志村多様体のエタールコホモロジー

三枝 洋一 *

1 はじめに

本稿では，志村多様体のエタールコホモロジーについて考察する．以下では，(G,X) を志村データとする．(G,X) に伴う志村多様体 $\{\mathrm{Sh}_K(G,X)\}_{K\subset G(\mathbb{A}_f)}$ は，エルミート対称領域 X の数論的商の直和

$$\{G(\mathbb{Q})\backslash(X\times G(\mathbb{A}_f)/K)\}_{K\subset G(\mathbb{A}_f)}$$

を $\mathbb{C}$ 値点に持ち，G の保型形式と深く関係しているのであった．その現れの一つとして，$\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の Betti コホモロジーの帰納極限 $\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ には $G(\mathbb{A}_f)$ が作用し，少なくとも $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ がコンパクトな場合には，$G(\mathbb{A})$ の保型表現を用いて $\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ を記述することができるのであった（松島・村上の公式，[大島, §4] 参照）．なお，ここでは簡単のため定数層 $\mathbb{C}$ を係数とする Betti コホモロジーのみを考えるが，[今井, §9.1] で構成されている局所系を係数とするコホモロジーを考えることもできる．

一方で，正準モデルの理論（[今井] 参照）によって，志村多様体 $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ は (G,X) のリフレックス体 E 上の代数多様体とみなせるのであった．このことから，素数 ℓ に対する ℓ 進エタールコホモロジー $\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)\otimes_E\overline{E},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を考えることができ，その上には $G(\mathbb{A}_f)$ および E の絶対 Galois 群 Γ_E が作用する．これらの作用は互いに可換であるから，$\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)\otimes_E\overline{E},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は $G(\mathbb{A}_f)\times\Gamma_E$ の表現となる．この表現を理解することが基本的な目標である．

Betti コホモロジーとエタールコホモロジーの比較定理より，同型 $\iota\colon\overline{\mathbb{Q}}_\ell\xrightarrow{\cong}\mathbb{C}$ を

* 東京大学大学院数理科学研究科　e-mail: mieda@ms.u-tokyo.ac.jp

固定すると，$G(\mathbb{A}_f)$ の表現としての同型

$$\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)\otimes_E \overline{E}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell,\iota}\mathbb{C}\cong \varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}),\mathbb{C})$$

が得られる．このことから，$G(\mathbb{A}_f)$ の $\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)\otimes_E \overline{E}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ への作用は，$G(\mathbb{A})$ の保型表現と深く関わっていることが分かる．その一方で，Γ_E の $\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)\otimes_E \overline{E}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ への作用は，$\mathbb{C}$ 値点を見るだけでは全く理解することのできない，謎めいたものとなっている．

最も基本的な志村多様体の例である，モジュラー曲線の場合（$(G,X)=(\mathrm{GL}_2,\mathfrak{H}_1^{\pm})$ の場合）を考えてみよう．この場合，エタールコホモロジーの変種である交叉コホモロジー $\varinjlim_K IH^1(\mathrm{Sh}_K(G,X)\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$（この場合には，$\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の自然なコンパクト化のエタールコホモロジーと一致する）を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)\times\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の作用で分解すると，大雑把には以下のような形になっていることが証明できる（正確な主張は定理 4.6 を参照）：

$$\varinjlim_K IH^1(\mathrm{Sh}_K(G,X)\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\bigoplus_{\pi}\pi_f\otimes\rho_\pi^\vee.$$

ここで，π は重さ 2 の尖点形式に対応する保型表現を動き，π_f は π の有限部分を表し，ρ_π は π に付随する $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元 ℓ 進表現を表す．つまり，モジュラー曲線の 1 次交叉コホモロジーを分解すると，重さ 2 の尖点形式に対応する Langlands 対応が現れるのである．これは，Eichler，志村，Deligne による，楕円モジュラー形式に伴う Galois 表現の構成方法に他ならない（Deligne による，重さが 3 以上の尖点形式に付随する Galois 表現の構成には，GL_2 の既約代数的表現に伴うエタール局所系を係数とした交叉コホモロジーを考える必要がある）．

この現象を，高次元の志村多様体に対しても一般化したいと考えるのは自然なことであろう．しかし，少しサイズを大きくした $(G,X)=(\mathrm{GSp}_4,\mathfrak{H}_2^{\pm})$ の場合でも，状況はそれほど単純ではない．基本的には，志村データ (G,X) および $G(\mathbb{A})$ の保型表現 π から Galois 表現 $\rho_{(G,X),\pi}$ を出力する（現時点では conjectural な）仕組みがあり，中間次元の交叉コホモロジー $IH^{\dim\mathrm{Sh}_K(G,X)}$ の中に $\pi_f\otimes\rho^\vee_{(G,X),\pi}$ が現れるというふうになっていてほしいのであるが，保型表現 π によっては，$\rho^\vee_{(G,X),\pi}$ の直和成分しか $IH^{\dim\mathrm{Sh}_K(G,X)}$ に現れなかったり，$\rho^\vee_{(G,X),\pi}$ の別の直和成分が中間次元以外の交叉コホモロジーに現れたりする．これは，$G(\mathbb{A})$ の保型表現に対する Arthur 分類やエンドスコピーの理論と密接に関係した現象であり，それを正確に把握するためには保型表現論に対する知識が少なからず必要となる．本稿では，$(G,X)=(\mathrm{GSp}_4,\mathfrak{H}_2^{\pm})$

の例を中心に，モジュラー曲線以外の場合にはどのような現象が起こるのか，そして，なぜそのような現象が起こるのかをできるだけ分かりやすく説明することを目指した．なお，モジュラー曲線のエタールコホモロジーを用いて楕円モジュラー形式に伴う Galois 表現が構成され，Ramanujan 予想が解決に導かれたように，高次元の志村多様体のエタールコホモロジーを正確に把握することによって，GL_n $(n \geq 3)$ の大域 Langlands 対応に大きな進展をもたらすことができる．これについては [三枝 3] で解説を行う．

志村多様体のエタールコホモロジーないし交叉コホモロジーを分析するための手段についても触れておこう．一般に，代数体 F 上の代数多様体 X のエタールコホモロジーとして得られる Galois 表現を分析する方法として，F の整数環 $\mathcal{O}_F$ 上の X の整モデル $\mathfrak{X}$ をとり，$\mathfrak{X}$ がよい還元を持つような有限素点 v における還元を考えるというものがある（[三枝 1, §3] を参照）．志村多様体の整モデルについては，整正準モデルの理論（[清水] 参照）があるので，これを適用することになる．Eichler，志村，Deligne によるモジュラー曲線の研究においては，整正準モデル上のある種の Hecke 対応の還元を考え，それが整正準モデルの還元の Frobenius 射のグラフと関係することに注目した（Eichler・志村の合同関係式）．Carayol [Car86] による志村曲線の研究，Taylor [Tay93] による Siegel threefold の研究においても類似の方法が用いられているが，よりサイズの大きな群 G に対する志村多様体の場合には，この手法を適用することは難しいと思われている．G のサイズに依存せずに適用可能な方法として，Lefschetz 跡公式を用いるものがある．これは，整正準モデルの還元への (Hecke 対応) $\circ$ (Frobenius 射) の作用の固定点の個数 (Lefschetz 数と呼ぶ) を数え，Lefschetz 跡公式を用いてエタールコホモロジーへの (Hecke 作用) $\circ$ (Frobenius 作用) のトレースを求めるというものである．[清水] にあるように，整正準モデルはしばしば構造付きアーベル多様体のモジュライ空間として得られるが，その場合には，固定点の個数を数えることは，有限体上のアーベル多様体である種の条件を満たすものの個数を求めることに相当する．これを実行すると，軌道積分の和が出てくるので，保型表現への Hecke 作用素のトレースを軌道積分の和で表す Arthur-Selberg 跡公式と組み合わせることで，エタールコホモロジーへの (Hecke 作用) $\circ$ (Frobenius 作用) のトレースと保型表現への Hecke 作用素のトレー

スを比較することができるという寸法である．図にまとめると，次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\text{エタールコホモロジーのトレース} \arrow[r, equal, "\text{Lefschetz 跡公式}"] & \text{固定点の個数} \arrow[d, equal, "\text{アーベル多様体の数え上げ}"] \\
\text{保型表現のトレース} \arrow[r, equal, "\text{Arthur-Selberg 跡公式}"] & \text{軌道積分の和}
\end{tikzcd}
$$

この手法は，伊原（[Iha67][*1], [Iha68a], [Iha68b], [Iha69] 等），Langlands（[Lan76], [Lan77], [Lan79] 等）らの研究を受けて，Kottwitz が [Kot90] や [Kot92] を含む一連の研究において確立したものである．本稿で紹介するのもこちらの方法である．

本稿の構成について述べる．まず 2 節では，保型表現に対する用語を簡単に復習し，本稿で用いる Arthur-Selberg 跡公式について述べる．Arthur-Selberg 跡公式については膨大な理論があり，説明を書き始めるときりがないため，本稿では非常に簡単な形の単純跡公式のみを用いることにした．3 節では，$\mathbb{C}$ 上における交叉コホモロジーと保型表現の関係について紹介を行う．これは [大島] にある松島・村上の公式の一般化にあたるものである．4 節では，[津嶋] で行われたモジュラー曲線の Lefschetz 数の計算と Arthur-Selberg 跡公式を用いて，モジュラー曲線の交叉コホモロジーを決定する．この後は，Siegel threefold の話に移る．5 節では，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の保型表現で中心指標が自明であるもの，すなわち，$\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{A})$ の保型表現に対する Arthur 分類を紹介する．そして，その分類結果に基づき，6 節では，Siegel threefold の交叉コホモロジーの記述に関する定理を述べる．7 節では，より一般の志村多様体の交叉コホモロジーに対する Kottwitz の予想を述べる．初学者は，ここまで読めば十分に状況を把握できると思われる．8 節以降では，6 節で述べた定理の証明を扱う．8 節では，PEL 型志村多様体の整正準モデルに対して Lefschetz 数の計算を行う．まず [Kot92] に沿って Lefschetz 数を軌道積分で表示し，さらに [Kot90] に沿ってその結果をエンドスコピー群の安定軌道積分で書き直すという作業を行う．この節の内容が理論の核心であり，できるだけ丁寧な記述を心がけた結果，かなり長くなってしまった．9 節では，Lefschetz 数の表示と合わせて，Arthur-Selberg 跡公式の軌道積分側をエンドスコピー群の安定軌道積分で書き直す．最後に 10 節で，Siegel threefold の交叉コホモロジーに関する定理の証明を完成させる．

[*1] この論文に関連する和文の文献として，[佐藤] もある（初出は『数学の歩み』10 巻 2 号，1963 年）．歴史的経緯は [Iha67, Introduction] を参照されたい．

■記号

- 環 A 上の対象 X および A 代数 B に対し，X の B への底変換を X_B と表す．
- 体 F に対し，その分離閉包を $\overline{F}$ で表し，絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を Γ_F で表す．
- $\mathbb{Q}$ の素点の集合を $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ で表す．すなわち，$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ である．
- $\mathbb{Q}$ のアデール環 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ を単に $\mathbb{A}$ で表す．また，$\mathbb{A}_f = \prod'_{v\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\setminus\{\infty\}} \mathbb{Q}_v$ で有限アデール環を表す．S を $\mathbb{Q}$ の有限素点の有限集合とするとき，$\mathbb{A}_f^S = \prod'_{v\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\setminus\{\infty\}, v\notin S} \mathbb{Q}_v$ とおく．$S=\{p_1,\ldots,p_r\}$ のとき，$\mathbb{A}_f^S$ のことを $\mathbb{A}_f^{p_1,\ldots,p_r}$ とも書く．$\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{v\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\setminus\{\infty\}} \mathbb{Z}_v$ とおき，同様に $\widehat{\mathbb{Z}}^S = \prod_{v\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\setminus\{\infty\}, v\notin S} \mathbb{Z}_v$ と定める．
- G を局所体 F 上の簡約代数群とするとき，$G(F)$ 上のコンパクト台を持つ複素数値スムーズ関数全体を $\mathcal{H}(G(F))$ と書く．$G(F)$ の Haar 測度を固定すると，$\mathcal{H}(G(F))$ は畳み込み積によって環となる．F が非アルキメデス的であり，K が $G(F)$ のコンパクト開部分群であるとき，両側 K 不変な $\mathcal{H}(G(F))$ の元全体を $\mathcal{H}(G(F),K)$ で表す．$\mathcal{H}(G(F),K)$ は $\mathrm{vol}(K)^{-1}\mathbf{1}_K$ を単位元とする $\mathbb{C}$ 代数となる（$\mathbf{1}_K$ は K の特性関数を表す)．
- 整数 $n \geq 1$ に対し，n 次単位行列を I_n で表す．また，n 次正方行列 Φ_n を
$$\Phi_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{n-1} & & & \end{pmatrix}$$
で定める．

