimes_{v\mid\infty} \pi_{i,v}$ がコホモロジー的であるものが存在することを示す．$\mathrm{BC}(\pi_i)$ は正則 C 代数的であり，GL の CSD な離散的保型表現の Langlands 和として書けるので，それぞれの成分に注意 4.2 を適用して得られる Galois 表現の直和をとることで $\mathrm{BC}(\pi_i)$ に対応する Galois 表現 $R_{\mathrm{BC}(\pi_i)}$ が得られる．これらを「貼り合わせて」$R_{\Pi\boxplus\Pi^{c\vee}}$ を構成する．

$\operatorname{Ind}\Pi$ に収束する尖点的保型表現の列が存在することを証明するのが最も難しい部分である．本節では，この部分について，Harris-Lan-Taylor-Thorne [HLTT16] による方法，Scholze [Sch15] による方法の 2 つを解説する．大雑把にはこれら 2 つの方法は似通っており，以下の 3 つの空間の比較を行う．

- V_{cl}：$\mathrm{U}^*(\mathbb{A}_{F^+})$ 上の正則尖点形式のなすベクトル空間.
- $V_{p\text{-adic}}$：U^* 上の p 進保型形式のなすベクトル空間．現時点では確定した定義がない.
- $H^*(X_K^{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n}, \mathbb{C})$：局所対称空間 $X_K^{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n}$（定義は後述）の Betti コホモロジー.

V_{cl} は $\mathrm{U}^*(\mathbb{A}_{F^+})$ の尖点的保型表現（であって無限成分がコホモロジー的であるもの）と関係し，$H^*(X_K^{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n}, \mathbb{C})$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の正則 C 代数的な尖点的保型表現と関係するので，もし V_{cl} と $V_{p\text{-adic}}$，$V_{p\text{-adic}}$ と $H^*(X_K^{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n}, \mathbb{C})$ がそれぞれ結び付けば，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の正則 C 代数的な尖点的保型表現と $\mathrm{U}^*(\mathbb{A}_{F^+})$ の尖点的保型表現も結び付くことになる．

上で述べたように，$V_{p\text{-adic}}$ には，現時点では確定した定義がない．p 進保型形式に関する研究は数多く行われているが，流儀がいくつかあり，それらを統合した理論が存在しないためである．次小節以降で詳しく述べるが，[HLTT16] では $V_{p\text{-adic}}$ として過収束 p 進尖点形式の空間を採用し，[Sch15] では $V_{p\text{-adic}}$ として完備化コホモロジーを採用している．

本小節の最後に，局所対称空間の定義を述べておく．

定義 4.3 G を $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群とし，G の中心に含まれる最大分裂トーラスを A_G と書く．K_∞ を $G(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群とする．$G(\mathbb{A}_f)$ の各コンパクト開部分群 K に対し，位相空間 X_K^G を

$$X_K^G = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/(K \times A_G(\mathbb{R})K_\infty)$$

で定め，G の**局所対称空間**と呼ぶ．射影系 $\{X_K^G\}_K$ には $G(\mathbb{A}_f)$ が右から作用する．

注意 4.4 X_K^G の定義は志村多様体と似ているが，$A_G(\mathbb{R})K_\infty$ が志村多様体のときの K_∞ とは少し異なるため，X_K^G も志村多様体とは違うものになる．例えば $G = \mathrm{GL}_2$ の場合には，$A_G(\mathbb{R})K_\infty = \mathbb{R}_{>0}\,\mathrm{O}(2)$ となり，志村多様体のときの $K_\infty = \mathbb{R}_{>0}\,\mathrm{SO}(2)$ と指数 2 だけずれる．X_K^G は志村多様体 $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GL}_2, \mathfrak{H}_1^\pm)$（モジュラー曲線）の複素共役による商である．一方，$G = \mathrm{SL}_2$ の場合には，$A_G(\mathbb{R})K_\infty = \mathrm{SO}(2)$, $G(\mathbb{R})/A_G(\mathbb{R})K_\infty \cong \mathfrak{H}_1^+$ となるので，$X_K^G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathfrak{H}_1^+ \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)/K)$ である．これは連結志村多様体（[今井, §7] 参照）になっており，モジュラー曲線の連結成分の一つを与える．F が $\mathbb{Q}$ でない総実体のとき，$X_K^{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2}$ は Hilbert モジュラー多様体とはかなり異なるものになる（次元も違う）．その一方で，$X_K^{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{SL}_2}$ は Hilbert モジュラー多様体の連結成分となる．

多くの G に対して X_K^G は複素構造を持たないことにも注意しておこう．例えば，E を虚二次体とし，$G = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2$ または $G = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathrm{SL}_2$ とすると，K が十分小さいとき，X_K^G は 3 次元実多様体となる．このため，X_K^G に代数多様体の構造を入れてエタールコホモロジー等を考えることは一般には不可能である．

4.2 Harris-Lan-Taylor-Thorne の方法

本小節では，Harris-Lan-Taylor-Thorne [HLTT16] による Galois 表現の構成法を紹介する．[HLTT16] のアイデアは大変明快だが，設定や記号が煩雑であるため，非

常に長い論文となっている．本稿では，まずアイデアを把握するために，状況を簡易化したモジュラー曲線の場合に議論を行い，その後，一般の場合にはどのような修正が必要となるかについてのコメントを行う．

4.2.1 **モジュラー曲線の場合**

ここでは，GL_2 の場合に，保型形式の合同を利用して以下を証明することを目標とする．

定理 4.5 $\chi\colon \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を重さ 0 の代数的 Hecke 指標，すなわち Dirichlet 指標から定まる Hecke 指標とする．$\chi^2 \neq 1$, $\chi_\infty = 1$ および χ_p は不分岐と仮定する．このとき，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の正則 C 代数的な等圧的保型表現 $\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2}$ に対応する $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元半単純 p 進表現が存在する．

言うまでもないことであるが，この定理は円分体論を用いて簡単に証明することができる．ここでは，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の正則 L 代数的な尖点的保型表現に対応する Galois 表現の存在を用いてこの定理を証明するということである．

注意 4.6 以下の解説の大部分は，[HLTT16] によって初めて導入されたものではなく，p 進保型形式の理論においては標準的なものである．[HLTT16] の内容の核心部は 486 ページから始まる「リジッドコホモロジー」なので，p 進保型形式の理論に馴染みのある方は，そこまでは読み飛ばすことをお勧めする．

■モジュラー曲線の整モデル $K^p \subset \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ を十分小さなコンパクト開部分群とする．また，

$$\mathrm{Iw}_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \;\middle|\; c \in p\mathbb{Z}_p \right\}$$

を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の岩堀部分群とする．志村データ $(\mathrm{GL}_2, \mathfrak{H}_1^{\pm})$ に対応する志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)K^p}$ および $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}_p K^p}$ を考える．

$\mathrm{Sh}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)K^p}$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の整正準モデルを Sh_{K^p} と書く．これは楕円曲線 E と K^p レベル構造 η^p の組 (E, η^p) のモジュライ空間であった．$\mathbb{F}_p$ 上のファイバー $\mathrm{Sh}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ において超特異楕円曲線に対応する閉部分集合を $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ss}}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ と書く．これは有限個の点からなる．$\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p} = \mathrm{Sh}_{K^p} \setminus \mathrm{Sh}^{\mathrm{ss}}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ とおく．

楕円曲線 E とその K^p レベル構造 η^p，および $E[p]$ の次数 p の有限平坦部分群

スキーム C の組 (E, η^p, C) のなすモジュライ空間を $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p}$ とおくと，これは $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}_p K^p}$ の整モデルとなっている．すなわち，$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}_p K^p} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ が成り立つ．$E[p]/C$ がエタールとなるような部分は $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p}$ の開部分スキームとなる．これを $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p}$ と書く．

補題 4.7 (1) $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}_p K^p} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ である．

(2) 自然な射 $\phi\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p} \to \mathrm{Sh}_{K^p}$ は $\phi\colon \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p}$ を誘導する．$\phi_{\mathbb{F}_p}\colon \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p,\mathbb{F}_p} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ は同型であり，ϕ は $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p,\mathbb{F}_p}$ の近傍においてエタールである．

証明 (1) は定義から明らかである．(2) は省略するが，$\phi_{\mathbb{F}_p}$ が同型であるという部分は以下のような観察から納得できるだろう：E が $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の通常楕円曲線ならば，$E[p]$ の次数 p の有限部分群スキーム C であって $E[p]/C$ がエタールになるようなものは $\mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_E\colon E \to E^{(p)})$ しかない（Fr_E は p 乗 Frobenius 射を表す）． □

補題 4.8 $\varsigma\colon \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p}$ を $(E, \eta^p, C) \mapsto (E/C, \eta^p)$ で定めると[*7]，以下が成り立つ：

(1) 合成 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p,\mathbb{F}_p} \xrightarrow[\cong]{\phi_{\mathbb{F}_p}^{-1}} \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p,\mathbb{F}_p} \xrightarrow{\varsigma_{\mathbb{F}_p}} \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ は p 乗 Frobenius 射に等しい．

(2) $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}_p K^p} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\varsigma_{\mathbb{Q}_p}} \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathrm{Sh}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)K^p} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ は $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の Hecke 作用となっている．

証明 (1) は補題 4.7 の証明において述べた観察からすぐに分かる．(2) は $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw}_p K^p} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ と $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の同一視の作り方から容易に従う． □

Sh_{K^p} は $\mathbb{Z}_p$ 上滑らかなコンパクト化 $\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}$ を持つのであった．$\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min}_{K^p} = \mathrm{Sh}^{\min}_{K^p} \setminus \mathrm{Sh}^{\mathrm{ss}}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ とおく．同様に，$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p}$ の $\mathbb{Z}_p$ 上のコンパクト化 $\mathrm{Sh}^{\min}_{\mathrm{Iw},K^p}$ も存在する（これは $\mathbb{Z}_p$ 上滑らかではない）．$\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min}_{\mathrm{Iw},K^p} = \mathrm{Sh}^{\min}_{\mathrm{Iw},K^p} \setminus \overline{(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p} \setminus \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Iw},K^p})}$ とおく（$\overline{(\cdots)}$ は閉包を表す）．このとき，ϕ と ς は $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min}_{\mathrm{Iw},K^p} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min}_{K^p}$ に延長でき，補題 4.7，補題 4.8 と同様の性質を満たす．

[*7] ς (`\varsigma`) はあまり見ない記号であるが，[HLTT16] に合わせている．

■過収束 p 進尖点形式　一般に，X を $\mathbb{Z}_p$ 上分離的かつ有限型なスキームとしたとき，$X_{\mathbb{Q}_p}$ に伴う $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド空間[*8]を X^{ad} と書くことにする．また，X の p 進完備化として得られる形式スキームを $X^\wedge$ と書き，$X^\wedge$ のリジッド一般ファイバーを X^{rig} と書くことにする．X^{rig} は X^{ad} の開集合である．例えば $X = \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p[T]$ のときには，$X^{\mathrm{rig}}(\mathbb{C}_p) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \le 1\} \subset \mathbb{C}_p = X^{\mathrm{ad}}(\mathbb{C}_p)$ となっている．以下では主に，$X = \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p}$ に対して X^{ad} および X^{rig} を考える．$\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,rig}}_{K^p}$ は，大雑把に言えば，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{K^p} = \mathrm{Sh}^{\mathrm{min,ad}}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)K^p}$ から，（潜在的に）超特異還元を持つような楕円曲線に対応する部分を除いて得られるリジッド解析的開集合である．

[HLTT16] において，p 進保型形式の空間 $V_{p\text{-adic}}$ は，保型ベクトル束の $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,rig}}_{K^p}$ 上の過収束切断全体として定義される．過収束切断についても簡単に思い出しておく．X を上の通り $\mathbb{Z}_p$ 上分離的かつ有限型なスキームとする．X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し，X^{ad} 上の層 $\mathcal{F}^\dagger$ を

$$\mathcal{F}^\dagger = \varinjlim_{\overline{X^{\mathrm{rig}}} \subset V \subset X^{\mathrm{ad}}} j_{V,*} j_V^* \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}$$

で定める．ただし，$\mathcal{F}^{\mathrm{ad}}$ は $\mathcal{F}$ の X^{ad} への引き戻しである．また，$\overline{X^{\mathrm{rig}}}$ は X^{rig} の X^{ad} 内での閉包を表し，V は X^{ad} の開集合で $\overline{X^{\mathrm{rig}}}$ を含むものを動く．$j_V\colon V \hookrightarrow X^{\mathrm{ad}}$ は自然な開埋め込みを表す．$\overline{X^{\mathrm{rig}}}$ の準コンパクト性より，$\Gamma(X^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}^\dagger) = \varinjlim_{\overline{X^{\mathrm{rig}}} \subset V \subset X^{\mathrm{ad}}} \Gamma(V, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}})$ が成り立つ．$\Gamma(X^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}^\dagger)$ の元を $\mathcal{F}$ の X^{rig} 上の**過収束切断**と呼ぶ．

以上の準備のもとで，過収束 p 進尖点形式を定義しよう．$\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p}/\mathbb{Z}_p$ の微分加群を Ω_{K^p} と書く．Sh_{K^p} 上の普遍楕円曲線を $\mathcal{E}_{K^p}$ と書き，$\omega_{K^p} = \mathrm{Lie}(\mathcal{E}_{K^p})^\vee$ とおく．ω_{K^p} は $\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p}$ 上の直線束（これも ω_{K^p} と書く）に自然に延長されることが知られている．コンパクト化の境界 $\partial\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p} = \mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p} \setminus \mathrm{Sh}_{K^p}$ の定義イデアルを $\mathcal{I}_\partial$ とおくと，$\omega^{\otimes 2}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial \cong \Omega_{K^p}$ である．$\Omega_{K^p}, \omega_{K^p}$ の様々な空間上への引き戻しも同じ記号で表す．

重さ k の正則尖点形式は，$\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p,\mathbb{C}}, \omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial) = \Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p}, \omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p$ の元と解釈できるのであった．これに対し，過収束 p 進尖点形式は以下のように定義される：

定義 4.9　k を整数とする．$\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{K^p}, (\omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger)$ の元を，重さ k，レベル K^p

*8 本稿における $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド空間は全て $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ 上局所有限型な adic 空間のことを指す．

の**過収束 $\boldsymbol{p}$ 進尖点形式**と呼ぶ.

注意 4.10 [中村] にあるように，固有値多様体を構成する際などには p 進整数を重さに持つ過収束 p 進尖点形式も考える必要があるが，ここでは整数重さのもののみを考える.

以下の命題は，この設定では明らかなことであるが，過収束 p 進尖点形式と尖点形式を結び付けるために重要なものである.

命題 4.11 自然な単射および同型

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger) &\hookrightarrow \Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,rig}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^{\mathrm{ad}}) \\ &\cong \Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,\wedge}}, \omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{Q}_p}\end{aligned}$$

がある.

証明 最初の単射は制限写像

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger) &\to \Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,rig}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger) \\ &= \Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,rig}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^{\mathrm{ad}})\end{aligned}$$

から得られる．次の同型は $\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,\wedge}}$ がアフィンであることから従う． □

■U_p 作用素 補題 4.7 の ϕ および補題 4.8 の ς を用いると，過収束 p 進尖点形式の空間 $\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger)$ に作用素を定めることができる．これを説明しよう.

命題 4.12 $\phi\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p}^{\mathrm{ord,min}} \to \mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min}}$ が誘導する射

$$\phi\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p}^{\mathrm{ord,min,rig}} \to \mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,rig}}$$

は同型である．さらに，ϕ による引き戻しは過収束切断の間の同型

$$\phi^*\colon \Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Iw},K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger)$$

を誘導する．合成 $(\phi^*)^{-1} \circ \varsigma^*$ を単に ς^* と書く.

この命題は補題 4.7 (2) から容易に導かれる.

定義 4.13　合成

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,rig}}_{K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^{\mathrm{ad}}) &\xrightarrow{\phi^*}\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,rig}}_{\mathrm{Iw},K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^{\mathrm{ad}})\\ &\xrightarrow{\varsigma_*}\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,rig}}_{K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^{\mathrm{ad}})\end{aligned}$$

（$\varsigma_{\mathbb{Q}_p}$ が有限平坦なので ς_* が定義されることに注意）は $\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)$ を保つ．$\varsigma_*\circ\phi^*$ の $\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)$ への制限を U_p と書く．

次の補題は構成および $\deg\varsigma_{\mathbb{Q}_p}=p$ から明らかである．

補題 4.14　$U_p\circ\varsigma^*=p$ が成り立つ．特に U_p は全射である．

U_p が以下の意味で傾斜分解を持つことを証明したい．

定義 4.15（[HLTT16, §6.2]）　L を $\mathbb{Q}_p$ の代数拡大体とする．

(1) $a\in\mathbb{Q}$ とする．$P(X)\in L[X]$ の傾斜が a 以下であるとは，$P(X)\neq 0$ であって，かつ $P(X)$ の $\overline{L}$ における任意の根の p 進付値が a 以下であることをいう．

(2) V を L ベクトル空間とし，$T\colon V\to V$ を L 線型写像とする．T が**傾斜分解を持つ**とは，各 $a\in\mathbb{Q}$ に対し，以下を満たす直和分解 $V=V_{\le a}\oplus V_{>a}$ が存在することをいう：
- T は $V_{\le a}$ および $V_{>a}$ を保つ．
- $V_{\le a}$ は有限次元である．
- $P(X)\in L[X]$ の傾斜が a 以下ならば，$P(T)$ は $V_{>a}$ 上同型である．
- 傾斜が a 以下である $P(X)\in L[X]$ であって $P(T)|_{V_{\le a}}=0$ を満たすものが存在する．

T が傾斜分解を持つならば，各 $a\in\mathbb{Q}$ に対し直和分解 $V=V_{\le a}\oplus V_{>a}$ は一意的に決まる．これを T に関する**傾斜分解**と呼ぶ．

傾斜分解の性質については [HLTT16, Lemma 6.6] を参照．

命題 4.16（[HLTT16, Corollary 6.16]）　U_p は $\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)$ および $\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ への作用素として傾斜分解を持つ．

証明　概要のみ述べる．[HLTT16, Lemma 6.6 (3)] より，$\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)$ の方だけ考えればよい．補題 4.8 (1) から，U_p が $\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{K^p},(\omega^{\otimes k}_{K^p}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)$ の元の収束半径を（真に）大きくすることが証明できる（[HLTT16, §6.4.2]）．このことか

ら，収束半径によるフィルトレーションを考えることで，$\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)$ の部分空間の列 $V_1\subset V_2\subset\cdots$ で以下を満たすものがとれる：

- 各 V_r は $\mathbb{Q}_p$ 上の Banach 空間であり，$V_r\hookrightarrow V_{r+1}$ は完全連続.
- $r\geq 2$ に対し $U_p(V_r)=V_{r-1}$.
- $\bigcup_{r\geq 1}V_r=\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)$.