2　保型表現

2.1　保型表現の復習

本節ではまず，保型表現に関して簡単に復習する．ここでは，志村多様体の交叉コホモロジーと関係の深い，離散的な保型表現に絞って解説を行う．G を $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群とする．G の中心を Z_G と書き，Z_G の極大分裂トーラスを A_G とおく．$A_G(\mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分を $A_G(\mathbb{R})^+$ で表す．$G(\mathbb{A})^1 = \bigcap_{\chi\in X^*(G)_{\mathbb{Q}}} \mathrm{Ker}|\chi|$ とおく．ここで，$X^*(G)_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された指標 $G \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 全体を表し，$|\chi|$ は χ とイデールノルムとの合成 $G(\mathbb{A}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{A}^\times \xrightarrow{|-|} \mathbb{R}_{>0}$ を表す．このとき，自然な同型

$G(\mathbb{A})^1 \times A_G(\mathbb{R})^+ \xrightarrow{\cong} G(\mathbb{A}); (g,a) \mapsto ga$ がある．$G(\mathbb{Q})$ は $G(\mathbb{A})^1$ の離散部分群であり，$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ は体積有限である．

測度の正規化について述べておこう．$G(\mathbb{A})$ の測度として玉河測度をとる．また，同型 $X_*(A_G) \cong \mathbb{Z}^r$ を固定し，$A_G(\mathbb{R})^+ \xrightarrow[\cong]{(1)} \mathrm{Hom}(X^*(A_G),\mathbb{R}) \cong X_*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \overset{(2)}{\cong} \mathbb{R}^r$ によって $\mathbb{R}^r$ の Lebesgue 測度から誘導される測度を $A_G(\mathbb{R})^+$ に入れる．ただし，(1) は $a \mapsto (\chi \mapsto \log\chi(a))$ で与えられる同型であり，(2) は固定した同型 $X_*(A_G) \cong \mathbb{Z}^r$ から誘導される同型である．こうして定まる $A_G(\mathbb{R})^+$ の測度は同型 $X_*(A_G) \cong \mathbb{Z}^r$ のとり方によらない．さらに，$G(\mathbb{A})^1 = G(\mathbb{A})/A_G(\mathbb{R})^+$ に商測度を入れ，さらに $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ に商測度を入れる．この測度による $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ の体積を $\tau(G)$ と書き，G の**玉河数**という．玉河数は以下の公式で求めることができる（[Kot88] 参照）*2：

$$\tau(G) = \frac{|\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})|}{|\ker^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{G}))|}.$$

ただし，$\pi_0(-)$ は連結成分のなす群を表す．また，$\ker^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{G}))$ は $H^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{G})) \to \prod_v H^1(\mathbb{Q}_v, Z(\widehat{G}))$ の核である．例えば G が GL_n や GSp_{2n} の場合は $\tau(G) = 1$ である．

$A_G(\mathbb{R})^+$ の（ユニタリとは限らない）指標 $\omega\colon A_G(\mathbb{R})^+ \to \mathbb{C}^\times$ を固定する．$G(\mathbb{A})^1$ 上自明に延長することで，ω は $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})^1 A_G(\mathbb{R})^+$ の指標とみなすこともできる．

定義 2.1 可測関数 $f\colon G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ で以下の条件を満たすもの全体（ほとんどいたるところ一致する関数は同一視する）を $L^2(G,\omega)$ と書く：

- $f(\gamma g) = f(g)$ $(g \in G(\mathbb{A}), \gamma \in G(\mathbb{Q}))$.
- $f(ag) = \omega(a) f(g)$ $(g \in G(\mathbb{A}), a \in A_G(\mathbb{R})^+)$.
- $\int_{G(\mathbb{A})/A_G(\mathbb{R})^+} |\omega(g)^{-1} f(g)|^2 dg < \infty$.

$f \in L^2(G,\omega)$ が任意の放物型部分群 $P \subsetneq G$ に対し $\int_{N_P(\mathbb{Q})\backslash N_P(\mathbb{A})} f(ng)dn = 0$（$N_P$ は P の冪単根基，$g \in G(\mathbb{A})$）を満たすとき，f は尖点的であるという．尖点的な f 全体のなす部分空間を $L^2_{\mathrm{cusp}}(G,\omega)$ と書く．

$L^2(G,\omega)$ は Hilbert 空間であり，右移動による作用によって $G(\mathbb{A})$ の連続表現と

*2 慣例により，$\widehat{G}$ の中心は $Z_{\widehat{G}}$ ではなく $Z(\widehat{G})$ と表す．

なる（$G(\mathbb{A})^1$ の作用はユニタリであり，$a \in A_G(\mathbb{R})^+$ は $\omega(a)$ 倍で作用する）．この表現は以下のように直和分解する：

$$L^2(G,\omega) = \Bigl(\widehat{\bigoplus_{\pi=\pi^1\boxtimes\omega}} \pi^{\oplus m(\pi)} \Bigr) \oplus L^2_{\mathrm{cont}}(G,\omega).$$

ここで π^1 は $G(\mathbb{A})^1$ の既約ユニタリ表現の同型類を動き，$m(\pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は $L^2(G,\omega)$ における π の重複度を表す（これが有限であることも主張の一部である）．$L^2_{\mathrm{cont}}(G,\omega)$ は連続スペクトルであり，既約な部分 $G(\mathbb{A})$ 表現を持たない．これに対し，$\widehat{\bigoplus}_\pi \pi^{\oplus m(\pi)}$ の部分を $L^2_{\mathrm{disc}}(G,\omega)$ と書く．$L^2_{\mathrm{cusp}}(G,\omega) \subset L^2_{\mathrm{disc}}(G,\omega)$ であることが知られている．

定義 2.2　π^1 を $G(\mathbb{A})^1$ の既約ユニタリ表現とし，$G(\mathbb{A})$ の表現 $\pi = \pi^1 \boxtimes \omega$ を考える．$m(\pi) \geq 1$ となるような π 全体を $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)$ と書く．また，$L^2_{\mathrm{cusp}}(G,\omega)$ の部分表現となるような $\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)$ 全体を $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(G,\omega)$ と書く．$\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G) = \bigcup_\omega \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)$ の元を**離散的保型表現**と呼び，$\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(G) = \bigcup_\omega \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(G,\omega)$ の元を**尖点的保型表現**と呼ぶ．

$G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $K_0 = \prod_v K_{0,v}$ を固定する．このとき，$\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ の K_0 有限部分 $\pi_{K_0\text{-fin}}$ は制限テンソル積 $\bigotimes'_v \pi_v$ に分解する．ここで，π_v は $v \neq \infty$ のとき $G(\mathbb{Q}_v)$ の既約許容表現であり，$v = \infty$ のとき既約許容 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_{0,\infty})$ 加群である（$\mathfrak{g}$ は G の Lie 環を表す）．$\pi_f = \bigotimes'_{v\neq\infty} \pi_v$ とおく．$\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S に対し，$\pi_S = \bigotimes_{v\in S} \pi_v$, $\pi^S = \bigotimes'_{v\notin S} \pi_v$, $\pi^S_f = \bigotimes'_{v\notin S\cup\{\infty\}} \pi_v$ とおく．以下では，$\pi_{K_0\text{-fin}}$ を π と同一視して，単に π と書く．また，用語の濫用であるが，既約許容 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_{0,\infty})$ 加群のことを $G(\mathbb{R})$ の既約許容表現という．

2.2　Arthur-Selberg 跡公式

次に，志村多様体のコホモロジーの決定において鍵となる，Arthur-Selberg 跡公式について概観する．簡単のため，G の導来群 G_{der} は単連結であると仮定する．この仮定のもとで，任意の半単純元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ に対し，中心化群 $Z_G(\gamma)$ は連結であることが知られている ([Ste68, Corollary 8.5], [Kot82, p. 788])．以下では $G_\gamma = Z_G(\gamma)$ と書く[*3]．

スムーズな関数 $f\colon G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ であって以下の条件を満たすもの全体を $\mathcal{H}(G,\omega^{-1})$

[*3] 一般には，G_γ は $Z_G(\gamma)$ の単位元を含む連結成分を表す．

と書く：

- 任意の $a \in A_G(\mathbb{R})^+$ および $g \in G(\mathbb{A})$ に対し $\phi(ag) = \omega^{-1}(a)\phi(g)$.
- ϕ の台は $A_G(\mathbb{R})^+$ を法としてコンパクト.

$\mathcal{H}(G(\mathbb{R}), \omega^{-1})$ も同様に定義する．このとき，$\mathcal{H}(G, \omega^{-1})$ は畳み込み積によって環となり，$L^2(G, \omega)$ および $L^2_{\mathrm{disc}}(G, \omega)$ に作用する．$f \in \mathcal{H}(G, \omega^{-1})$ の $L^2_{\mathrm{disc}}(G, \omega)$ への作用を $R_{\mathrm{disc}}(f)$ と書く．Arthur-Selberg 跡公式とは，大雑把には，$\operatorname{Tr} R_{\mathrm{disc}}(f) = \sum_{\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)} m(\pi) \operatorname{Tr} \pi(f)$ を f の軌道積分の和で表す公式である.

まず，G/Z_G が非等方的である場合を考えよう．この場合，$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ はコンパクトであり，$L^2(G, \omega) = L^2_{\mathrm{disc}}(G, \omega)$ が成り立つ．$R_{\mathrm{disc}}(f)$ は trace class の作用素であり，その積分核を対角で積分することにより，以下の等式が得られる：

$$\operatorname{Tr} R_{\mathrm{disc}}(f) = \sum_{\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)} m(\pi) \operatorname{Tr} \pi(f) = \sum_{\gamma \in G(\mathbb{Q})/\sim} \tau(G_\gamma) O_\gamma(f).$$

ここで $G(\mathbb{Q})/\sim$ は $G(\mathbb{Q})$ の共役類を表す．なお，G/Z_G が非等方的である場合には，任意の $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ は楕円的半単純である（すなわち，Z_G を法として非等方的な G の極大トーラスに含まれる）ことに注意しておく．また，$O_\gamma(f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\, dg$ は軌道積分を表す（$G_\gamma(\mathbb{A})$ の測度も玉河測度を用いる).

G/Z_G が非等方的でない場合には，$L^2(G, \omega)$ が連続スペクトルを持つため，状況は非常に複雑になる．Arthur による一連の研究によって，完全に一般的な状況で跡公式が確立されているが，ここではその一般形を述べることはできない．興味のある読者は [Art05] や [SS2010] をご覧いただきたい．ここでは，[Art88] による，単純化された跡公式を紹介する.

定理 2.3（Arthur の単純跡公式，[Art88, Corollary 7.3, Corollary 7.4]） v_1, v_2 を $\mathbb{Q}$ の相異なる素点とする．$f \in \mathcal{H}(G, \omega^{-1})$ が $f = f_{v_1} \otimes f_{v_2} \otimes f^{v_1,v_2}$ と分解しているとし，f_{v_1}, f_{v_2} が以下の条件を満たすとする：

- $\gamma_{v_1} \in G(\mathbb{Q}_{v_1})$ が楕円的半単純元でないならば，$O_{\gamma_{v_1}}(f_{v_1}) = 0$ である.
- v_2 は有限素点であり，$G(\mathbb{Q}_{v_2})$ の既約許容表現 π が超尖点表現でないならば $\operatorname{Tr} \pi(f_{v_2}) = 0$ である.

このとき，以下が成り立つ：

$$\sum_{\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)} m(\pi)\operatorname{Tr}\pi(f)=\sum_{\substack{\gamma\in G(\mathbb{Q})/\sim\\ \gamma\text{ は楕円的半単純}}}\tau(G_\gamma)O_\gamma(f).$$

本稿では，$v_1=\infty$ であり，f_∞ が Euler-Poincaré 関数である場合に定理 2.3 を適用する．Euler-Poincaré 関数については，命題 4.15 および命題 8.71 を参照．

3 交叉コホモロジーと保型表現

(G,X) を志村データとし，E をそのリフレックス体とする．また，$\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset G(\mathbb{A}_f)}$ を (G,X) に伴う志村多様体とする．本稿では，以下の仮定を満たす志村データのみを考える：

仮定 3.1 G の中心 Z_G の最大分裂トーラス A_G に対し，$A_{G,\mathbb{R}}$ は $Z_{G,\mathbb{R}}$ の最大分裂トーラスになる．

注意 3.2 (1) 仮定 3.1 は，$Z_G(\mathbb{Q})$ が $Z_G(\mathbb{A}_f)$ の離散部分群になることと同値である ([Mil05, Remark 5.27])．この仮定のもとで，$\varprojlim_{K\subset G(\mathbb{A}_f)}\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})=G(\mathbb{Q})\backslash X\times G(\mathbb{A}_f)$ が成り立つ ([Mil05, Theorem 5.28])．

(2) 仮定 3.1 は，(G,X) が Hodge 型ならば常に満たされることが知られている．

素数 ℓ を固定し，$\xi\colon G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\to\mathrm{GL}_{n,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ を既約代数的表現とする．注意 3.2 (1) を用いて [今井, §9.2] と同様の議論を行うことで，Sh_K 上の ℓ 進エタール局所系 $\mathcal{F}_\xi$ を定めることができる．

Sh_K は自然なコンパクト化（**Baily-Borel-佐武コンパクト化，最小コンパクト化**などと呼ばれる）$j_K\colon\mathrm{Sh}_K\hookrightarrow\mathrm{Sh}_K^{\min}$ を持つことが知られている．$\{\mathrm{Sh}_K^{\min}\}_{K\subset G(\mathbb{A}_f)}$ も射影系となり，$G(\mathbb{A}_f)$ が右から作用する．コンパクト化 $j_K\colon\mathrm{Sh}_K\hookrightarrow\mathrm{Sh}_K^{\min}$ に関する交叉コホモロジー

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)=H^i(\mathrm{Sh}^{\min}_{K,\overline{E}},j_{K,*!}\mathcal{F}_\xi)$$

を考えよう．これは有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ベクトル空間である．交叉コホモロジーに関しては [BBDG18], [KW01] 等を参照．G が中心を法として非等方的である場合は，$\mathrm{Sh}_K^{\min}=\mathrm{Sh}_K$ であるから，これは通常のエタールコホモロジーと一致する．さらに，

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)=\varinjlim_K IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)$$

とおく．$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)$ には $G(\mathbb{A}_f)\times\Gamma_E$ が連続に作用し，$G(\mathbb{A}_f)$ の作用はスムーズである．

まず，Galois 群 Γ_E の作用を忘れて，$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)$ を $G(\mathbb{A}_f)$ の表現とみなすことにしよう．体同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\cong\mathbb{C}$ を固定し，これらの体を同一視する．ξ を既約代数的表現 $G_{\mathbb{C}}\to\mathrm{GL}_{n,\mathbb{C}}$ とみなし，それに対応する Sh_K 上の局所系を $\mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}}$ と書く．このとき，比較同型

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)\cong IH^i(\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}),\mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}})$$

がある．Zucker 予想（[SS90], [Loo88] において解決済み）から，交叉コホモロジー $IH^i(\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}),\mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}})$ は L^2 コホモロジーと呼ばれる de Rham コホモロジーの変種と同型であることが分かっている．さらに [BC83] を合わせると，次が得られる：

定理 3.3 $IH^i(\mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C}),\mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}})=\varinjlim_K IH^i(\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}),\mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}})$ に対し，以下の $G(\mathbb{A}_f)$ 同変な同型が存在する：

$$IH^i(\mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C}),\mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}})\cong\bigoplus_{\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)}\pi_f^{\oplus m(\pi)}\otimes H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K_\infty;\pi_\infty\otimes\xi).$$

ここで，$K_\infty\subset G(\mathbb{R})$ は $G(\mathbb{R})/K_\infty\cong X$ となる閉部分群であり，$H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K_\infty;-)$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K_\infty)$ コホモロジーである（[大島] 参照）．

G が中心を法として非等方的である場合は，これは [大島, §4] において紹介されている松島・村上の公式に他ならない．

$\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ に対し，$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ベクトル空間

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)[\pi_f]=\mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\pi_f,IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi))$$

を考える．これは Γ_E の連続表現である．定理 3.3 より，

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)[\pi_f]=\sum_{\substack{\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)\\ \pi'_f\cong\pi_f}}m(\pi')\dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K_\infty;\pi'_\infty\otimes\xi)$$

である．Harish-Chandra の有限性定理から，$\pi'_f\cong\pi_f$ かつ $H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K_\infty;\pi'_\infty\otimes\xi)\neq 0$ となる $\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ は有限個なので，特に $\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)[\pi_f]<\infty$ である．つまり，$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)[\pi_f]$ は Γ_E の有限次元 ℓ 進表現である．

この ℓ 進表現に関して，本稿では以下の問題を考える：

問題 3.4 Γ_E の ℓ 進表現 $IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)[\pi_f]$ と π の関係はどうなるか？

この問題に答えるためには，保型表現側において少なくとも以下のような問題を解決しなくてはならない：

- 離散的保型表現 $\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ をどのようにして記述するか？
- $\pi'_f\cong\pi_f$ となる $\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ はどのくらいあるか？また，それぞれの π' に対する $m(\pi')$ および $\dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K_\infty;\pi'_\infty\otimes\xi)$ はどうなるか？

$G=\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n$（$F$ は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体）の場合[*4]には，以下のように非常に簡単な状況になっている：

定理 3.5（[MW89], [JS81]） F を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とし，$G=\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n$ とおく．

(1) 任意の $\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ に対し，$m(\pi)=1$ である．
(2) $\mathbb{Q}$ の素点の集合を $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ と書く．S を $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ の有限部分集合とする．$\pi,\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ とし，任意の $v\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\setminus S$ に対し $\pi_v\cong\pi'_v$ が成り立つと仮定する．このとき，$\pi\cong\pi'$ である．

以下，簡単のため $F=\mathbb{Q}$ の場合を考える．定理 3.5 (2) より，$\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)$ を決めるには，ほとんど全ての $v\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ に対する π_v を決めればよい．ほとんど全ての素数 p に対して，π_p は不分岐である，すなわち，$\pi_p^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}\neq 0$ となるのであった．さらに，佐武同型 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p),\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p))\cong\mathbb{C}[X_1^{\pm1},\ldots,X_n^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_n}$ によって，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐既約表現は $(\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n$ の元と一対一に対応するのであった．不分岐既約表現 π_p に対応する $(\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n$ の元 $z(\pi_p)=(z_1(\pi_p),\ldots,z_n(\pi_p))$ を π_p の**佐武パラメータ**と呼ぶ．$(z(\pi_p))_{p;\ \pi_p\text{ は不分岐}}$ は $\varinjlim_S((\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n)^{\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\setminus S}$（$S$ は $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ の有限部分集合で ∞ を含むものを動く）の元を与える．これを $z(\pi)$ と書く．定理 3.5 (2) は以下のように言い換えることができる：

系 3.6 $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)\to\varinjlim_S((\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n)^{\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\setminus S};\ \pi\mapsto z(\pi)$ は単射である．

この系によって $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)$ の元を記述することができたと考えることにしよう[*5]．

[*4] G が志村データに現れるためには $n\leq 2$ である必要があるが，定理 3.5 自体はより一般の設定で成り立つ上，後に $n\geq 3$ の場合も必要になるので，ここでは少し広い状況で考えている．

[*5] もっとも，単射 $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)\hookrightarrow\varinjlim_S((\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n)^{\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\setminus S}$ の像の決定は絶望的に困難な問題として

次節では，以上の考察をもとに，$G = \mathrm{GL}_2$ の場合に $IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{F}_\xi)[\pi_f]$ を調べることにする．

一方，G が直交群や斜交群，ユニタリ群等，$\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n$ 以外のほとんど全ての場合には，定理 3.5 (2) は成立しないことが分かっている．そのような状況で離散的な保型表現の記述を与えるのが Arthur 分類である．Arthur 分類については，$\mathrm{PGSp}_4 = \mathrm{SO}_5$ の場合に 5 節で簡単に解説を行う．

4 GL_2 の志村多様体のエタールコホモロジー

本節では，志村データとして $(\mathrm{GL}_2, \mathfrak{H}_1^\pm)$ を考える．$K_\infty = \mathbb{R}_{>0}\,\mathrm{SO}(2)$ とおくと，$\mathfrak{H}_1^\pm = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/K_\infty$ である．リフレックス体は $\mathbb{Q}$ であり，$\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset G(\mathbb{A}_f)}$ は楕円曲線のモジュライ空間として構成できる（[プレ, §4] 参照）．コンパクト化 $j_K\colon \mathrm{Sh}_K \hookrightarrow \mathrm{Sh}_K^{\min}$ はモジュラー曲線に対してよく知られたものと一致する．本節では，簡単のため $\xi = \mathbf{1}$ として，定数層係数の交叉コホモロジー $IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を考えることにする．この場合，$\mathrm{Sh}_K^{\min}$ は $\mathbb{Q}$ 上滑らかであるから[*6]，$IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^i(\mathrm{Sh}^{\min}_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が成り立つ．

4.1 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の局所 Langlands 対応と $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K_\infty)$ コホモロジー

交叉コホモロジーの分析を始める前に，まず $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対する局所 Langlands 対応を復習しよう．$W_\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の Weil 群とする（[プレ, 定義 2.4] 参照）．$W_\mathbb{R}$ の既約連続表現は以下のように分類されるのであった（証明は [三枝 2, 命題 3.18] を参照）：

命題 4.1 $W_\mathbb{R}$ の $\mathbb{C}$ 上の既約連続表現は以下の 3 種類であり，これらは全て互いに同型ではない：

- 1 次元表現 $\theta_s^+\colon W_\mathbb{R}\to\mathbb{C}^\times$ $(s\in\mathbb{C})$; $z\mapsto |z|^s$ $(z\in\mathbb{C}^\times)$, $j\mapsto 1$.
- 1 次元表現 $\theta_s^-\colon W_\mathbb{R}\to\mathbb{C}^\times$ $(s\in\mathbb{C})$; $z\mapsto |z|^s$ $(z\in\mathbb{C}^\times)$, $j\mapsto -1$.
- 2 次元表現 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_\mathbb{R}}\theta_{k,s}$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0}$, $s\in\mathbb{C}$, $\theta_{k,s}$ は $\mathbb{C}^\times$ の指標 $z\mapsto (z/|z|)^k|z|^s)$.

定理 4.2（$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の局所 Langlands 対応） (1) 以下の 2 つの集合の間に自然な

残されている．

[*6] これは 1 次元の場合の特殊事情であり，高次元志村多様体の最小コンパクト化は特異点を持つ．

全単射がある：

- $W_{\mathbb{R}}$ の 2 次元半単純連続表現の同型類.
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約許容表現（すなわち，既約許容 $(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, \mathrm{O}(2))$ 加群）の同型類.

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約許容表現 π に対応する $W_{\mathbb{R}}$ の 2 次元半単純連続表現を π の ***L* パラメータ**と呼び，ϕ_π と書く.

(2) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約許容表現 π が離散系列表現であることは，その L パラメータ ϕ_π が既約表現であることと同値である.

(3) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約許容表現 π に対し，$\phi_\pi|_{\mathbb{C}^\times} = \chi_1 \oplus \chi_2$ となる連続指標 $\chi_1, \chi_2 \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ をとる．さらに，$\chi_i(z) = z^{a_i}\overline{z}^{b_i} := z^{a_i - b_i}|z|^{2b_i}$ となる $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2$, $a_i - b_i \in \mathbb{Z}$ をとる．このとき，π の無限小指標は (a_1, a_2) である.

(4) 局所類体論の同型 $W_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{R}^\times$（[プレ, 定理 2.5] 参照）によって $W_{\mathbb{R}}$ の指標と $\mathbb{R}^\times$ の指標を同一視することにすると，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約許容表現 π に対し，π の中心指標は $\det \phi_\pi \colon W_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^\times$ と一致する.

例 4.3 (1) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の自明表現 $\mathbf{1}$ の L パラメータは $\theta^+_{1/2} \oplus \theta^+_{-1/2}$ である.

(2) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の 1 次元表現 $\mathrm{sgn}\colon g \mapsto \mathrm{sgn}(\det g)$ の L パラメータは $\theta^-_{1/2} \oplus \theta^-_{-1/2}$ である.

(3) 実射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 上の $\mathrm{O}(2)$ 有限な複素数値関数全体の空間を定数関数全体の空間で割って得られる $\mathbb{C}$ ベクトル空間は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約離散系列表現となり，その L パラメータは $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{1,0}$ である．この離散系列表現を $D_{1,0}$ と書く．より一般に，L パラメータが $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{k,s}$ であるような離散系列表現を $D_{k,s}$ と書くことにする.