特に V_r は U_p の作用で安定であり，さらに $U_p|_{V_r}$ は完全連続である．よって [HLTT16, Lemma 6.6 (2)] より $U_p|_{V_r}$ は傾斜分解を持ち，したがって [HLTT16, Lemma 6.6 (5)] より U_p も傾斜分解を持つ. □

特に，任意の $a\in\mathbb{Q}$ に対し，過収束 p 進尖点形式からなる有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間 $\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)_{\leq a}$ および有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ベクトル空間 $\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\leq a}$ が定まることになる.

■過収束 p 進尖点形式と尖点形式の合同　過収束 p 進尖点形式が尖点形式とどのように結び付くかを説明するために，$\mathbb{Z}_p$ 上の Hecke 環を考える．$\mathbb{Q}$ の有限素点 v に対し，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)$ 上の両側 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_v)$ 不変なコンパクト台 $\mathbb{Z}_p$ 値関数全体を $\mathbb{T}_v$ とおく．これは単位元を持つ可換な $\mathbb{Z}_p$ 代数である.

$\mathbb{Q}$ の素点全体の集合を $\mathcal{P}_\mathbb{Q}$ と書く．$\mathcal{P}_\mathbb{Q}$ の有限部分集合 S であって以下の条件を満たすものをとる：

- $\infty, p\in S$.
- $K^p=K_S^p\times\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^S)$（$K_S^p$ は $\prod_{v\in S\setminus\{\infty,p\}}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)$ のコンパクト開部分群）と分解する.

$\mathbb{T}^S=\bigotimes_{v\in\mathcal{P}_\mathbb{Q}\setminus S}\mathbb{T}_v$ とおく．$\mathbb{T}^S$ は以下の空間に作用する：

- 尖点形式の空間 $\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{min}}, \omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$.
- $\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min},\wedge}, \omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)=\varprojlim_m\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}^{\mathrm{ord,min}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}})$.
- 傾斜 $a\in\mathbb{Q}$ 以下の過収束 p 進尖点形式の空間 $\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)_{\leq a}$.

仮に，$f\in\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min,ad}}, (\omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)_{\leq a}$ が $\mathbb{T}^S$ の固有ベクトルだったとしよう．その固有値を $\phi_f\colon\mathbb{T}^S\to\mathbb{Q}_p$ とおく．命題 4.11 より f は $\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min},\wedge}, \omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{Q}_p}$ の元だと思えるから，f を定数倍で置き換えることで，$f\in\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min},\wedge}, \omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)$ とできる．$\Gamma(\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min},\wedge}, \omega_{K^p}^{\otimes k}\otimes\mathcal{I}_\partial)$ が p 進完備であることから $\mathrm{Im}(\phi_f)\subset\mathbb{Z}_p$ が分

かる．

f に対応して $(f \bmod p^m)_m \in \varprojlim_m \Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}, (\omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}})$ が決まる．もし，各 $m \geq 0$ に対し $f \bmod p^m$ が

$$\Gamma(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial) \to \Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}, (\omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}})$$

による $g_m \in \Gamma(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)$ の像となるならば，f は尖点形式の列 $\{g_m\}$ の極限になっているといえる．実際の状況はこれほど単純ではないが，以下の命題の通り，重さ k を動かせば似たようなことが成り立つ．

命題 4.17（[HLTT16, Lemma 6.1]） 任意の整数 $r \geq 0$ に対し，$\mathbb{T}^S$ 同変な全射

$$\bigoplus_{j \geq r}^{\infty} H^0(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \omega^{\otimes(k+jp^{m-1}(p-1))}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial) \to \Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}, (\omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}})$$

が存在する．

証明　**Hasse 不変量**と呼ばれる元

$$\mathrm{Hasse}_{K^p} \in \Gamma(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\mathbb{F}_p}, \omega^{\otimes(p-1)}_{K^p,\mathbb{F}_p})$$

を用いる．これは，以下の 2 つの特徴を持った元である：

- $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^S)$ の作用による Hasse_{K^p} の引き戻しは $\mathrm{Hasse}_{gK^pg^{-1}}$ である．
- Hasse_{K^p} はちょうど $\mathrm{Sh}^{\mathrm{min,ss}}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ において零点を持つ．

$m = 1$ の場合には，$g \in H^0(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \omega^{\otimes(k+j(p-1))}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)$ を

$$(g \bmod p)|_{\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{F}_p}} \cdot \mathrm{Hasse}^{-j}_{K^p}$$

にうつすことで，$\mathbb{T}^S$ 同変な写像

$$\bigoplus_{j \geq r}^{\infty} H^0(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \omega^{\otimes(k+j(p-1))}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial) \to \Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{F}_p}, (\omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{F}_p})$$

が構成できる．これが全射であることを示そう．$h \in \Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{F}_p}, (\omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{F}_p})$ に対し $j \geq 1$ を十分大きくとれば $h \cdot \mathrm{Hasse}^j_{K^p}$ が $\mathrm{Sh}^{\mathrm{min,ss}}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ においても正則になり，したがって $\Gamma(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\mathbb{F}_p}, (\omega^{\otimes(k+j(p-1))}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{F}_p})$ の元を与える．また，（K^p が十分小さいならば）ω_{K^p} は豊富な直線束なので，j が十分大きいとき，コホモロジー長完全系

列より $\Gamma(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \omega^{\otimes(k+j(p-1))}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial) \to \Gamma(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\mathbb{F}_p}, (\omega^{\otimes(k+j(p-1))}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)_{\mathbb{F}_p})$ は全射になる．よって $h \cdot \mathrm{Hasse}^j_{K^p}$ は $\Gamma(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \omega^{\otimes(k+j(p-1))}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)$ の元の $\bmod p$ として得られる．

$m \geq 2$ の場合には，$\mathrm{Hasse}^{p^{m-1}}_{K^p}$ が $\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}$ に持ち上がることを利用して同様の議論を行う． □

この命題から，各 $m \geq 0$ に対し，整数 $k_m \geq 0$ および $\mathbb{T}^S$ の固有ベクトル $g_m \in H^0(\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \omega^{\otimes k_m}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)$ であって $\phi_{g_m} \equiv \phi_f \pmod{p^m}$ を満たすものが存在することが分かる．ここで，$\phi_{g_m} \colon \mathbb{T}^S \to \mathbb{Z}_p$ は g_m の固有値を表す．

さて，g_m は尖点形式であったから，それに対応する 2 次元 Galois 表現 $\rho_m \colon \Gamma_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ が存在する．こうして得られた Galois 表現の族 $\{\rho_m\}_m$ を貼り合わせることを考えよう．そのために指標 $\mathrm{Tr}\,\rho_m \colon \Gamma_\mathbb{Q} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ に注目する．$v \in \mathcal{P}_\mathbb{Q} \setminus S$ に対し，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_v)\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_v)$ の特性関数を T_v と書く．これは $\mathbb{T}_v$ の元であるから，$\mathbb{T}^S$ の元ともみなせる．ρ_m が g_m に対応するので，$\mathrm{Tr}\,\rho_m(\mathrm{Frob}_v) = \phi_{g_m}(T_v)$ が成り立つ．右辺は $\mathbb{Z}_p$ の元であったから，特に $\mathrm{Tr}\,\rho_m$ による $\Gamma_\mathbb{Q}$ の像は $\mathbb{Z}_p$ に含まれることが分かる．また，$\mathrm{Tr}\,\rho_{m+1} \equiv \mathrm{Tr}\,\rho_m \pmod{p^m}$ である．これより，連続写像 $\tau \colon \Gamma_\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_p$ であって，任意の $m \geq 0$ に対し $\tau \equiv \mathrm{Tr}\,\rho_m \pmod{p^m}$ を満たすものが存在することが分かる．τ は擬表現になるので（擬表現の定義は [Tay91, §1.1] を参照），[Tay91, Theorem 1] より，半単純連続表現 $\rho \colon \Gamma_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ であって $\mathrm{Tr}\,\rho = \tau$ を満たすものが存在する．この ρ は，任意の $m \geq 0$ および $v \in \mathcal{P}_\mathbb{Q} \setminus S$ に対し

$$\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_v) \equiv \mathrm{Tr}\,\rho_m(\mathrm{Frob}_v) = \phi_{g_m}(T_v) \equiv \phi_f(T_v) \pmod{p^m}$$

を満たすので，$\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_v) = \phi_f(T_v)$ を満たす．つまり，ρ は過収束 p 進尖点形式 f に対応する Galois 表現と言うべきものになっている．

以上の議論を一般化することで，以下の定理が得られる：

定理 4.18（[HLTT16, Corollary 6.13]） $a \in \mathbb{Q}$ に対し，

$$\Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min,\mathrm{ad}}_\infty, (\omega^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger)_{\overline{\mathbb{Q}}_p, \leq a} = \varinjlim_{K^p} \Gamma(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min,\mathrm{ad}}_{K^p}, (\omega^{\otimes k}_{K^p} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger)_{\overline{\mathbb{Q}}_p, \leq a}$$

とおく．これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)$ の許容表現である．この表現の部分商として現れる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)$ の許容表現 Π をとる．このとき，2 次元半単純連続表現 $\rho_\Pi \colon \Gamma_\mathbb{Q} \to$

$\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ であって以下の性質を満たすものが存在する：$\mathbb{Q}$ の有限素点 $v \neq p$ において Π_v が不分岐ならば，ρ_Π は v において不分岐であり，Π_v の佐武パラメータを $z_1(\Pi_v), z_2(\Pi_v)$ とすると，

$$\operatorname{Tr}\rho_\Pi(\mathrm{Frob}_v) = v^{1/2}(z_1(\Pi_v) + z_2(\Pi_v)).$$

■リジッドコホモロジー 次に，過収束 p 進尖点形式と保型表現 $\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2}$ を結び付けよう．このためにリジッドコホモロジーを用いるというのが，[HLTT16] の革新的なアイデアである．リジッドコホモロジーについてごく簡単に思い出しておこう（詳細は [LS07] 等を参照）．Y を $\mathbb{F}_p$ 上の非特異代数多様体とする．$\mathbb{Z}_p$ 上分離的，有限型かつ滑らかなスキーム X であって $Y \cong X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$ を満たすものが存在すると仮定する．このとき，リジッド空間 X^{rig} 上の過収束 j 次微分形式の層 $\Omega_X^{j,\dagger}$ $(j \geq 0)$ が自然に定まるのだった（これは 480 ページの $\mathcal{F}$ を $\Omega^j_{X/\mathbb{Z}_p}$ として得られる X^{ad} 上の層である）．過収束 de Rham 複体 $0 \to \Omega_X^{0,\dagger} \xrightarrow{d} \Omega_X^{1,\dagger} \xrightarrow{d} \cdots$ のコホモロジー $H^i(X^{\mathrm{ad}}, \Omega_X^{\bullet,\dagger})$ は，実は Y にしか依存しないことが知られている．これを $H^i_{\mathrm{rig}}(Y)$ と書き，Y の**リジッドコホモロジー**という．一般の Y に対しては上記のような X が存在するとは限らないが，その場合でも $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間 $H^i_{\mathrm{rig}}(Y)$ を定義する方法がある．$Y \mapsto H^i_{\mathrm{rig}}(Y)$ は反変関手であり，$H^i_{\mathrm{rig}}(Y)$ は有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間となる ([Ber97])．Y が $\mathbb{F}_p$ 上固有ならば，$H^i_{\mathrm{rig}}(Y)$ は Y のクリスタルコホモロジー $H^i_{\mathrm{crys}}(Y/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ と同型になる．

一般の状況でもう少し話を続けよう．$\overline{X}$ を $\mathbb{Z}_p$ 上の固有かつ滑らかなスキームとし，$D = \bigcup_{i=1}^r D_i$ を $\overline{X}$ の相対的正規交叉因子とする．すなわち，任意の部分集合 $I \subset \{1, \ldots, r\}$ に対し，$D_I = \bigcap_{i \in I} D_i$[*9] は $\mathbb{Z}_p$ 上滑らかであるとする．$\overline{X}$ の開部分スキーム X をとる（D を含まなくてもよい）．このとき，D^{ad} に沿って対数的極を持つ過収束 de Rham 複体 $\Omega_X^{\bullet,\dagger}(\log D)$ を定義することができる．さらに，D^{ad} の定義イデアルを $\mathcal{I}$ として，$\Omega_X^{\bullet,\dagger}(-\log D) = \Omega_X^{\bullet,\dagger}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}}}} \mathcal{I}$ とおく．

定義 4.19 $H^i_{c\text{-}\partial}(\overline{X}, X, D) = H^i(X^{\mathrm{ad}}, \Omega_X^{\bullet,\dagger}(-\log D))$ とおく．

これは「$X_{\mathbb{F}_p}$ の，$(X \cap D)_{\mathbb{F}_p}$ に沿ってコンパクト台を持つリジッドコホモロジー」となるべき空間であり，$X_{\mathbb{F}_p}$ および $(X \cap D)_{\mathbb{F}_p}$ のみから決まることが強く期待され

[*9] $I = \varnothing$ なら $D_I = \overline{X}$ とおく．

るが，それについては [HLTT16] では証明されていない．以下の命題は，通常の de Rham コホモロジーの場合と同様の議論で証明できる：

命題 4.20（[HLTT16, Lemma 6.21]） 次のスペクトル系列がある：

$$E_1^{i,j} = \bigoplus_{I \subset \{1,\dots,r\}, \# I = j} H^i_{\mathrm{rig}}(D_{I,\mathbb{F}_p}) \Rightarrow H^{i+j}_{c\text{-}\partial}(\overline{X}, X, D).$$

このことから特に，$H^i_{c\text{-}\partial}(\overline{X}, X, D)$ は有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間になることが分かる．

モジュラー曲線の設定に戻る．$\partial \mathrm{Sh}^{\min}_{K^p} = \mathrm{Sh}^{\min}_{K^p} \setminus \mathrm{Sh}_{K^p}$ とおき，

$$(\overline{X}, X, D) = (\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p}, \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min}_{K^p}, \partial \mathrm{Sh}^{\min}_{K^p})$$

に対応する $H^i_{c\text{-}\partial}(\overline{X}, X, D)$ を単に $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ と書く．

次の命題によって，$H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ は過収束 p 進尖点形式と結び付く．

命題 4.21 $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ は以下の複体の i 次コホモロジーである：

$$0 \to \underset{0\text{ 次}}{H^0(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min,\mathrm{ad}}_{K^p}, \mathcal{I}_\partial^\dagger)} \to \underset{1\text{ 次}}{H^0(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min,\mathrm{ad}}_{K^p}, (\omega_{K^p}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger)} \to 0.$$

証明 $\Omega_{K^p} \cong \omega_{K^p}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{I}_\partial$ より，複体 $\Omega^{\bullet,\dagger}_{\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min}_{K^p}}(-\log \partial \mathrm{Sh}^{\min}_{K^p})$ は

$$0 \to \mathcal{I}_\partial^\dagger \to (\omega_{K^p}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger \to 0$$

と書けることが容易に分かる．一方，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min}_{K^p}$ がアフィンであることから，$i \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ に対し $H^i(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min,\mathrm{ad}}_{K^p}, (\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger) = 0$ が成り立つ（[GK00, Proposition 3.1] 参照）．これらのことから主張は直ちに従う． $\square$

系 4.22 ([HLTT16, Corollary 6.23]) $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_\infty)_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \varinjlim_{K^p} H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ とおく．これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ の許容表現である．この表現の部分商として現れる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ の許容表現 Π をとる．このとき，2 次元半単純連続表現 $\rho_\Pi \colon \Gamma_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ であって以下の性質を満たすものが存在する：$\mathbb{Q}$ の有限素点 $v \neq p$ において Π_v が不分岐ならば，ρ_Π は v において不分岐であり，Π_v の佐武パラメータを $z_1(\Pi_v)$, $z_2(\Pi_v)$ とすると，

$$\operatorname{Tr} \rho_\Pi(\mathrm{Frob}_v) = v^{1/2}(z_1(\Pi_v) + z_2(\Pi_v)).$$

証明 以前と同様の方法によって，$H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ にも作用素 U_p を定義することができる．命題 4.20 より $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ は有限次元であるから，U_p は傾斜分解を

持つ．補題 4.14 と同様の議論により，U_p の $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ への作用は全射，したがって同型であることが分かるので，十分大きな $a\in\mathbb{Q}$ に対し $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\le a}=H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ が成り立つ．よって，$H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\infty})_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\le a}=\varinjlim_{K^p}H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\le a}$ とおくと，$H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\infty})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}=\bigcup_{a\in\mathbb{Q}}H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\infty})_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\le a}$ である．したがって，ある $a\in\mathbb{Q}$ が存在して，Π は $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\infty})_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\le a}$ の既約部分商となる．命題 4.21 より，ある $j\in\{0,1\}$ が存在して，Π は $H^0(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,ad}}_{\infty},(\omega^{\otimes 2j}\otimes\mathcal{I}_\partial)^\dagger)_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\le a}$ の既約部分商となる．よって定理 4.18 より主張が従う． □

この系により，保型表現 $\chi|\det|^{1/2}\boxplus\chi^{-1}|\det|^{-1/2}$ と $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\infty})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ を結び付ければよいことになる．これは命題 4.20 のスペクトル系列を用いて行うことができる．命題 4.20 のスペクトル系列は，この場合には以下の完全系列を導く．

系 4.23 次の完全系列がある：

$$H^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{F}_p})\to H^0_{\mathrm{rig}}(\partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p,\mathbb{F}_p})\to H^1_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})\to H^1_{\mathrm{rig}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{F}_p}).$$

この完全系列に $\overline{\mathbb{Q}}_p$ をテンソルして $\varinjlim_{K^p}$ をとることにより，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)$ 同変な単射

$$\mathrm{Coker}(H^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{\infty,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\to H^0_{\mathrm{rig}}(\partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{\infty,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p})\hookrightarrow H^1_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{\infty})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$$

が得られる（$H^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{\infty,\mathbb{F}_p})=\varinjlim_{K^p}H^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p,\mathbb{F}_p})$ 等とおいた）．よって，保型表現 $\chi|\det|^{1/2}\boxplus\chi^{-1}|\det|^{-1/2}$ と上記の Coker を結び付ければよい．

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)$ の表現として

$$\begin{aligned}H^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{\infty,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}&=H^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{\infty,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\cong\varinjlim_{K^p}H^0(\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)K^p}(\mathbb{C}),\mathbb{Q})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\\&\cong\bigoplus_{\xi}\xi^p_f\circ\det\end{aligned}$$

である．ただし，ξ は Hecke 指標 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\to\mathbb{C}^\times$ であって $\xi|_{\mathbb{R}_{>0}}=1$ かつ ξ_p が不分岐なもの全体を動く．