定理 4.4 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約許容表現 π が以下の条件を満たすとする：

$$H^*(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, K_\infty; \pi) := \bigoplus_{i \geq 0} H^i(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, K_\infty; \pi) \neq 0 \text{ である.}$$

このとき，π は $\mathbf{1}$, sgn, $D_{1,0}$ のいずれかと同型である．さらに，これらに対して以下が成り立つ：

- π が $\mathbf{1}$ または sgn と同型ならば，

$$\dim H^i(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, K_\infty; \pi) = \begin{cases} 1 & (i = 0, 2), \\ 0 & (i \neq 0, 2). \end{cases}$$

- π が $D_{1,0}$ と同型ならば，

$$\dim H^i(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, K_\infty; \pi) = \begin{cases} 2 & (i = 1), \\ 0 & (i \neq 1). \end{cases}$$

証明 $H^*(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, K_\infty; \pi) \neq 0$ であることから，π の中心指標が自明であり，π の無限小指標が自明表現 $\mathbf{1}$ の無限小指標と一致することが導かれる．π の L パラメータを ϕ とする．ϕ が可約ならば，中心指標が自明であることから $\phi = \theta_s^+ \oplus \theta_{-s}^+$ $(s \in \mathbb{C})$ または $\phi = \theta_s^- \oplus \theta_{-s}^-$ $(s \in \mathbb{C})$ となることが分かり，無限小指標を見ることで $s = \pm 1/2$ がいえる．一方，ϕ が既約ならば $\phi = \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_\mathbb{R}} \theta_{k,s}$ となる $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $s \in \mathbb{C}$ が存在する．π の中心指標が自明であることから $s = 0$ が分かり，無限小指標を見ることで $k = 1$ が分かる．よって例 4.3 から，π は $\mathbf{1}$, sgn, $D_{1,0}$ のいずれかと同型であることが分かる．それぞれの場合の $(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, K_\infty)$ コホモロジーの計算については，[Cas79, Corollary 1.3.2] を参照． □

定理 3.3，定理 3.5，定理 4.4 から，以下が成り立つことが分かる：

系 4.5 $\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_2)$ が $IH^*(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] := \bigoplus_{i \geq 0} IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] \neq 0$ を満たすならば，以下のいずれかが成立する：

- Hecke 指標 $\chi\colon \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$ であって $\chi|_{\mathbb{R}_{>0}} = \mathbf{1}$ となるものが存在して，$\pi \cong \chi \circ \det$ となる．
- $\pi_\infty \cong D_{1,0}$ である．

$\pi \cong \chi \circ \det$ のとき，以下が成り立つ：

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] = \begin{cases} 1 & (i = 0, 2), \\ 0 & (i \neq 0, 2). \end{cases}$$

また，$\pi_\infty \cong D_{1,0}$ のとき，以下が成り立つ：

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] = \begin{cases} 2 & (i = 1), \\ 0 & (i \neq 1). \end{cases}$$

証明 定理 4.4 より，π_∞ は $\mathbf{1}$, sgn, $D_{1,0}$ のいずれかと同型である．π_∞ が $\mathbf{1}$ または sgn と同型であるならば，特に π への $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の作用は自明であるから，SL_2 の強近似定理（[越川, 定理 3.2] 参照）より，π への $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ の作用も自明であることが分かる．よって，Hecke 指標 $\chi\colon \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$ であって $\pi \cong \chi\circ\det$ となるものが存在する．π_∞ の中心指標は自明であるから，$\chi|_{\mathbb{R}_{>0}} = \mathbf{1}$ が成り立つ．

残りの部分については，定理 3.3，定理 3.5，定理 4.4 から容易に分かる． □

4.2 GL_2 の場合の主定理

以下が本節の主定理である：

定理 4.6 (1) Hecke 指標 $\chi\colon \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$ が $\chi|_{\mathbb{R}_{>0}} = \mathbf{1}$ を満たすとする．このとき，$\pi = \chi\circ\det$ に対して以下が成り立つ：

$$IH^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] = \chi^{-1}\circ \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}^{-1},$$
$$IH^2(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] = (\chi^{-1}\circ \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}^{-1})(-1).$$

ただし，$\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\cong} \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ は大域類体論の同型である（[プレ, 定理 2.6，例 2.7] 参照）．

(2) $\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_2)$ が $\pi_\infty \cong D_{1,0}$ を満たすとする（このとき，π は尖点的な保型表現である）．このとき，$\mathbb{Q}$ の有限素点 $p \neq \ell$ において π_p が不分岐ならば，$\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元表現 $IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]$ は p において不分岐であり，任意の整数 $j \geq 1$ に対し

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]) = p^{j/2}(z_1(\pi_p)^{-j} + z_2(\pi_p)^{-j})$$

が成り立つ．すなわち，Frob_p の $IH^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]$ への作用の固有値[*7]は $p^{1/2}z_1(\pi_p)^{-1}, p^{1/2}z_2(\pi_p)^{-1}$ である．

(1) の証明は簡単である．

定理 4.6 (1) の証明 整数 $N \geq 1$ に対し，$K(N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$, $\mu_N = \{z \in \overline{\mathbb{Q}} \mid z^N = 1\}$ とおく．このとき，$\mathbb{Q}$ スキームの射 $\mathrm{Sh}_{K(N)} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N)$

---

*7 本稿における固有値とは，固有多項式の根を重複度込みで考えて得られる多重集合のことを指すものとする．

が自然に定まり，その幾何学的ファイバーは連結になる．すなわち，引き戻し $H^0((\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N))_{\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^0(\mathrm{Sh}_{K(N),\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は同型である．N に関して帰納極限をとることで，同型

$$\varinjlim_N H^0((\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N))_{\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\xrightarrow{\cong} H^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が得られる．一方，制限写像

$$IH^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=H^0(\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が同型であることも容易に分かる．これらを合わせて，同型

$$\varinjlim_N H^0((\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N))_{\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\xrightarrow{\cong} IH^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が得られる．構成から明らかに，この同型は $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ 同変である．また，$\{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N)\}_N$ を GL_1 の志村多様体とみなして $\mathbb{A}_f^\times$ の Hecke 作用を考え，$\det\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)\to\mathbb{A}_f^\times$ を合成することで $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ の $\varinjlim_N H^0((\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N))_{\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ への作用を定めると，上の同型は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ 同変でもある．よって，$\mathbb{A}_f^\times\times\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ の表現

$$V=\varinjlim_N H^0((\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N))_{\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

に対して $V[\chi_f]\cong IH^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]$ が成り立つ．[プレ, §3] で述べたことから，$a\in\mathbb{A}_f^\times$ の V への作用は $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}(a)^{-1}\in\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ の作用と一致する．よって，$a\in\mathbb{A}_f^\times$ に対し，$\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}(a)\in\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ は $V[\chi_f]=\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_f^\times}(\chi_f,V)$ へ $\chi_f(a)^{-1}$ 倍で作用する．$\chi|_{\mathbb{R}_{>0}}=\mathbf{1}$ より，$a\in\mathbb{A}^\times$ に対し，$\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}(a)\in\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ は $V[\chi_f]$ へ $\chi(a)^{-1}$ 倍で作用することが分かる．すなわち，$V[\chi_f]\cong\chi^{-1}\circ\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}^{-1}$ である．これで $IH^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]\cong\chi^{-1}\circ\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}^{-1}$ が示された．$IH^2(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]$ については，Poincaré 双対定理 $IH^2(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong IH^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\vee(-1)$ から容易に分かる． □

(2) は次小節以降で証明を紹介する．

4.3 整モデルと Lefschetz 数

以下では，$\pi_\infty\cong D_{1,0}$ を満たす $\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_2)$ を固定する．コンパクト化の境界を無視するために，π に以下の仮定をつけて定理 4.6 (2) を証明することにする．

仮定 4.7 ある有限素点 w において，π_w は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_w)$ の超尖点表現である．

境界を無視するためには，以下の補題を用いる．

補題 4.8 $H_c^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\varinjlim_K H_c^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ とおく．自然な準同型

$$H_c^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=H^i(\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

の核および余核の部分商には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_w)$ の超尖点表現は現れない．

証明 完全系列

$$\begin{aligned}0\to H_c^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)&\to H^0(\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^0(\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}\setminus\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\ \to H_c^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)&\to H^1(\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to 0\end{aligned}$$

がある．$\mathrm{Sh}^{\min}_K(\mathbb{C})\setminus\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ の記述から，$H^0(\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}\setminus\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_w)$ の表現と見たものは放物型誘導表現となることが分かるので，$i=0,1$ の場合が従う．$i=2$ の場合は $H_c^2(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^2(\mathrm{Sh}^{\min}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が同型なのでよい． □

$\mathbb{Q}$ の有限素点 $p\neq\ell$ であって π_p が不分岐であるものを固定する．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 $K=\prod_{v\neq\infty}K_v$ を，以下の条件を満たすようにとる：

- $\pi_f^K\neq 0$.
- $K_p=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.
- ある整数 $N\geq 3$ に対し $K\subset\mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ となる．

このとき，Sh_K はレベル K 構造付きの楕円曲線の（精）モジュライ空間であり，モジュライ関手を $\mathbb{Z}_p$ 上で考えることで，Sh_K の $\mathbb{Z}_p$ 上の整正準モデル $\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{Z}_p}$ を考えることができるのであった（[清水] 参照）．$\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{F}_p}=\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{Z}_p}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p$, $\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p}=\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{F}_p}\otimes_{\mathbb{F}_p}\overline{\mathbb{F}}_p$ とおく．$\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{Z}_p}$, $\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{F}_p}$, $\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p}$ には，Hecke 環 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p),K^p)$ が代数的対応として作用する（[津嶋, §3.1] を参照）．ただし，$K^p=\prod_{v\neq p,\infty}K_v$ とおいた．

補題 4.9 $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ 同変な同型 $H_c^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\xrightarrow{\cong}H_c^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ がある．特に，$\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の表現 $H_c^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は p で不分岐であり，整数 $j\geq 1$ および $f\in\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p),K^p)$ に対して以下が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}(f\times\mathrm{Frob}_p^j;H_c^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))=\mathrm{Tr}(f\times\mathrm{Frob}_p^j;H_c^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

証明 $\mathbb{Q}$ 上のコンパクト化 $\mathrm{Sh}_K\hookrightarrow\mathrm{Sh}_K^{\min}$ も $\mathbb{Z}_p$ 上のコンパクト化 $\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{Z}_p}\hookrightarrow\mathrm{Sh}^{\min}_{K,\mathbb{Z}_p}$ に延長することができ，$\mathrm{Sh}^{\min}_{K,\mathbb{Z}_p}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上滑らかであり，$\mathrm{Sh}^{\min}_{K,\mathbb{Z}_p}\setminus\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{Z}_p}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上エ

タールであることが知られている．これと [SGA7, Exposé XIII, Proposition 2.1.9] から，自然な準同型 $H^i_c(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^i_c(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が同型であることが分かる．残りの主張は明らかである． □

Harish-Chandra の有限性定理から，$\pi'^K\neq 0$ かつ $H^*(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}},K_\infty;\pi'_\infty)\neq 0$ となる $\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_2)$ は有限個である．このような π' を $\pi_1=\pi,\pi_2,\dots,\pi_r$ とおく．定理 3.5 (2) より，$k\geq 2$ のとき $\pi^{p,w}_{k,f}\not\cong\pi^{p,w}_f$ であるから，指標の線型独立性より，$f^{p,w}\in\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{p,w}_f),K^{p,w})$ であって

$$\operatorname{Tr}\pi^{p,w}_{k,f}(f^{p,w})=\begin{cases}1 & (k=1)\\ 0 & (k\neq 1)\end{cases}$$

を満たすものをとることができる（上と同様，$K^{p,w}=\prod_{v\neq p,w,\infty}K_v$，$\pi^{p,w}_f=\bigotimes'_{v\neq p,w,\infty}\pi_v$ 等とおいた）．必要なら K_w を縮めて，$f_w\in\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_w),K_w)$ を

- $\operatorname{Tr}\pi_w(f_w)=1$
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_w)$ の既約許容表現 τ が超尖点表現でないならば，$\operatorname{Tr}\tau(f_w)=0$

となるように選び，$f^p=f^{p,w}\otimes f_w$ とおく．このとき，次が成り立つ：

系 4.10 $j\geq 1$ に対し，$\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}^j_p;IH^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f])$ は

$$-\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\operatorname{Tr}(f^p\times\mathrm{Frob}^j_p;H^i_c(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$$

に等しい．

証明 補題 4.9 から，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\operatorname{Tr}(f^p\times\mathrm{Frob}^j_p;H^i_c(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\\
&\qquad=\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\operatorname{Tr}(f^p\times\mathrm{Frob}^j_p;H^i_c(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\\
&\qquad\overset{(1)}{=}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\operatorname{Tr}(f^p\times\mathrm{Frob}^j_p;IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\\
&\qquad\overset{(2)}{=}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\operatorname{Tr}\Bigl(f^p\times\mathrm{Frob}^j_p;\bigoplus_{k=1}^{r}\pi^K_{k,f}\otimes IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_{k,f}]\Bigr)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \operatorname{Tr}\pi_{k,f}^p(f^p)\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_{k,f}]) \\
&= \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]) \\
&\overset{(3)}{=} -\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f])
\end{aligned}
$$

となるのでよい．ただし，(1) の等号では補題 4.8 を，(2) の等号では定理 3.3 および定理 3.5 (1) を，(3) の等号では系 4.5 を用いた． □

さらに，藤原の跡公式 [Fuj97] を用いることで，次が分かる：

系 4.11 j が十分大きい整数であるとき，$\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f])$ は Lefschetz 数

$$
\mathrm{Lef}(f^p, j, \mathbf{1}) = \#\operatorname{Fix}(\mathrm{Fr}_p^j \circ f^p; \mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p})
$$

の -1 倍に等しい（右辺は $\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{F}}_p}$ 上の代数的対応 $\mathrm{Fr}_p^j \circ f^p$ の集合論的な意味での固定点の個数を表す．[三枝 1, 定理 3.42] 等を参照）[*8]．

Lefschetz 数 $\mathrm{Lef}(f^p, j, \mathbf{1})$ は [津嶋] において計算されているのであった．その結果を思い出そう．

定理 4.12 以下が成り立つ：

$$
\mathrm{Lef}(f^p, j, \mathbf{1}) = \sum_{[\gamma_0]} c(\gamma_0) O_{\gamma_0}(f^p)\, TO_\delta(\phi_j).
$$