$H^0_{\mathrm{rig}}(\partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{\infty,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ を調べよう．$B\subset\mathrm{GL}_2$ を上三角行列からなる Borel 部分群とし，N をその冪単根基とする．また，T を GL_2 の対角トーラスとする．このとき，

$$\partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p,\overline{\mathbb{F}}_p}=N(\mathbb{A}_f)T(\mathbb{Q})^+\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)K^p$$

となる（[Lan73, p. 463] 参照）．これは有限個の点からなる．

$$\partial_B\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{min}}_{K^p,\overline{\mathbb{F}}_p}=N(\mathbb{A}_f)T(\mathbb{Q})^+\backslash B(\mathbb{A}_f)/(B(\mathbb{A}_f)\cap\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)K^p)$$

とおくと，これは $\partial\,\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\overline{\mathbb{F}}_p}$ の部分集合であり，さらに，自然な全射

$$\partial_B\,\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\overline{\mathbb{F}}_p} \twoheadrightarrow T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Z}_p)K^p_T = X^T_{T(\mathbb{Z}_p)K^p_T}$$

がある．ただし，K^p_T は全射 $B(\mathbb{A}^p_f) \to T(\mathbb{A}^p_f)$ による $B(\mathbb{A}^p_f) \cap K^p$ の像を表す．この記述を用いて，以下の補題を示そう．

補題 4.24 χ を定理 4.5 の通りとするとき，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)$ の既約表現 $(\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2})^p_f$ は $H^0_{\mathrm{rig}}(\partial\,\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ の部分商に現れる．

証明 有限集合 S に対し，S から $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への写像全体を $\overline{\mathbb{Q}}_p[S]$ と書くことにすると，以下の図式が得られる：

$$\overline{\mathbb{Q}}_p[X^T_{T(\mathbb{Z}_p)K^p_T}] \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p[\partial_B\,\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\overline{\mathbb{F}}_p}] \twoheadleftarrow \overline{\mathbb{Q}}_p[\partial\,\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\overline{\mathbb{F}}_p}] = H^0_{\mathrm{rig}}(\partial\,\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}.$$

$T(\mathbb{A}_f)$ の表現として $\varinjlim_{K^p} \overline{\mathbb{Q}}_p[X^T_{T(\mathbb{Z}_p)K^p_T}] = \bigoplus_{\chi_1,\chi_2} \chi^p_{1,f} \boxtimes \chi^p_{2,f}$ である．ここで，$\chi_1, \chi_2 \colon \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times = \overline{\mathbb{Q}}^\times_p$ は，$\chi_{1,\infty} = \chi_{2,\infty} = 1$ を満たし，さらに $\chi_{1,p}$, $\chi_{2,p}$ が不分岐であるような Hecke 指標を動く．特に，定理 4.5 における χ に対し，$\chi^p_f \boxtimes (\chi^p_f)^{-1}$ は $\varinjlim_{K^p} \overline{\mathbb{Q}}_p[X^T_{T(\mathbb{Z}_p)K^p_T}]$ の直和因子に現れる．$\chi^2 \neq 1$ より $\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)}_{B(\mathbb{A}^p_f)}(\chi^p_f \boxtimes (\chi^p_f)^{-1})$（Ind は正規化しない放物型誘導表現を表す）は既約なので，上の図式から，$\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)}_{B(\mathbb{A}^p_f)}(\chi^p_f \boxtimes (\chi^p_f)^{-1})$ は $H^0_{\mathrm{rig}}(\partial\,\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ の部分商に現れることが分かる．正規化に注意すると，$\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)}_{B(\mathbb{A}^p_f)}(\chi^p_f \boxtimes (\chi^p_f)^{-1})$ は $(\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2})^p_f$ に一致することが分かるのでよい． □

$(\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2})^p_f$ は $\xi^p_f \circ \det$ という形ではないので，上の補題と単射

$$\mathrm{Coker}(H^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord},\min}_{\infty,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to H^0_{\mathrm{rig}}(\partial\,\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\mathbb{F}_p})_{\overline{\mathbb{Q}}_p}) \hookrightarrow H^1_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_\infty)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$$

の存在より，$(\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2})^p_f$ は $H^1_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_\infty)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ の部分商にもなることが分かる．よって系 4.22 を $(\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2})^p_f$ に適用することができる．得られた $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元連続表現は定義 4.1 の意味で $\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2}$ に対応していることが容易に分かるので，定理 4.5 の証明が完成した．

■証明の流れ 証明の流れをまとめておこう．定理 4.5 の証明は，以下の 5 つの対象を順に結び付けることでなされた：

(a) 尖点形式
(b) 法 p^m 尖点形式の射影系
(c) 過収束 p 進尖点形式
(d)「リジッドコホモロジー」$H^i_{c\text{-}\partial}$
(e) 誘導表現 $\chi|\det|^{1/2} \boxplus \chi^{-1}|\det|^{-1/2}$（標語的には「Eisenstein 級数」）

比較の際には以下を用いた：

(a) と (b)： Hasse 不変量，および ω_{K^p} の豊富性（命題 4.17）．
(b) と (c)： $\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord},\min,\wedge}$ がアフィンであること（命題 4.11）．
(c) と (d)： 直線束の過収束切断のなす層 $(\omega_{K^p}^{\otimes k} \otimes \mathcal{I}_\partial)^\dagger$ の非輪状性（命題 4.21）．
(d) と (e)： 命題 4.20 のスペクトル系列，およびコンパクト化の境界 $\partial\,\mathrm{Sh}^{\min}_{K^p,\overline{\mathbb{F}}_p}$ が GL_2 の Levi 部分群 T の局所対称空間と繋がること．

これらの手法を高次元のユニタリ型志村多様体に適用して定理 1.3 を証明しようとすると，どのような困難が発生し，それをどうやって克服するかを次に述べる．

4.2.2 一般の場合

以下 $n \geq 2$ とし，$2n$ 次準分裂一般ユニタリ群 GU^* に対応する志村多様体を Sh_K と書く．この場合のリフレックス体は $\mathbb{Q}$ である．$\mathrm{GU}^*_{\mathrm{der}}(\mathbb{R}) \cong \prod_{v\,:\,F^+\text{ の無限素点}} \mathrm{U}(n,n)$ に注意すると，$\dim \mathrm{Sh}_K = n^2[F^+ : \mathbb{Q}]$ が分かる．ひとまず Sh_K を定める PEL データが p において不分岐であり，$K = K_{0,p}K^p$（$K_{0,p}$ は $\mathrm{GU}^*(\mathbb{Q}_p)$ の超スペシャル部分群）と分解しているとし，Sh_K の滑らかな整正準モデルを Sh_{K^p} と書く．この設定で 4.2.1 節と同様の議論を適用しようとすると，第一に，コンパクト化の性質に関する問題が発生する：

- Sh_K の最小コンパクト化 $\mathrm{Sh}_K^{\min}$ は特異点を持つ．当然，$\mathrm{Sh}_K^{\min}$ の整モデル $\mathrm{Sh}_{K^p}^{\min}$ も $\mathbb{Z}_p$ 上滑らかでない．また，境界 $\partial\,\mathrm{Sh}_K^{\min} = \mathrm{Sh}_K^{\min} \setminus \mathrm{Sh}_K$ および $\partial\,\mathrm{Sh}_{K^p}^{\min} = \mathrm{Sh}_{K^p}^{\min} \setminus \mathrm{Sh}_{K^p}$ の余次元は 1 より大きい．

このような状況であっても，過収束 p 進尖点形式は同様に定義でき，同様の手法で尖点形式と結び付けることができる．しかし，定義 4.19 に基づいてリジッドコホモロジー $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ を定義することができない．そこで，$\mathrm{Sh}^{\min}_K$ の特異点解消にあたる，Sh_K の**トロイダルコンパクト化** $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K$ を利用する．$\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K$ から $\mathrm{Sh}^{\min}_K$ へは自然な射 π があり，以下は可換になっている：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{Sh}_K \arrow[r] & \mathrm{Sh}^{\min}_K. \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K$ は特異点をもたず，また，境界 $\partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K = \mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K \setminus \mathrm{Sh}_K$ は正規交叉因子となっている．この点で $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K$ は $\mathrm{Sh}^{\min}_K$ に比べて「よい」コンパクト化になっている．その一方で，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K$ は $\mathrm{Sh}^{\min}_K$ と異なり志村データから標準的に決まるわけではなく，定義の際には補助的なデータを選ぶ必要がある．詳細は [AMRT10] を参照．$\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_K$ の整モデル $\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p}$ も [Lan13] により構成されている．これは $\mathbb{Z}_p$ 上滑らかなスキームであり，境界 $\partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p} = \mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p} \setminus \mathrm{Sh}_{K^p}$ は相対的正規交叉因子となっている．そこで，$(\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p}, \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,tor}}_{K^p}, \partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p})$ に定義 4.19 を適用して，リジッドコホモロジー $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ を定義する．

モジュラー曲線のときと同様，$H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ と過収束 p 進尖点形式を結び付ける際には，以下のコホモロジーの消滅が鍵となる：

定理 4.25（[HLTT16, Proposition 6.15]） $i \geq 1$, $k \geq 0$ に対し，

$$H^i(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,tor,ad}}_{K^p}, \Omega^{k,\dagger}_{K^p}(-\log \partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p})) = 0.$$

この定理は，$\pi\colon \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,tor}}_{K^p} \to \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min}}_{K^p}$ に関する高次順像の消滅

$$R^i\pi_*\Omega^k_{K^p}(-\log \partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p}) = 0 \quad (i \geq 1)$$