記号は以下の通りである．

- $[\gamma_0]$ は半単純元 $\gamma_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ であって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ における像が楕円的であるようなものの共役類を動く．
- $O_{\gamma_0}(f^p) = \int_{\mathrm{GL}_{2,\gamma_0}(\mathbb{A}_f^p)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)} f^p(g^{-1}\gamma_0 g)\,dg$ は，2.2 節と同様，f^p の軌道積分を表す．GL_{2,γ_0} は γ_0 の GL_2 における中心化群である．
- $\phi_j \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{p^j}))$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{p^j})\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{p^j})$ の特性関数である．ただし，$\mathbb{Q}_p$ の不分岐 j 次拡大を $\mathbb{Q}_{p^j}$ と書き，その整数環を $\mathbb{Z}_{p^j}$ と書いた．

*8 本稿では，混同を避けるため，Galois 群の元としての幾何学的 Frobenius 元を Frob_p と書き，スキームの射としての p 乗 Frobenius 射は Fr_p と書いている．

- $\delta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j})$ は $\delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{j-1}(\delta) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j})$ が γ_0 と共役になるような元である．ただし，$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p)$ は p 乗 Frobenius 写像の持ち上げである．
- $TO_\delta(\phi_j) = \int_{\mathrm{GL}_{2,\delta\sigma}(\mathbb{Q}_p)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j})} \phi_j(g^{-1}\delta\sigma(g))\,dg$ は捻られた軌道積分である．ただし，$\mathrm{GL}_{2,\delta\sigma}$ は δ の σ 中心化群（$\mathrm{GL}_{2,\delta\sigma}(\mathbb{Q}_p) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j}) \mid g^{-1}\delta\sigma(g) = \delta\}$ となるような $\mathbb{Q}_p$ 上の代数群）である．
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ の Haar 測度を以下のように正規化する．$\mathbb{H}$ を $\mathbb{R}$ 上の四元数体とし，$\mathbb{H}^\times$ の Haar 測度を $\mathrm{vol}(\mathbb{H}^\times/\mathbb{R}_{>0}) = 1$ となるようにとる（$\mathbb{R}_{>0}$ には，$\log\colon \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$ によって Lebesgue 測度を引き戻して得られる Haar 測度を入れる）．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の Haar 測度は，この $\mathbb{H}^\times$ の測度と整合的になるようにとる．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の Haar 測度は $\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)) = 1$ となるようにとる．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j})$ についても同様である．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ の Haar 測度は，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ 上の直積測度が玉河測度になるように定める．
- GL_{2,γ_0} の内部形式 I であって以下の条件を満たすものをとる：
  - $I_{\mathbb{Q}_{\ell'}} \cong (\mathrm{GL}_{2,\gamma_0})_{\mathbb{Q}_{\ell'}}$（$\ell'$ は p と異なる素数）．
  - $I_{\mathbb{Q}_p} \cong \mathrm{GL}_{2,\delta\sigma}$．
  - $I(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$ はコンパクト．

  $I(\mathbb{R})$ の Haar 測度を $\mathrm{vol}(I(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}) = 1$ となるように正規化する．さらに，$I(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_{2,\delta\sigma}(\mathbb{Q}_p)$, $I(\mathbb{A}_f^p) = \mathrm{GL}_{2,\gamma_0}(\mathbb{A}_f^p)$ 上の Haar 測度を $I(\mathbb{A}) = I(\mathbb{R}) \times I(\mathbb{Q}_p) \times I(\mathbb{A}_f^p)$ 上の直積測度が玉河測度になるようにとる．さらに，$\mathrm{GL}_{2,\gamma_0}(\mathbb{R})$ および $\mathrm{GL}_{2,\gamma_0}(\mathbb{Q}_p)$ の Haar 測度を，$I(\mathbb{R})$ および $I(\mathbb{Q}_p)$ の Haar 測度と整合的になるように定める．$\mathrm{GL}_{2,\gamma_0}(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_{2,\gamma_0}(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_{2,\gamma_0}(\mathbb{A}_f^p)$ 上の直積測度も玉河測度になる．
- $I(\mathbb{Q}) \subset I(\mathbb{A}_f)$ は離散部分群であり，$I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)$ は体積有限となる．$c(\gamma_0) = \mathrm{vol}(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f))$ とおく．$\mathrm{vol}(I(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}) = 1$ より，$c(\gamma_0)$ は $\mathrm{vol}(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A})/\mathbb{R}_{>0})$ にも一致する．すなわち，$c(\gamma_0)$ は I の玉河数 $\tau(I)$ に等しい．玉河数は内部形式で不変なので，結局 $c(\gamma_0) = \tau(\mathrm{GL}_{2,\gamma_0})$ ということになる．

定理 4.12 の等式をもう少し分かりすい形に書き直そう．

定義 4.13 佐武同型

$$\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)) \cong \mathbb{C}[X_1^{\pm}, X_2^{\pm}]^{\mathfrak{S}_2},$$
$$\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{p^j})) \cong \mathbb{C}[X_1'^{\pm}, X_2'^{\pm}]^{\mathfrak{S}_2}$$

を用いて，$\mathbb{C}$ 代数の準同型 $b\colon \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{p^j})) \to \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p))$ を $X_i' \mapsto X_i^j$ で定める．$h_{p,j} = b(\phi_j)$ とおく．

命題 4.14 (1) π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現とし，その佐武パラメータを $z(\pi) = (z_1(\pi), z_2(\pi))$ とするとき，以下が成り立つ：

$$\operatorname{Tr} \pi(h_{p,j}) = p^{j/2}(z_1(\pi)^{-j} + z_2(\pi)^{-j}).$$

(2) 以下が成り立つ：

$$TO_\delta(\phi_j) = \begin{cases} O_{\gamma_0}(h_{p,j}) & \gamma_0 \notin Z_{\mathrm{GL}_2}(\mathbb{Q}), \\ -O_{\gamma_0}(h_{p,j}) & \gamma_0 \in Z_{\mathrm{GL}_2}(\mathbb{Q}). \end{cases}$$

ただし，Z_{GL_2} は GL_2 の中心を表す．

証明 (1) は佐武同型 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^j}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{p^j})) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[X_1', X_2']^{\mathfrak{S}_2}$ による ϕ_j の像が $p^{j/2}(X_1'^{-1} + X_2'^{-1})$ になること（[三枝 2, 例 1.33] 参照）から直ちに分かる．(2) は底変換の基本補題と呼ばれるものである． □

無限素点においては Euler-Poincaré 関数というものを用いる．

命題 4.15 以下の条件を満たすような $f_{\mathrm{EP},\mathbf{1}} \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \mathbf{1})$ が存在する：$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約許容表現 π の中心指標が $\mathbb{R}_{>0}$ 上で自明ならば，

$$\operatorname{Tr} \pi(f_{\mathrm{EP},\mathbf{1}}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, K_\infty; \pi).$$

$f_{\mathrm{EP},\mathbf{1}}$ を（有限次元表現 $\mathbf{1}$ に伴う）**Euler-Poincaré 関数**と呼ぶ．

この命題は [CD85] と全く同様の議論で証明できる．

$f_{D_{1,0}} = -\dfrac{1}{2} f_{\mathrm{EP},\mathbf{1}}$ とおく．定理 4.4 より $\operatorname{Tr} D_{1,0}(f_{\mathrm{EP},\mathbf{1}}) = -2$ であるから，$\operatorname{Tr} D_{1,0}(f_{D_{1,0}}) = 1$ となる．

命題 4.16 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対し次が成り立つ：

- γ が楕円正則半単純元であるとき，$O_\gamma(f_{D_{1,0}})=-1$.
- $\gamma\in Z_{\mathrm{GL}_2}(\mathbb{R})$ であるとき，$O_\gamma(f_{D_{1,0}})=1$.
- γ が楕円半単純元でないとき（すなわち，中心を法としてコンパクトな極大トーラスに含まれないとき)，$O_\gamma(f_{D_{1,0}})=0$.

ただし，γ が楕円半単純元である場合には，$\mathrm{GL}_{2,\gamma}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$ の Haar 測度は以下のように正規化する．$\mathrm{GL}_{2,\gamma}$ の $\mathbb{R}$ 上の内部形式 I を，$I(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$ がコンパクトとなるようにとり，$I(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$ の Haar 測度を $\mathrm{vol}(I(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0})=1$ となるように定める．さらに，その測度と整合的になるように $\mathrm{GL}_{2,\gamma}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$ の測度をとる．

証明　$f_{D_{1,0}}$ は [Art89a, §4] の意味で安定尖点的であり，$\mathrm{Tr}\,D_{1,0}(f_{D_{1,0}})=1$ を満たすから，[Art89a, Theorem 5.1] を $M=G=\mathrm{GL}_2$ として適用することで，

$$O_\gamma(f_{D_{1,0}})=-v(\mathrm{GL}_{2,\gamma})^{-1}\Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma,\mathbf{1})$$

が得られる（$v(\mathrm{GL}_{2,\gamma})$ の定義は [Art89a, §5] を，$\Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma,\mathbf{1})$ の定義は [Art89a, §4] を参照)．γ が楕円正則半単純元である場合には，定義より $v(\mathrm{GL}_{2,\gamma})=1$ であり，[Art89a, (4.4)] より $\Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma,\mathbf{1})=1$ である．$\gamma\in Z_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}$ のときは，定義より $v(\mathrm{GL}_{2,\gamma})=-1$ であり，$\Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma,\mathbf{1})$ の連続性 ([Art89a, Lemma 4.2]) より $\Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma,\mathbf{1})=1$ である．また，γ が楕円半単純元でないときには，定義より $\Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma,\mathbf{1})=0$ である（[Art89a, §4] の最後の部分を参照)．以上より主張が従う． □

命題 4.14 (2) と命題 4.16 より次が分かる：

系 4.17　$f=f^p\otimes h_{p,j}\otimes f_{D_{1,0}}$ とおくと，以下が成り立つ：

$$\mathrm{Lef}(f^p,j,\mathbf{1})=-\sum_{[\gamma_0]}\tau(\mathrm{GL}_{2,\gamma_0})O_{\gamma_0}(f).$$

ここで，$[\gamma_0]$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の楕円的半単純元の共役類を動く．

4.4　跡公式の利用

最後に，単純跡公式（定理 2.3）を用いて $\mathrm{Lef}(f^p,j,\mathbf{1})$ を保型表現と結び付けよう．

定理 4.18 以下が成り立つ：

$$\sum_{\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_2,\mathbf{1})}\operatorname{Tr}\pi'(f)=\sum_{[\gamma_0]}\tau(\mathrm{GL}_{2,\gamma_0})O_{\gamma_0}(f).$$

証明 定理 2.3 を $v_1=\infty$, $v_2=w$ として適用すればよい．定理 3.5 (1) より，$\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_2,\mathbf{1})$ に対し $m(\pi')=1$ である．また，$f_{D_{1,0}}$ が定理 2.3 の条件を満たすことは命題 4.16 によって保証されている． □

$\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_2,\mathbf{1})$ が $\operatorname{Tr}\pi'(f)\neq 0$ を満たすとする．$\operatorname{Tr}\pi'_f(f^p\otimes h_{p,j})\neq 0$ および $f^p\otimes h_{p,j}\in\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f),K)$ より $\pi'^K_f\neq 0$ である．また，

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i\dim H^i(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}},K_\infty;\pi'_\infty)=\operatorname{Tr}\pi'_\infty(f_{\mathrm{EP},\mathbf{1}})=-2\operatorname{Tr}\pi'_\infty(f_{D_{1,0}})\neq 0$$

より $H^*(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}},K_\infty;\pi'_\infty)\neq 0$ である．よって $\pi'\in\{\pi_1,\ldots,\pi_r\}$ であり，$f^p=f^{p,w}\otimes f_w$ のとり方から $\pi'=\pi_1=\pi$ であることが分かる．さらにこのとき，命題 4.14 (1) より

$$\operatorname{Tr}\pi(f)=p^{j/2}(z_1(\pi_p)^{-j}+z_2(\pi_p)^{-j})$$

である．よって，定理 4.18，系 4.17，系 4.11 を順に使うことで，十分大きい整数 j に対し，

$$\begin{aligned}p^{j/2}(z_1(\pi_p)^{-j}+z_2(\pi_p)^{-j})&=\sum_{[\gamma_0]}\tau(\mathrm{GL}_{2,\gamma_0})O_{\gamma_0}(f)=-\operatorname{Lef}(f^p,j,\mathbf{1})\\&=\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j;IH^1(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f])\end{aligned}$$

が成り立つ．2 次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ベクトル空間 $IH^1(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]$ への Frob_p の作用の固有値を α_1, α_2 とおくと，十分大きな整数 j に対し

$$(p^{1/2}z_1(\pi_p)^{-1})^j+(p^{1/2}z_2(\pi_p)^{-1})^j=\alpha_1^j+\alpha_2^j$$

が成り立つから，(α_1,α_2) は $(p^{1/2}z_1(\pi_p)^{-1},p^{1/2}z_2(\pi_p)^{-1})$ に順序を除いて一致することが分かる．特に，任意の整数 $j\geq 1$ に対し

$$\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j;IH^1(\mathrm{Sh}_{K,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f])=p^{j/2}(z_1(\pi_p)^{-j}+z_2(\pi_p)^{-j})$$

が成り立つ．以上で，仮定 4.7 のもとで定理 4.6 (2) が証明された．

4.5 GL_n の大域 Langlands 対応について

定理 4.6 は，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現に対応する Galois 表現の構成を与えていると見ることができる．これを説明するために，GL_n の大域 Langlands 対応について思い出しておく．