([HLTT16, Theorem 5.4]) と，$\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min,rig}}_{K^p}$（より正確には，これのダガー空間版 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,min},\dagger}_{K^p}$）がアフィノイドであること ([HLTT16, Lemma 6.11])，そしてアフィノイドに対するコホモロジーの消滅 ([GK00, Proposition 3.1]) を組み合わせて証明される．中でも [HLTT16, Theorem 5.4] は重要であるが，本サマースクールでは志村多様体のコンパクト化についてほとんど扱っていないため，説明は割愛する．

次の困難は，「リジッドコホモロジー」$H^i_{c\text{-}\partial}$ と「Eisenstein 級数」を結び付ける部分にある．モジュラー曲線のときは，命題 4.20 のスペクトル系列が系 4.23 のように完全系列になり，境界の H^0_{rig} と $H^1_{c\text{-}\partial}$ が直ちに繋がったが，高次元の場合には $i \geq 2$ に対する $H^i_{c\text{-}\partial}$ も考えなくてはならず，スペクトル系列の分析が難しくなる．この困難を，リジッドコホモロジーに対する Weil II 型定理を用いることで克服するというのが [HLTT16] の秀逸なアイデアである．リジッドコホモロジーに対する Weil II 型定理を復習しておこう：

定理 4.26（[Chi98]） Y を $\mathbb{F}_p$ 上の非特異代数多様体とし，i 次リジッドコホモロジー $H^i_{\mathrm{rig}}(Y)$ への Frobenius 作用の固有値 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ を考える．このとき，α は代数的整数であり，その全ての共役の複素絶対値は $p^{i/2}$ 以上である．

3 つ組 $(\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p}, \mathrm{Sh}^{\mathrm{ord,tor}}_{K^p}, \partial\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p})$ に対する命題 4.20 のスペクトル系列

$$E_1^{i,j} = \bigoplus_{I\subset\{1,\ldots,r\},\#I=j} H^i_{\mathrm{rig}}(\partial_I\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p,\mathbb{F}_p}) \Rightarrow H^{i+j}_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$$

を考えよう．このスペクトル系列の E_1 項には自然な Frobenius 作用がある．収束先 $H^{i+j}_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ には自然な Frobenius 作用があるかどうかは分からないが，ς が Frobenius 射の持ち上げになっていたので，ς^* によって Frobenius 作用もどきを定義する．このとき，上のスペクトル系列はこれらの作用と可換である．そこで，これらの作用による固有値の複素絶対値が 0 になる部分（重さ 0 部分）$W_0(-)$ をとる．定理 4.26 より，$i \geq 1$ に対して $W_0H^i_{\mathrm{rig}}(\partial_I\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p,\mathbb{F}_p}) = 0$ であるから，スペクトル系列が退化して，$W_0H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ は複体 $W_0E_1^{0,\bullet} = \bigoplus_{I\subset\{1,\ldots,r\},\#I=\bullet} H^0_{\mathrm{rig}}(\partial_I\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p,\mathbb{F}_p})$ の i 次コホモロジーと同型になることが分かる．つまり，$W_0H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ は，境界 $\partial_I\,\mathrm{Sh}^{\mathrm{tor}}_{K^p,\mathbb{F}_p}$ の既約成分がなす双対単体複体の i 次コホモロジーと一致する．実は，この双対単体複体の一部が $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_n$ の局所対称空間と同じホモトピー型を持つのである（[HLTT16, §5.3] 参照）．これは，[HZ94a], [HZ94b], [HZ01] 等の研究に基づいた Harris の洞察である．こうして，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の（偏極可能とは限らない）正則 C 代数的な尖点的保型表現と $H^i_{c\text{-}\partial}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{ord}}_{K^p})$ が繋がることになる．

ここまでの議論では，PEL データにおいて p が不分岐であることを仮定していた．また，定理 4.5 においてもそうであったが，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 Π が p の上にある素点において不分岐であるという仮定も必要である．これらの仮定は有限個の素数を避ければ回避できるものではあるが，[HLTT16] においては，全ての場合

を扱うため，p においてもレベルのついた志村多様体およびその整モデルを考えている．当然，この整モデルのコンパクト化の理論が必要となる．さらに，ここまでは「定数係数のリジッドコホモロジー」しか考えていないため，F の無限素点における Π の無限小指標が自明表現の無限小指標と一致する場合しか扱うことができていない．より一般の場合を扱うため，[HLTT16] においては，志村多様体上の普遍アーベル多様体を用いて構成される久賀・佐藤多様体（モジュラー曲線の場合には [Del69] や [Sch90] 等を参照）に対し，上述の議論を適用している．そのためには，（p においてレベルのついた状況で）久賀・佐藤多様体の整モデルのコンパクト化の理論が必要となる．以上で述べたようなコンパクト化の理論は [Lan18] で構築されている．ただし，[Lan18] においては，$\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{min}}$ や $\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{tor}}$ をそのままレベル付き版に拡張しているわけではなく，通常部分に制限した部分的なコンパクト化，すなわち，$\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,min}}$ や $\mathrm{Sh}_{K^p}^{\mathrm{ord,tor}}$ のレベル付き版のみを構成している点に注意しておく．久賀・佐藤多様体の整モデルのコンパクト化も，これらの部分的なコンパクト化の上でのみ行っている．

ここまでの説明は，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の正則 C 代数的な尖点的保型表現 Π に対し，いかにして $\Pi \boxplus \Pi^{c\vee}$ に対応する Galois 表現 $R_{\Pi\boxplus\Pi^{c\vee}}$ を構成するかについてのものであった．定理 1.3 の証明のためには $R_{\Pi\boxplus\Pi^{c\vee}}$ を直和分解して Π に対応する Galois 表現を取り出すことが必要になる．これは実は，Π を固定したとき，十分大きい整数 m に対して $(\Pi \otimes |\det|^m) \boxplus (\Pi \otimes |\det|^m)^{c\vee}$ に対応する Galois 表現が存在することから導くことができる．[HLTT16, §7] を参照．仮に無限素点における Π の無限小指標が自明表現の無限小指標と一致していたとしても，このように $(\Pi\otimes|\det|^m)\boxplus(\Pi\otimes|\det|^m)^{c\vee}$ を考える関係で，4.2.1 節のように「定数係数のリジッドコホモロジー」のみを用いるだけでは R_Π の構成には不十分であり，上述の久賀・佐藤多様体を考える必要がある．

4.3 Scholze の方法

本小節では，Scholze [Sch15] による手法を紹介する．これについては優れた解説 [伊藤] が既にあるので，[HLTT16] の手法と比較しつつ，ごく簡単にまとめることにする．

以下では，GU^* の志村多様体の代わりに，$\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U}^*$ の局所対称空間 $X_K = X_K^{\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U}^*}$ を考える（U^* は F/F^+ に関する $2n$ 次準分裂ユニタリ群であった）．

X_K は連結志村多様体（[今井, §7] 参照）となり，特に $\mathbb{Q}$ の最大アーベル拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上定義される代数多様体の構造を持つ（これは前小節で考えていた志村多様体の連結成分になる）．以下では，この代数多様体を X_K と表し，もとの X_K は $X_K(\mathbb{C})$ と表すことにする．

Scholze の方法では，p 進保型形式の空間として，次の完備化コホモロジーを採用する：

定義 4.27 $(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U}^*)(\mathbb{A}_f^p)$ のコンパクト開部分群 K^p に対し

$$\widetilde{H}^i_{c,K^p}(\mathbb{Z}/p^m) = \varinjlim_{K_p} H^i_c(X_{K_pK^p}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}),$$
$$\widetilde{H}^i_{c,K^p}(\mathbb{Z}_p) = \varprojlim_{m} \widetilde{H}^i_{c,K^p}(\mathbb{Z}/p^m)$$

とおき，これらを**完備化コホモロジー**と呼ぶ．ただし，上の式において K_p は $(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U}^*)(\mathbb{Q}_p)$ のコンパクト開部分群を動き，$H^i_c(X_{K_pK^p}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ は Betti コホモロジーを表す．

(a) $\mathrm{U}^*(\mathbb{A}_{F^+})$ 上の正則尖点形式
(b) $\widetilde{H}^*_{c,K^p}(\mathbb{Z}_p)$
(c) $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_n$ の局所対称空間

を順に結び付けることで，4.2 節と同様に定理 1.3 を証明する．

(b) と (c) の比較には，$X_{K_pK^p}(\mathbb{C})$ の **Borel-Serre コンパクト化** $X_{K_pK^p}(\mathbb{C})^{\mathrm{BS}}$ ([BS73]) を用いる．これは代数多様体ではなく位相空間としてのコンパクト化であり，$X_{K_pK^p}(\mathbb{C})$ と $X_{K_pK^p}(\mathbb{C})^{\mathrm{BS}}$ がホモトピー同値であるという特徴を持つ．GL_2 の場合で言うと，複素上半平面の商 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}_1^+$ の各カスプにおいて，一点を付け加えてコンパクト化する代わりに，S^1 を貼り付けてコンパクト化したものである．コンパクト化の境界 $X_{K_pK^p}(\mathbb{C})^{\mathrm{BS}} \setminus X_{K_pK^p}(\mathbb{C})$ は $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_n$ の局所対称空間と関係することがすぐに分かるので，切除完全系列と Poincaré 双対定理を用いた簡単な議論により，(b) と (c) が結び付くことが分かる．この部分が簡単であるのは，完備化コホモロジーが位相的な定義を持つためである．

(a) と (b) を結び付けるには，尖点形式という解析的な対象と，完備化コホモロジーという位相的な対象を関係付けなくてはならない．その役割を果たすのが，以下の Scholze による比較定理である：