定義 4.19 π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の保型表現とし，π_∞ の無限小指標を $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ とおく．

(1) $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ であるとき，π は ***L* 代数的**であるという．
(2) $\rho=(\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2},\ldots,\frac{1-n}{2})$ とおく．$(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathbb{Z}^n+\rho)/\mathfrak{S}_n$ であるとき，π は ***C* 代数的**であるという．
(3) $a_1,\ldots,a_n$ が相異なるとき，π_∞ は**正則**であるという．

注意 4.20 π が正則 C 代数的であることは，$\mathrm{GL}_{n,\overline{\mathbb{Q}}}$ の既約代数的表現 ξ であって π_∞ と同じ無限小指標を持つものが存在することと同値である．さらにこのとき，$H^*(\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}},\mathbb{R}_{>0}\mathrm{SO}(n);\pi_\infty\otimes\xi^\vee)\neq 0$ となることが知られている（[Clo90, Lemme 3.14]）．

特に $n=2$ の場合，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 π が正則 C 代数的ならば，π_∞ は離散系列表現となる．これは大雑把には，π が重さ 2 以上の尖点形式から得られるということにあたる．一方，正則でない C 代数的保型表現には，重さ 1 の尖点形式に対応するものや，一部の Maass 形式に対応するものが含まれる．

定義 4.21 ℓ を素数とする．$\Gamma_\mathbb{Q}$ の ℓ 進表現 $\rho\colon\Gamma_\mathbb{Q}\to\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が**代数的**であるとは，以下の条件を満たすことをいう：

- ρ はほとんど全ての有限素点において不分岐である．
- $\rho_\ell=\rho|_{\Gamma_{\mathbb{Q}_\ell}}$ は de Rham である．

定義 4.22 体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\cong\mathbb{C}$ を固定する．π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現とし，$\rho\colon\Gamma_\mathbb{Q}\to\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を半単純 ℓ 進表現とする．$\mathcal{P}_\mathbb{Q}$（$=\mathbb{Q}$ の素点全体からなる集合）の有限部分集合 S で以下を満たすものが存在するとき，π と ρ は対応するという：

- $\infty,\ell\in S$.

- $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \setminus S$ のとき，π_p および ρ_p は不分岐であり，$\rho(\mathrm{Frob}_p)$ の固有値は π_p の佐武パラメータ $z(\pi_p) = (z_1(\pi_p), \ldots, z_n(\pi_p))$ と一致する．

注意 4.23 Chebotarev 密度定理より，π に対応する ρ は存在すれば一意である．また，定理 3.5 (2) より，ρ に対応する π も存在すれば一意である．

以下は，$\mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}}$ に対する大域 Langlands 対応の定式化の一つとして現在主に使われているものである．

予想 4.24（$\mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}}$ の大域 Langlands 予想） 定義 4.22 に述べた対応によって，以下の 2 つは一対一に対応する：

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の L 代数的な尖点的保型表現．
- $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の代数的な n 次元既約 ℓ 進表現．

注意 4.25 ここでは $\mathbb{Q}$ 上の場合に限って予想を述べたが，一般の代数体上の場合にも予想を定式化することが可能である．[三枝 2, 予想 3.9] 等を参照．

予想 4.24 の一部分として，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の L 代数的な尖点的保型表現 π に対し，それに対応する $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の n 次元半単純 ℓ 進表現 ρ_π（既約性，代数性は問わない）を構成するという問題が考えられる．これを **Galois 表現の構成問題**と呼ぶ．この問題については，以下のことが分かっている．

定理 4.26（[HT01], [Shi11], [CH13], [HLTT16], [Sch15]） π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の正則 L 代数的な尖点的保型表現とするとき，π に対応する $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の n 次元半単純 ℓ 進表現 ρ_π が存在する．

$n = 2$ とし，π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の正則 L 代数的な尖点的保型表現とする．π_∞ の無限小指標を $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ $(a_1 > a_2)$ とする．$a_1 - a_2 = 1$ である場合には，定理 4.6 (2) を用いて以下のように ρ_π を構成することができる．

$\pi' = \pi^\vee \otimes |\det|^{a_1 - \frac{1}{2}}$ とおくと，π'_∞ の無限小指標は $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ となる．これと π' が尖点的，したがって π'_∞ が生成的であることから，$\pi'_\infty \cong D_{1,0}$ が導かれる．ρ' を $IH^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi'_f]$ の半単純化とする．また，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 $K = \prod_{v \neq \infty} K_v$ を $\pi_f'^K \neq 0$ となるようにとり，$S = \{p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \setminus \{\infty\} \mid K_p \neq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\} \cup \{\infty, \ell\}$ とおく．このとき，定理 4.6 (2) より，$p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \setminus S$ において ρ' は不分岐であり，$\rho'(\mathrm{Frob}_p)$ の固有値は $p^{1/2} z_1(\pi'_p)^{-1}, p^{1/2} z_2(\pi'_p)^{-1}$ となる．

$z(\pi'_p) = p^{-a_1+\frac{1}{2}} z(\pi_p)^{-1}$ であるから，$\rho_\pi = \rho'(a_1)$ とおけば ρ_π は π に対応する．

この証明と交叉コホモロジーに対する一般論から，次のことが分かる：

系 4.27 π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の正則 L 代数的な尖点的保型表現とし，π_∞ の無限小指標が $(a, a-1)$ ($a \in \mathbb{Z}$) という形であるとする．S および ρ_π を上の通りとするとき，以下が成り立つ：

(1) $p \in \mathcal{P}_\mathbb{Q} \setminus S$ に対し，$\rho_\pi(\mathrm{Frob}_p)$ の固有値は代数的数であり，その全ての共役の複素絶対値は $p^{-a+\frac{1}{2}}$ である．
(2) ρ_π は代数的な ℓ 進表現である．

証明 (1) は $\mathrm{Sh}^{\min}_{K,\mathbb{F}_p}$ に対する Weil 予想の帰結である．(2) については，p 進 Hodge 理論から $\rho_{\pi,\ell}$ が de Rham になることが分かるのでよい． □

(1) を佐武パラメータの言葉で言い換えると，

> $p \in \mathcal{P}_\mathbb{Q} \setminus S$ に対し，$z_1(\pi_p)$, $z_2(\pi_p)$ は代数的数であり，その全ての共役の複素絶対値は $p^{-a+\frac{1}{2}}$ である

ということになる．これは Ramanujan 予想を保型表現の言葉で述べたものになっている．このように，志村多様体を通した幾何学的な方法で Galois 表現を構成することで，もとの保型表現に対する性質が分かることもある．定理 4.26 との関連で言えば，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の正則 L 代数的な尖点的保型表現 π が $\pi \cong \pi^\vee$ を満たすなら，系 4.27 と同様のことが証明できることが分かっている．上に引用した文献に加え，[Car12, Theorem 1.2] を参照．

$n = 2$ かつ π_∞ の無限小指標 $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ $(a_1 > a_2)$ が $a_1 - a_2 \geq 2$ となる場合にも，GL_2 の既約代数的表現 $\xi = \mathrm{Sym}^{a_1-a_2-1}$ から決まる ℓ 進エタール層 $\mathcal{F}_\xi$ を係数とする交叉コホモロジー $IH^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_\xi)$ を用いて同様の議論を行うことができる．

$n \geq 3$ の場合，定理 4.26 の証明は上で述べたものよりもはるかに難しくなるが，そこでもやはり志村多様体の理論が駆使される．詳細は [三枝 3] を参照していただきたい．

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現を分類するという立場からは，予想 4.24 は「L 代数的」という非常に狭いクラスに限ったものになっているという欠点がある．以下の予想

は，全ての尖点的保型表現を分類しようとするものである．

予想 4.28 局所コンパクト群 $L_{\mathbb{Q}}$ であって，以下の性質を満たすものが存在する：$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現は，$L_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$ 上の n 次元既約連続表現の同型類と一対一に対応する．$L_{\mathbb{Q}}$ は**仮説的 Langlands 群**と呼ばれる．

これは予想というよりは作業仮説に近いものである．現状で証明できる見込みは全くないものの，このような局所コンパクト群の存在を仮定すると，GL_n 以外の簡約群の保型表現の分類など，関連する問題を見通しよく定式化できることがある．次節に述べる Arthur 分類はその一例である．

以下の定義は，定義 4.22 の変種であり，後に用いられる．

定義 4.29 予想 4.28 を仮定する．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 π に対応する $L_{\mathbb{Q}}$ の n 次元既約連続表現を ϕ_π と書く．

素数 ℓ および体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する．$\phi\colon L_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $L_{\mathbb{Q}}$ の n 次元半単純連続表現とし，$\rho\colon \Gamma_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の n 次元半単純 ℓ 進表現とする．$\phi = \phi_{\pi_1} \oplus \cdots \oplus \phi_{\pi_r}$ となる $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 π_i をとる $(n_1, \ldots, n_r \geq 1, n_1 + \cdots + n_r = n)$．$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ の有限部分集合 S で以下を満たすものが存在するとき，ϕ と ρ は対応するという：

- $\infty, \ell \in S$.
- $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \setminus S$ のとき，$\pi_{1,p}, \ldots, \pi_{r,p}$ および ρ_p は不分岐であり，$\rho(\mathrm{Frob}_p)$ の固有値は $\pi_{1,p}, \ldots, \pi_{r,p}$ の佐武パラメータを並べたもの
$$(z_1(\pi_{1,p}), \ldots, z_{n_1}(\pi_{1,p}), z_1(\pi_{2,p}), \ldots, z_{n_2}(\pi_{2,p}), \ldots, z_1(\pi_{r,p}), \ldots, z_{n_r}(\pi_{r,p}))$$
と一致する．

5 $\mathrm{PGSp}_4 = \mathrm{SO}_5$ の Arthur 分類

本節以降では，GSp_4 の志村多様体 (Siegel threefold) のエタールコホモロジーを考察する．その際，簡単のため，係数層は定数層とし，中心指標が自明である保型表現の寄与を考えることにする．そこで，$G = \mathrm{PGSp}_4$ とおき，本節では $G(\mathbb{A})$ の離散的保型表現の Arthur 分類について解説を行う．同型 $\mathrm{PGSp}_4 \cong \mathrm{SO}_5$ によって，しば

しば $G=\mathrm{SO}_5$ とみなす．この群に対する Arthur 分類は，Arthur 自身の本 [Art13] において与えられている．

以下では，仮説的 Langlands 群 $L_{\mathbb{Q}}$ の存在（予想 4.28）を仮定する．$\mathbb{Q}$ の素点 v に対し，

$$L_{\mathbb{Q}_v}=\begin{cases}W_{\mathbb{Q}_v}\times \mathrm{SU}(2) & v\neq\infty\\ W_{\mathbb{Q}_v} & v=\infty\end{cases}$$

とおく．GL_n の局所 Langlands 対応により，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_v)$ の既約許容表現は，$L_{\mathbb{Q}_v}$ の n 次元半単純連続表現と一対一に対応することが分かっている．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_v)$ の既約許容表現 π に対応する $L_{\mathbb{Q}_v}$ の n 次元半単純連続表現を ϕ_π と書き，π の L パラメータと呼ぶ．

$L_{\mathbb{Q}}$ に対して，さらに以下の局所大域整合性を仮定する：

仮定 5.1 $\mathbb{Q}$ の各素点 v に対し，連続準同型 $L_{\mathbb{Q}_v}\to L_{\mathbb{Q}}$ が共役を除いて定まり，以下が成り立つ：π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現とするとき，π_v の L パラメータは $\phi_{\pi,v}\colon L_{\mathbb{Q}_v}\to L_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\phi_\pi}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ である．

ここまで仮定するのだから，Ramanujan 予想も仮定してしまおう．

仮定 5.2 π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ のユニタリ尖点的保型表現とする．このとき，$\mathbb{Q}$ の任意の素点 v に対し，π_v は緩増加表現である．言い換えると，ϕ_{π_v} の像は有界である．

まず，$\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ を「近同値類」という粗い同値関係によって分割する．

定義 5.3 $\pi,\pi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ が**近同値** (nearly equivalent) であるとは，ほとんど全ての素点 v に対して $\pi_v\cong\pi'_v$ が成り立つことをいう．

定理 3.5 (2) より，GL_n の場合には近同値は同型と同じことであったが，$G=\mathrm{SO}_5$ のときにはそうではない．Arthur 分類の第一歩は，近同値類が準同型 $L_{\mathbb{Q}}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to\widehat{G}=\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ で分類できるということである．

定義 5.4 (1) 連続準同型 $\psi\colon L_{\mathbb{Q}}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to\widehat{G}=\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ であって以下の条件を満たすものを G の**大域 A パラメータ**と呼ぶ：

- $\psi|_{L_{\mathbb{Q}}}\colon L_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ と $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を合成したものは半単純表現である．
- $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は代数的表現である．

G の A パラメータの $\widehat{G}$ 共役類全体を $\Psi(G)$ と書く．

(2) $\psi \in \Psi(G)$ に対し，$S_\psi = \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\psi)$ とおく（Cent は中心化群を表す）．S_ψ が有限群であるとき，ψ は**離散的**であるという．離散的な A パラメータの $\widehat{G}$ 共役類全体を $\Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ と書く．

定義 5.5 $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ とする．$\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ であって以下の条件を満たすもの全体を $\mathcal{A}_\psi(G)$ と書く：

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ の有限部分集合 S で以下を満たすものが存在する：

- $\infty \in S$.
- $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \setminus S$ ならば，π_p は不分岐である．さらに，π_p の佐武パラメータを $\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi_p} \colon W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p} \to \widehat{G} = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ とすると[*9]，合成

$$L_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} W_{\mathbb{Q}_p} \to W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi_p}} \widehat{G}$$

は合成

$$L_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\alpha} L_{\mathbb{Q}_p} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to L_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \widehat{G}$$

と $\widehat{G}$ 共役である．ここで，α は $u \mapsto \left(u, \begin{pmatrix} |u|^{1/2} & 0 \\ 0 & |u|^{-1/2} \end{pmatrix}\right)$ によって定まる準同型である．ただし，$|u|$ は合成 $L_{\mathbb{Q}_p} \to W^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\mathrm{Art}^{-1}_{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{|-|_p} \mathbb{R}_{>0}$ による $u \in L_{\mathbb{Q}_p}$ の像を表す．

定義から明らかに，$\mathcal{A}_\psi(G)$ は $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ の近同値類である．また，$\psi, \psi' \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ が相異なるならば $\mathcal{A}_\psi(G) \cap \mathcal{A}_{\psi'}(G) = \varnothing$ であることが，[JS81] および [GGP12, Theorem 8.1] から分かる．

定理 5.6（近同値類への分割） $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G) = \coprod_{\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)} \mathcal{A}_\psi(G)$ が成り立つ．

注意 5.7 $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq 1$ である場合，$\pi \in \mathcal{A}_\psi(G)$ に対して $S \subset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ を定義 5.5 のようにとると，$p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \setminus S$ において $\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi_p}$ の像は有界とならない．これは，π_p が緩増加表現でないということを意味している．$G(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現で Ramanujan 予想を満

[*9] [Bor79, §7.1] より，$G(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現の同型類は $\widehat{G}$ の半単純共役類と一対一に対応する．ここでは，それを準同型 $\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi_p} \colon W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p} \to \widehat{G}$ と同一視している．局所類体論と整合的になるように，同一視の際に用いる $W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}$ の生成元としては，幾何学的 Frobenius 元の持ち上げをとる．

たさないものがあることはよく知られているが，そのような保型表現は $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq 1$ となる ψ に対する $\mathcal{A}_\psi(G)$ に属することになる．

次の目標は，$\mathcal{A}_\psi(G)$ を ψ を用いて記述することである．このために，各素点 v に対し，局所 A パケット Π_{ψ_v} というものを考える．これはおおむね，$\mathcal{A}_\psi(G)$ の元 π の局所成分 π_v として現れる $G(\mathbb{Q}_v)$ の表現を全て集めたものである．

まず，A パラメータの局所版を定義する．

定義 5.8 (1) v を $\mathbb{Q}$ の素点とする．連続準同型 $\psi\colon L_{\mathbb{Q}_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G} = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ であって以下の条件を満たすものを G の v における**局所 A パラメータ**と呼ぶ：

- ψ による $L_{\mathbb{Q}_v}$ の像は有界である．
- $\psi|_{L_{\mathbb{Q}_v}}: L_{\mathbb{Q}_v} \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ と $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を合成したものは半単純表現である．
- $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は代数的表現である．

G の v における局所 A パラメータの $\widehat{G}$ 共役類全体を $\Psi_v(G)$ と書く．

(2) $\psi \in \Psi_v(G)$ に対し，$S_\psi = \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\psi)$ とおく．さらに，$\mathfrak{S}_\psi = \pi_0(S_\psi/Z(\widehat{G}))$ とおく（$Z(\widehat{G})$ は $\widehat{G}$ の中心 $\{\pm 1\}$ を表し，$\pi_0(-)$ は連結成分のなす群を表す）．$\mathfrak{S}_\psi$ は有限アーベル群となる（具体的な計算については [三枝 4, 例 2.10] を参照）．$\mathfrak{S}_\psi$ の指標全体を $\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ と書く．

注意 5.9 Ramanujan 予想 (仮定 5.2) を用いると，$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ に対し，$\psi_v\colon L_{\mathbb{Q}_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to L_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \widehat{G}$ が $\Psi_v(G)$ の元を与えることを示すことができる．

注意 5.10 局所 A パラメータとよく似た概念として，局所 L パラメータがある．G の v における**局所 L パラメータ**とは，連続準同型 $\phi\colon L_{\mathbb{Q}_v} \to \widehat{G} = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ であって，ϕ と $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の合成が半単純表現であるようなもののことである．G の v における局所 L パラメータの $\widehat{G}$ 共役類全体を $\Phi_v(G)$ と書く．

$\phi \in \Phi_v(G)$ の像 $\mathrm{Im}\,\phi$ が有界になるとき，ϕ は緩増加であるという．局所 A パラメータ ψ で $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ を満たすものは，緩増加 L パラメータと同一視できる．

定理 5.11（局所 Arthur 分類） v を $\mathbb{Q}$ の素点とする．

(1) $\psi \in \Psi_v(G)$ に対し，$G(\mathbb{Q}_v)$ の既約ユニタリ表現の同型類の有限集合[*10] Π_ψ お

[*10] [Art13] においては Π_ψ は多重集合として定義されていたが，[Mœg11], [Xu17] により，v が有

よび写像 $\Pi_\psi \to \widehat{\mathfrak{S}}_\psi;\ \pi \mapsto \langle -, \pi\rangle$ を定義することができる．Π_ψ を ψ に対応する**（局所）*A* パケット**と呼ぶ．Π_ψ および $\Pi_\psi \to \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ はエンドスコピー指標関係式による特徴付けを持つ（[三枝 4, §2.2] を参照）．

(2) v が有限素点であり，$\psi \in \Psi_v(G)$ が $\psi|_{I_{\mathbb{Q}_v}\times \mathrm{SU}(2)\times\{1\}} = 1$ を満たすとする．このとき，Π_ψ は唯一の不分岐表現 π^{ur} を含み，$\langle -, \pi^{\mathrm{ur}}\rangle = 1$ である．π^{ur} の佐武パラメータは $L_{\mathbb{Q}_v} \xrightarrow{\alpha} L_{\mathbb{Q}_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \widehat{G}$ で与えられる．

$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ となるような $\psi \in \Psi_v(G)$ に対する A パケット Π_ψ（この場合は L パケットと呼ばれる）の振舞いは比較的分かりやすい．Π_ψ は緩増加表現のみからなり，$G(\mathbb{Q}_v)$ の既約緩増加表現の同型類全体は $\coprod_{\psi\in\Psi_v(G),\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}=1} \Pi_\psi$ に一致する．v が有限素点ならば，写像 $\Pi_\psi \to \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ は全単射である．つまり，$G(\mathbb{Q}_v)$ の既約緩増加表現が，$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ となる $\psi \in \Psi_v(G)$（すなわち，緩増加な L パラメータ $\psi \in \Phi_v(G)$），および $\mathfrak{S}_\psi$ の指標 ρ の組 (ψ, ρ) で分類されるということになる．これを G の**局所 Langlands 対応**と呼ぶ[*11]．今考えている $G = \mathrm{PGSp}_4$ の場合（より一般に，$G = \mathrm{GSp}_4$ の場合）には，Gan-Takeda [GT11a] によって，$\mathrm{GL}_2, \mathrm{GL}_4$ の局所 Langlands 対応とテータ対応を用いて（$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ となる ψ に対する）L パケット Π_ψ が具体的に構成されている（Gan-Takeda の構成した L パケットが局所 Arthur 分類における L パケットと一致することについては，[CG15] を参照）．

その一方で，$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq 1$ となるような $\psi \in \Psi_v(G)$ に対する A パケット Π_ψ の振舞いはより複雑である．一般には異なる 2 つの A パケットが交わることもあるし，全ての A パケットの合併が分かりやすい表現のクラスを与えるかどうかも知られていない．定理 5.11 には局所 Arthur 分類という名前がついているが，$G(\mathbb{Q}_v)$ の表現を分類しているというよりはむしろ，$\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ の分類のために必要なラベル付けを行っていると考えた方が理解しやすいと思われる．

局所 A パケットを束ねて，大域 A パケットを構成する．

限素点のときには Π_ψ の各元の重複度が 1 であることが示された．一方，v が無限素点の場合には，Mœglin や Renard による研究 [Mœg17], [MR18], [MR] があるものの，同様のことが成り立つかどうかは完全には分かっていないため，それは「仮定」として要請することにする．なお，後に必要となるのは ψ_∞ が「コホモロジー的」という条件を満たす場合のみであり，その場合には [AMR15] によって重複度が 1 であることが分かっている．

*11 Langlands 分類を用いると，この分類結果を，$G(\mathbb{Q}_v)$ の既約許容表現全体の分類へと拡張することができる．その際には，緩増加とは限らない L パラメータ $\phi \in \Phi_v(G)$ が現れる．

定義 5.12 $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ に対し，**大域 A パケット** Π_ψ を以下のように定める：

$$\Pi_\psi = \Bigl\{ \bigotimes_v{}' \pi_v \Bigm| \pi_v \in \Pi_{\psi_v},\ \text{ほとんど全ての } v \neq \infty \text{ に対し } \pi_v \text{ は不分岐} \Bigr\}.$$

これは $G(\mathbb{A})$ の保型的とは限らない既約ユニタリ表現の同型類からなる集合である．定義 5.8 と同様に $\mathfrak{S}_\psi = \pi_0(S_\psi/Z(\widehat{G}))$ とおくと[*12]，$\mathbb{Q}$ の各素点 v に対し自然な準同型 $\mathfrak{S}_\psi \to \mathfrak{S}_{\psi_v}$ が定まる．これを $s \mapsto s_v$ と書く．

$\pi \in \Pi_\psi$ および $s \in \mathfrak{S}_\psi$ に対して $\langle s,\pi\rangle = \prod_v \langle s_v, \pi_v\rangle$ と定めることで，写像 $\Pi_\psi \to \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ が定まる．

いよいよ $\mathcal{A}_\psi(G)$ を記述することができる．

定理 5.13（大域 Arthur 分類） $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ に対し，ある指標 $\varepsilon_\psi \in \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ が存在して，以下を満たす：

$$\mathcal{A}_\psi(G) = \{\pi \in \Pi_\psi \mid \langle -,\pi\rangle = \varepsilon_\psi\}.$$

ε_ψ は具体的に記述することができ，$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ ならば $\varepsilon_\psi = 1$ である（ε_ψ の定義は [三枝 4, 定義 2.21] を参照）．

さらに，任意の $\pi \in \mathcal{A}_\psi(G)$ に対し，$m(\pi) = 1$ である．

■具体的な記述 以下では，[Art04], [Sch18] に従い，$\psi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ を具体的に記述しよう．$r\colon \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を自然な埋め込みとすると，$L_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の 4 次元シンプレクティック表現 $r \circ \psi$ は以下の 6 通りに分類される（整数 $m \geq 1$ に対し，$\nu[m]$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の唯一の m 次元既約代数的表現を表すものとする）：

(1) $\phi_\tau \boxtimes \nu[1]$（$\tau$ は中心指標が自明な $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現，$L(s,\tau,\wedge^2)$ は $s=1$ で極を持つ[*13]）．

(2) $(\phi_{\tau_1} \oplus \phi_{\tau_2}) \boxtimes \nu[1]$（$\tau_1$, τ_2 は中心指標が自明な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現，$\tau_1 \not\cong \tau_2$）．

(3) $\phi_\tau \boxtimes \nu[2]$（$\tau$ は中心指標が非自明な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現，$\tau \cong \tau^\vee$）．

(4) $(\phi_\tau \boxtimes \nu[1]) \oplus (\phi_\chi \boxtimes \nu[2])$（$\tau$ は中心指標が自明な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現，χ は $\chi^2 = 1$ を満たす Hecke 指標）．

---

*12 この場合，$\mathfrak{S}_\psi$ は $S_\psi/Z(\widehat{G})$ に一致する．

*13 この条件は ϕ_τ がシンプレクティックであることと同値である．これも [Art13] の主定理の一つである．

(5) $(\phi_{\chi_1}\oplus\phi_{\chi_2})\boxtimes\nu[2]$（$\chi_1$, χ_2 は $\chi_1^2=\chi_2^2=1$ を満たす Hecke 指標，$\chi_1\neq\chi_2$）.
(6) $\phi_\chi\boxtimes\nu[4]$（χ は $\chi^2=1$ を満たす Hecke 指標）.

それぞれの場合，$\mathfrak{S}_\psi$ および ε_ψ は以下のようになる：

(1) $\mathfrak{S}_\psi=1$, $\varepsilon_\psi=1$.
(2) $\mathfrak{S}_\psi=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\varepsilon_\psi=1$.
(3) $\mathfrak{S}_\psi=1$, $\varepsilon_\psi=1$.
(4) $\mathfrak{S}_\psi=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\varepsilon_\psi=\begin{cases}1 & \varepsilon(\frac{1}{2},\tau\otimes\chi^{-1})=1,\\ \mathrm{sgn} & \varepsilon(\frac{1}{2},\tau\otimes\chi^{-1})=-1.\end{cases}$
(5) $\mathfrak{S}_\psi=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\varepsilon_\psi=1$.
(6) $\mathfrak{S}_\psi=1$, $\varepsilon_\psi=1$.