定理 4.28（[Sch13a, Theorem 5.1], [Sch13b, Theorem 3.13]） 概 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 加群としての同型

$$H_c^i(X_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p^m \stackrel{a}{\cong} H^i(X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}, \mathcal{I}^+/p^m)$$

がある．ここで，$X^{\min}_{K_pK^p}$ は $X_{K_pK^p}$ の最小コンパクト化を表す．$\mathcal{I}$ は $\partial X^{\min}_{K_pK^p} = X^{\min}_{K_pK^p} \setminus X_{K_pK^p}$ が定める $X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}$ の閉部分リジッド空間 $\partial X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}$ の定義イデアルを表し，$\mathcal{I}^+ = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}^+_{X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}}$ は $\mathcal{I}$ の元のうち「有界なもの」のなす層を表す．

同型の左辺に現れる $H_c^i(X_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ はエタールコホモロジーである．エタールコホモロジーと Betti コホモロジーの比較定理より，

$$H_c^i(X_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \cong H_c^i(X_{K_pK^p}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$$

が成り立つことをまず注意しておく．

次に，定理 4.28 における「概 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 加群としての同型」を簡単に説明する．$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ と書く．$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 加群の準同型 $f\colon M \to N$ が概同型 (almost isomorphism) であるとは，$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p} \operatorname{Ker} f = \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p} \operatorname{Coker} f = 0$ が成り立つことをいう．$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}^2 = \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ に注意すると，概同型と概同型の合成はまた概同型となる．$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 加群の圏を，概同型が同型となるように局所化して得られる圏を「概 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 加群の圏」と呼ぶ．定理 4.28 は，$\stackrel{a}{\cong}$ の両辺にある 2 つの $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 加群をこの圏の対象と見たときに同型であることを主張している．

定理 4.28 の同型の K_p に関する帰納極限をとることで，完備化コホモロジー $\widetilde{H}^i_{c,K^p}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ が $\varinjlim_{K_p} H^i(X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}, \mathcal{I}^+/p^m)$ と繋がることが分かる．これを尖点形式と関連付けるために，

$$\widetilde{X}^{\min}_{K^p} = \varprojlim_{K_p} X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}$$

が $\mathbb{C}_p$ 上のパーフェクトイド空間の構造を持つことを用いる[*10]．パーフェクトイド空間とは，このように被覆の射影極限として得られるような，有限性のない p 進解析空間を扱うための枠組みであるが，ここでは説明しない．[津嶋] や [伊藤] をご覧いた

*10 [Sch15] においては，最小コンパクト化 $X^{\min}_{K_pK^p}$ ではなく，それを少し変更したものを考えている ([Sch15, §4.1] を参照)．しかし，その後 [BS, Theorem 1.16 (1)] により，この変更は不要であることが明らかになった．[CS, Theorem 2.6.2] を参照．

だきたい．$\widetilde{X}^{\min}_{K^p}$ を用いると，

$$\varinjlim_{K_p} H^i(X^{\min,\mathrm{ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}, \mathcal{I}^+/p^m) \cong H^i(\widetilde{X}^{\min}_{K^p}, \mathcal{I}^+/p^m)$$

と書き直すことができる．

右辺の計算の鍵となるのが，Hodge-Tate 周期写像 $\pi_{\mathrm{HT}}\colon \widetilde{X}^{\min}_{K^p} \to \mathcal{F}\ell^{\mathrm{ad}}$ である．ここで，$\mathcal{F}\ell$ は $\mathbb{C}_p$ 上の適切な旗多様体であり，$\mathcal{F}\ell^{\mathrm{ad}}$ はそれを $\mathbb{C}_p$ 上のリジッド空間と見たものである．モジュラー曲線の場合，すなわち SL_2 の局所対称空間の場合に，これがどのような写像であるかを簡単に説明しよう．この場合の $\mathcal{F}\ell$ は射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathrm{Proj}\,\mathbb{C}_p[s_1, s_2]$ である．$\widetilde{X}^{\min}_{K^p}$ のカスプでない $\mathbb{C}_p$ 値点は，$\mathbb{C}_p$ 上の楕円曲線 E, K^p レベル構造 η^p，そして p における無限レベル構造 $\eta_p\colon \mathbb{Z}_p^2 \xrightarrow{\cong} T_pE$ からなる 3 つ組 (E, η^p, η_p) を定める[*11]．p 進 Hodge 理論により，E は以下のような Hodge-Tate 完全系列を持つ：

$$0 \to (\mathrm{Lie}\,E)(1) \to T_pE \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p \to (\mathrm{Lie}\,E^\vee)^\vee \to 0.$$

同型 $\eta_{p,\mathbb{C}_p}\colon \mathbb{C}_p^2 \xrightarrow{\cong} T_pE \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p$ で $(\mathrm{Lie}\,E)(1) \hookrightarrow T_pE \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p$ を引き戻すことで，$\mathbb{C}_p^2$ の 1 次元部分空間が決まる．これに対応する $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ の点が $\pi_{\mathrm{HT}}(E, \eta^p, \eta_p)$ である．カスプに対する説明は省略する．

$\pi_{\mathrm{HT}}\colon \widetilde{X}^{\min}_{K^p} \to \mathcal{F}\ell^{\mathrm{ad}}$ は単なる写像ではなく，adic 空間の射になっていることが証明できる．$\mathcal{F}\ell^{\mathrm{ad}}$ のアフィノイドによる開被覆 $\{U_j\}_{j\in J}$ をとり，$V_j = \pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(U_j)$ とおく．また，$I \subset J$ に対し，$V_I = \bigcap_{j\in I} V_j$ とおく．$\{V_j\}_{j\in J}$ を適切にとることで（モジュラー曲線のときは，$\mathbb{P}^{1,\mathrm{ad}}$ を 2 つの開円盤 $|s_1| \le |s_2|$, $|s_2| \le |s_1|$ で覆えばよい），任意の $\varnothing \ne I \subset J$ に対し，V_I がアフィノイドパーフェクトイド空間となることが示せる．この V_I に対し，以下の非輪状性が成り立つ：

定理 4.29（[Sch15, p. 1029]） $i \ge 1$ および $\varnothing \ne I \subset J$ に対し，$H^i(V_I, \mathcal{I}^+/p^m) \overset{a}{\cong} 0$ である．

この定理から，コホモロジー $H^i(\widetilde{X}^{\min}_{K^p}, \mathcal{I}^+/p^m)$ を被覆 $\{U_j\}_{j\in J}$ に関する Čech コホモロジーで計算できることが分かる．これで完備化コホモロジーが $\Gamma(V_I, \mathcal{I}^+/p^m)$ の元，すなわち「関数」と繋がった．

[*11] ここでは連結なモジュラー曲線を考えているので，E の Weil ペアリングと η_p の関係についての条件がつくが，それは π_{HT} には反映されないので，説明は省略する．

V_I は p において「無限レベル」の空間なので, $\Gamma(V_I, \mathcal{I}^+/p^m)$ の元は「関数」とは言ってもまだ尖点形式とはほど遠い．そこで，次は $\Gamma(V_I, \mathcal{I}^+/p^m)$ を有限レベルの言葉で書き直す．詳細は省くが, 十分小さい各コンパクト開部分群 $K_p \subset (\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} \mathrm{U}^*)(\mathbb{Q}_p)$ に対し，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 上の形式スキーム $\mathfrak{X}_{K_p}$ およびその開被覆 $\{\mathfrak{V}_{j,K_p}\}_{j\in J}$，$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{K_p}}$ のイデアル $\mathfrak{I}_{K_p}$ であって，以下を満たすものを構成することができる：

- $\mathfrak{X}_{K_p}$ のリジッド一般ファイバーは $X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}$ と同型である．
- 上記の同型による $\mathfrak{V}_{j,K_p}$ のリジッド一般ファイバーの像を V_{j,K_p} と書くと，その $\widetilde{X}^{\mathrm{min}}_{K^p} \to X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}$ による逆像は V_j と一致する．
- $\mathfrak{I}_{K_p}$ が誘導する $\mathcal{O}^+_{X^{\mathrm{min,ad}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}}$ のイデアルは $\mathcal{I}^+$ と一致する．

$\mathfrak{X}_{K_p}$ は，[Sch15, §2.1] にある一般論を適用して抽象的に定まる形式スキームであり，普通に考える $X_{K_pK^p}$ の整モデルとはかけ離れたものとなっている．

この設定で $\Gamma(V_I, \mathcal{I}^+/p^m) \cong \varinjlim_{K_p} \Gamma(\mathfrak{V}_{I,K_p}, \mathfrak{I}_{K_p}/p^m)$ となるので（V_I と同様，$\mathfrak{V}_{I,K_p} = \bigcap_{j\in I} \mathfrak{V}_{j,K_p}$ と定めた)，$\Gamma(\mathfrak{V}_{I,K_p}, \mathfrak{I}_{K_p}/p^m)$ の元と尖点形式を関係付ければよい．ここまで来ると，状況は命題 4.17 と同様である．「偽 Hasse 不変量」というものを Hasse 不変量の代わりに用いることで，関数 $f \in \Gamma(\mathfrak{V}_{I,K_p}, \mathfrak{I}_{K_p}/p^m)$ の極を解消して $\Gamma(\mathfrak{X}_{K_p}, (\omega^{\otimes k}_{K_pK^p} \otimes \mathfrak{I}_{K_p})_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}})$ $(k \gg 0)$ の元へと延長し，さらに $\omega_{K_pK^p}$ の豊富性を用いて $\Gamma(\mathfrak{X}_{K_p}, \omega^{\otimes k}_{K_pK^p} \otimes \mathfrak{I}_{K_p})$ の元 g へと持ち上げることができる．ここで，$\omega_{K_pK^p}$ は 4.2.1 節で考えた ω_{K^p} の一般化にあたる直線束である．最後に，GAGA 型の同型

$$\Gamma(\mathfrak{X}_{K_p}, \omega^{\otimes k}_{K_pK^p} \otimes \mathfrak{I}_{K_p}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \mathbb{C}_p \cong \Gamma(X^{\mathrm{min}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K_pK^p} \otimes \mathcal{I}_{K_pK^p})$$

を使うことで，g が尖点形式を与えることが分かる．ただし，右辺の $\mathcal{I}_{K_pK^p}$ は最小コンパクト化の境界 $\partial X^{\mathrm{min}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p} \subset X^{\mathrm{min}}_{K_pK^p,\mathbb{C}_p}$ の定義イデアルである．これで完備化コホモロジーが尖点形式と結び付いた．

上で用いた「偽 Hasse 不変量」の定義は非常に簡単である．これもモジュラー曲線の場合に説明しよう．以前の通り $\mathbb{P}^1 = \mathrm{Proj}\,\mathbb{C}_p[s_1, s_2]$ と書くと，$s_1, s_2 \in \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$ である．これを Hodge-Tate 周期写像 $\pi_{\mathrm{HT}} \colon \widetilde{X}^{\mathrm{min}}_{K^p} \to \mathbb{P}^{1,\mathrm{ad}}$ で引き戻したもの $\pi^*_{\mathrm{HT}}(s_i)$ が偽 Hasse 不変量である．この場合，$\pi^*_{\mathrm{HT}}\mathcal{O}(1)$ は $\widetilde{X}^{\mathrm{min}}_{K^p} \to X^{\mathrm{min}}_{K_pK^p}$ による ω_{K^p} の逆像になるから，偽 Hasse 不変量は $\Gamma(\widetilde{X}^{\mathrm{min}}_{K^p}, \omega_{K^p})$ の元である．形式スキーム $\mathfrak{X}_{K_p}$ をうまくとっておくことで，$\pi^*_{\mathrm{HT}}(s_i)$ は $\Gamma(\mathfrak{X}_{K_p}, \omega_{K_pK^p})$ の元の引き戻しで得られるようにできる．上記の議論で用いられているのは，この $\Gamma(\mathfrak{X}_{K_p}, \omega_{K_pK^p})$

の元である．

Scholze は上記の方法を用いて，定理 1.3 だけではなく，以下の定理も証明した．

定理 4.30（[Sch15，Theorem 5.4.1]） F を総実体または CM 体とする．K を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{F,f})$ のコンパクト開部分群とし，局所対称空間 $X_K^{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n}$ を考える．F の素点からなる有限集合 S を十分大きくとると，$H^i(X_K^{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n}, \mathbb{F}_p)$*12への不分岐 Hecke 環 $\mathbb{T}^S$（483 ページと同様に定義する）の作用の各固有値 $\phi\colon \mathbb{T}^S \to \overline{\mathbb{F}}_p$ に対し，それと対応する Frobenius 固有値を持つ n 次元半単純連続表現 $\Gamma_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ が存在する．

この定理は，Galois 表現の保型性問題に対する最近の進展の鍵の一つとなっている（[ACC+] を参照）．

■**謝辞**　原稿に有益なコメントをくださった今井直毅氏，越川皓永氏，清水康司氏，時本一樹氏に感謝いたします．

参考文献

[ACC+] P. B. Allen, F. Calegari, A. Caraiani, T. Gee, D. Helm, B. V. Le Hung, J. Newton, P. Scholze, T. Taylor, and J. A. Thorne, *Potential automorphy over CM fields*, arXiv:1818.09999.

[AMRT10] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y.-S. Tai, *Smooth compactifications of locally symmetric varieties*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, With the collaboration of Peter Scholze.

[BC05] N. Bergeron and L. Clozel, *Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques*, Astérisque (2005), no. 303, xx+218.

[Ber97] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Invent. Math. **128** (1997), no. 2, 329–377, With an appendix in English by Aise Johan de Jong.

*12 ここでは定数係数コホモロジーのみを考えるが，局所系による係数がついていてもよい．

[BS] B. Bhatt and P. Scholze, *Prisms and Prismatic Cohomology*, arXiv:1905.08229.

[BS73] A. Borel and J.-P. Serre, *Corners and arithmetic groups*, Comment. Math. Helv. **48** (1973), 436–491.

[CH13] G. Chenevier and M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations, II*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 53–73.

[Chi98] B. Chiarellotto, *Weights in rigid cohomology applications to unipotent F-isocrystals*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 5, 683–715.

[CHL11a] L. Clozel, M. Harris, and J.-P. Labesse, *Endoscopic transfer*, On the stabilization of the trace formula, Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl., vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 475–496.

[CHL11b] ———, *Construction of automorphic Galois representations, I*, On the stabilization of the trace formula, Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl., vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 497–527.

[CHT08] L. Clozel, M. Harris, and R. Taylor, *Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l Galois representations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2008), no. 108, 1–181, With Appendix A, summarizing unpublished work of Russ Mann, and Appendix B by Marie-France Vignéras.

[Clo90] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 77–159.

[Clo91] ———, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* $\mathrm{GL}(n)$, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 73, 97–145.

[Clo11] ———, *Identités de caractères en la place archimédienne*, On the stabilization of the trace formula, Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl., vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 351–367.

[CS] A. Caraiani and P. Scholze, *On the generic part of the cohomology of* *non-compact unitary Shimura varieties*, arXiv:1909.01898.

[Del69] P. Deligne, *Formes modulaires et representations ℓ-adiques*, Séminaire Bourbaki, 21ème année (1968/69), Exp. No. 355, 1969.

[GGP12] W. T. Gan, B. H. Gross, and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Astérisque (2012), no. 346, 1–109, Sur les conjectures de Gross et Prasad. I.

[GK00] E. Grosse-Klönne, *Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 73–95.

[HLTT16] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor, and J. Thorne, *On the rigid cohomology of certain Shimura varieties*, Res. Math. Sci. **3** (2016), Paper No. 37, 308.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[HZ94a] M. Harris and S. Zucker, *Boundary cohomology of Shimura varieties. I. Coherent cohomology on toroidal compactifications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 3, 249–344.

[HZ94b] ———, *Boundary cohomology of Shimura varieties. II. Hodge theory at the boundary*, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 243–308.

[HZ01] ———, *Boundary cohomology of Shimura varieties. III. Coherent cohomology on higher-rank boundary strata and applications to Hodge theory*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2001), no. 85, vi+116.

[JS81] H. Jacquet and J. A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic forms. II*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 4, 777–815.

[JT20] C. Johansson and J. A. Thorne, *On subquotients of the étale cohomology of Shimura varieties*, Shimura Varieties, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2020, pp. 306–334.

[KMSW] T. Kaletha, A. Minguez, S. W. Shin, and P.-J. White, *Endoscopic Classification of Representations: Inner Forms of Unitary Groups*, arXiv:1409.3731.

[Kot86] R. E. Kottwitz, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), no. 3, 365–399.

[Lab11] J.-P. Labesse, *Changement de base CM et séries discrètes*, On the stabilization of the trace formula, Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl., vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 429–470.

[Lan73] R. P. Langlands, *Modular forms and ℓ-adic representations*, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), 1973, pp. 361–500. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[Lan13] K.-W. Lan, *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, London Mathematical Society Monographs, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, 2013.

[Lan18] ———, *Compactifications of PEL-type Shimura varieties and Kuga families with ordinary loci*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2018.

[LS07] B. Le Stum, *Rigid cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 172, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Mok15] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **235** (2015), no. 1108, vi+248.

[NP] A. Nair and D. Prasad, *Cohomological representations for real reductive groups*, arXiv:1904.00694.

[Sch90] A. J. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 419–430.

[Sch13a] P. Scholze, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77 pp.

[Sch13b] ———, *Perfectoid spaces: a survey*, Current developments in mathematics 2012, Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 193–227.

[Sch15] ———, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Ann. of Math. (2) **182** (2015), no. 3, 945–1066.

[Shi11] S. W. Shin, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 3, 1645–1741.

[Sor20] C. M. Sorensen, *A patching lemma*, Shimura Varieties, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2020, pp. 297–305.

[Tay91] R. Taylor, *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 281–332.

[VZ84] D. A. Vogan, Jr. and G. J. Zuckerman, *Unitary representations with nonzero cohomology*, Compositio Math. **53** (1984), no. 1, 51–90.

[伊藤] 伊藤哲史，Perfectoid 空間論の整数論への応用，代数的整数論とその周辺 2014，RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B64, 2017, pp. 255–293.

[今井] 今井直毅，志村多様体入門，本報告集.

[大島] 大島芳樹，Hermite 対称領域の数論的商と保型形式，本報告集.

[清水] 清水康司，志村多様体の整モデル，本報告集.

[津嶋] 津嶋貴弘，Perfectoid 空間論の基礎，代数的整数論とその周辺 2014，RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B64, 2017, pp. 219–253.

[中村] 中村健太郎，p-進保型形式と志村多様体，本報告集.

[三枝 1] 三枝洋一，$\mathrm{GL}(n)$ の局所ラングランズ対応，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2013.

[三枝 2] 三枝洋一，志村多様体のエタールコホモロジー，本報告集.

[三枝 3] 三枝洋一，Arthur 分類とその応用，`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/pdf/Arthur-classification.pdf`，RIMS 講究録別冊「代数的整数論とその周辺 2016」より出版予定.