$K_\infty=\mathbb{R}_{>0}\,\mathrm{U}(2)\subset\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ の $G(\mathbb{R})=\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{R})$ における像をまた K_∞ と書く．これは $G(\mathbb{R})$ の極大連結コンパクト部分群である．ψ_∞ に関して以下の条件 (Coh) を仮定しよう：

(Coh) Π_{ψ_∞} の元 π であって $H^*(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K_\infty;\pi)\neq 0$ を満たすものが存在する.

このような ψ_∞ は（自明表現 $\mathbf{1}$ に関する）コホモロジー的 A パラメータ，Adams-Johnson パラメータ等と呼ばれ，比較的簡単な特徴付けを持つ．[AJ87], [Kot90, §9], [Art89b, §5] 等を参照.

(1), (2) の場合，$\psi_\infty|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}=1$ が成り立つ．このとき，コホモロジー的 A パラメータの特徴付けから，ψ_∞ は離散的である，すなわち S_{ψ_∞} は有限群であることが分かる．さらにこのとき，$r\circ\psi_\infty=\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_\mathbb{R}}\theta_{3,0}\oplus\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_\mathbb{R}}\theta_{1,0}$（記号は命題 4.1 を参照）であり，$\mathfrak{S}_\psi=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．特に (2) の場合には，$(\tau_{1,\infty},\tau_{2,\infty})$ は $(D_{3,0},D_{1,0})$ または $(D_{1,0},D_{3,0})$ のいずれかである．L パケット Π_{ψ_∞} は自明表現 $\mathbf{1}$ と同じ中心指標および無限小指標を持つ離散系列表現の同型類全体の集合 $\Pi_{\mathrm{disc},\mathbf{1}}$ と一致する．$\Pi_{\mathrm{disc},\mathbf{1}}$ は生成的な離散系列表現 π^{gen} と正則離散系列表現 π^{hol} の 2 元からなり，$\langle -,\pi^{\mathrm{gen}}\rangle=1$, $\langle -,\pi^{\mathrm{hol}}\rangle=\mathrm{sgn}$ が成り立つ．$(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K_\infty)$ コホモロジーは以下の通りである：

$$\dim H^i(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K_\infty;\pi^{\mathrm{gen}})=\dim H^i(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K_\infty;\pi^{\mathrm{hol}})=\begin{cases}2 & i=3,\\ 0 & i\neq 3.\end{cases}$$

(3), (4), (5) の場合の Π_{ψ_∞} については，[Sch] に詳しい記述がある．(3) の場合，仮定 (Coh) のもとで，$r\circ\psi_\infty=\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_\mathbb{R}}\theta_{2,0}\boxtimes\nu[2]$ となる．特に $\tau_\infty\cong D_{2,0}$ である.

$\mathfrak{S}_{\psi_\infty} = 1$ であり，局所 A パケット Π_{ψ_∞} は 1 つの非緩増加表現からなる．$\pi \in \Pi_{\psi_\infty}$ の $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty)$ コホモロジーは以下の通りである：

$$\dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \pi) = \begin{cases} 2 & i = 2, 4, \\ 0 & i \neq 2, 4. \end{cases}$$

(4) の場合，仮定 (Coh) のもとで，$r \circ \psi_\infty = (\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{3,0} \boxtimes \nu[1]) \oplus (\chi_\infty \boxtimes \nu[2])$ となる．特に $\tau_\infty \cong D_{3,0}$ である．$\mathfrak{S}_{\psi_\infty} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．局所 A パケット Π_{ψ_∞} は非緩増加表現 π^{nt} および前出の正則離散系列表現 π^{hol} の 2 元からなり，$\langle -, \pi^{\mathrm{nt}} \rangle = 1$, $\langle -, \pi^{\mathrm{hol}} \rangle = \mathrm{sgn}$ が成り立つ．π^{nt} の $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty)$ コホモロジーは以下の通りである (π^{hol} については既に述べた)：

$$\dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \pi^{\mathrm{nt}}) = \begin{cases} 1 & i = 2, 4, \\ 0 & i \neq 2, 4. \end{cases}$$

(5) の場合，仮定 (Coh) が満たされることはない．

(6) の場合, 大域 A パケット Π_ψ は 1 元 $\chi \circ \mathrm{sim}$ のみからなる (sim: $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}^\times$ は相似指標を表す．$\chi^2 = 1$ より $\chi \circ \mathrm{sim}$ の中心指標は自明となり，$G(\mathbb{A})$ の保型表現とみなせることに注意)．$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty)$ コホモロジーは以下の通りである：

$$\dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \chi \circ \mathrm{sim}) = \begin{cases} 1 & i = 0, 2, 4, 6 \\ 0 & i \neq 0, 2, 4, 6. \end{cases}$$

上で紹介した $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty)$ コホモロジーの計算は [VZ84] を用いることで行われる．計算結果は [Tay93, p. 293] に記載されている．

注意 5.14 本節では仮定 5.1 および仮定 5.2 のもとで Arthur 分類を述べたが，[Art13] においては，これらを仮定することなく $\mathrm{PGSp}_4 = \mathrm{SO}_5$ の Arthur 分類が定式化・証明されている．したがって，次節以降で PGSp_4 の Arthur 分類に基づいて述べる結果（例えば定理 6.1）も，これらの仮定に依存せずに定式化・証明が可能である．

6 GSp_4 の志村多様体のエタールコホモロジー

本節では，志村データとして $(\mathrm{GSp}_4, \mathfrak{H}_2^\pm)$ を考える．$K_\infty = \mathbb{R}_{>0}\,\mathrm{U}(2)$ とおくと，$\mathfrak{H}_2^\pm = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})/K_\infty$ である．リフレックス体は $\mathbb{Q}$ であり，$\{\mathrm{Sh}_K\}_{K \subset G(\mathbb{A}_f)}$

は主偏極付きアーベル多様体のモジュライ空間として構成できる（[越川] 参照）．$\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4)$ の中心指標が自明であるとし，$\pi \in \mathcal{A}_\psi(G)$ となる $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ をとる（G は前節の通り PGSp_4 を表すものとする）．前節の考察をもとに，交叉コホモロジー $IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に現れる $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の表現 $IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]$ を考えよう．

定理 6.1 (1) τ を中心指標が自明な $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現であって $L(s,\tau,\wedge^2)$ が $s=1$ で極を持つようなものとする．$r\circ\psi = \phi_\tau \boxtimes \nu[1]$ であるとき，

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] = \begin{cases} 4 & i=3 \\ 0 & i\neq 3 \end{cases}$$

である．$p\neq\ell$ を $\mathbb{Q}$ の有限素点であって π_p が不分岐であるものとする（このとき τ_p も不分岐である）．$IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]$ は p において不分岐であり，Frob_p の作用の固有値は

$$p^{3/2}z_1(\tau_p)^{-1},\quad p^{3/2}z_2(\tau_p)^{-1},\quad p^{3/2}z_3(\tau_p)^{-1},\quad p^{3/2}z_4(\tau_p)^{-1}$$

で与えられる[*14]．

(2) τ_1, τ_2 を中心指標が自明な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現であって $\tau_{1,\infty}\cong D_{3,0}$, $\tau_{2,\infty}\cong D_{1,0}$ を満たすものとする．$r\circ\psi = (\phi_{\tau_1}\oplus\phi_{\tau_2})\boxtimes\nu[1]$ であるとき，

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] = \begin{cases} 2 & i=3 \\ 0 & i\neq 3 \end{cases}$$

である．さらに，

$$IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]^{\mathrm{ss}} \cong \begin{cases} \rho^\vee_{\tau_2\otimes|\det|^{3/2}} & \pi_\infty\cong\pi^{\mathrm{gen}} \\ \rho^\vee_{\tau_1\otimes|\det|^{3/2}} & \pi_\infty\cong\pi^{\mathrm{hol}} \end{cases}$$

が成り立つ．左辺の $(-)^{\mathrm{ss}}$ は半単純化を表す．また，右辺の $\rho_{\tau_j\otimes|\det|^{3/2}}$ ($j=1,2$) は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の正則 L 代数的な尖点的保型表現 $\tau_j\otimes|\det|^{3/2}$ に定義 4.22 の意味で対応する $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元半単純 ℓ 進表現である．

(3) τ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現であって $\tau\cong\tau^\vee$, $\tau_\infty\cong D_{2,0}$ を満たすものとする．$r\circ\psi=\phi_\tau\boxtimes\nu[2]$ であるとき，

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] = \begin{cases} 2 & i=2,4 \\ 0 & i\neq 2,4 \end{cases}$$

[*14] 定理 4.26 のもとで，これは $IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]^{\mathrm{ss}} \cong \rho^\vee_{\tau\otimes|\det|^{3/2}}$ と言い換えることができる（$(-)^{\mathrm{ss}}$ は半単純化を表す）．

である．さらに，$i=2,4$ に対し，

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]^{\mathrm{ss}}\cong\rho^\vee_{\tau\otimes|\det|^{i/2}}$$

が成り立つ．

(4) τ を中心指標が自明な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現であって $\tau_\infty\cong D_{3,0}$ を満たすものとする．また，χ を Hecke 指標 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\to\mathbb{C}^\times$ であって $\chi^2=1$ を満たすものとする．$r\circ\psi=(\phi_\tau\boxtimes\nu[1])\oplus(\phi_\chi\boxtimes\nu[2])$ であるとき，
- $\pi_\infty\cong\pi^{\mathrm{hol}}$ ならば

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]=\begin{cases}2 & i=3\\ 0 & i\neq 3\end{cases}$$

である．さらに，

$$IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]^{\mathrm{ss}}\cong\rho^\vee_{\tau\otimes|\det|^{3/2}}$$

が成り立つ．
- $\pi_\infty\cong\pi^{\mathrm{nt}}$ ならば

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]=\begin{cases}1 & i=2,4\\ 0 & i\neq 2,4\end{cases}$$

である．さらに，$i=2,4$ に対し

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]\cong(\chi^{-1}\circ\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}^{-1})(-i/2)$$

が成り立つ．

(6) (ψ の分類と番号付けを合わせるため，(5) を飛ばしている．) χ を Hecke 指標 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\to\mathbb{C}^\times$ であって $\chi^2=1$ を満たすものとする．$r\circ\psi=\phi_\chi\boxtimes\nu[4]$ であるとき，

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]=\begin{cases}1 & i=0,2,4,6\\ 0 & i\neq 0,2,4,6\end{cases}$$

である．さらに，$i=0,2,4,6$ に対し，

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]\cong(\chi^{-1}\circ\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}^{-1})(-i/2)$$

が成り立つ．

注意 6.2 (1), (2), (3), (4), (6) いずれの場合も，$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]^{\mathrm{ss}}$ は，$L_{\mathbb{Q}}$ の 4 次元半単純表現

$$L_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\alpha} L_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \widehat{G} = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) \xhookrightarrow{r} \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$$

（α は定義 5.5 と同様に定める*15）に $|-|^{3/2}$ をテンソルして双対をとったものの直和因子と定義 4.29 の意味で対応している．

注意 6.3 交叉コホモロジーに関する強 Lefschetz 定理（[Del80, Théorème 6.2.13], [BBDG18, Théorème 5.4.10], [KW01, Theorem 4.1] を参照）より，$i \geq 0$ に対し，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f) \times \Gamma_{\mathbb{Q}}$ 同変な同型 $IH^{3-i}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\cong} IH^{3+i}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)(i)$ があることが分かる．このことから，$\Gamma_{\mathbb{Q}}$ 同変な同型

$$IH^{3-i}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] \cong IH^{3+i}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f](i)$$

を得る．定理 6.1 はこれと整合的になっていることが見てとれる．

この定理については，[Tay93], [Lau97], [Wei09], [Mor11] 等で扱われている．

定理 6.1 の証明は 8 節以降で解説される（最終的には 10 節で，(1) と (2) について，π について多少の条件を課した上で証明を行う）．ここでは，コホモロジーの次元を決定する部分のみ証明を与えておく．

定理 6.1 の次元に関する部分の証明 定理 3.3 より，

$$\dim IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f] = \sum_{\substack{\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G) \\ \pi'_f \cong \pi_f}} m(\pi') \dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \pi'_\infty)$$

が成り立つことをまず思い出しておく（$G = \mathrm{PGSp}_4$ であった）．定理 5.13 より，

$$\{\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G) \mid \pi'_f \cong \pi_f\} = \{\pi_f \otimes \sigma \mid \sigma \in \Pi_{\psi_\infty}, \langle -,\sigma\rangle|_{\mathfrak{S}_\psi} = \langle -,\pi_\infty\rangle|_{\mathfrak{S}_\psi}\}$$

である．ただし，$\langle -,\sigma\rangle|_{\mathfrak{S}_\psi}$ は合成 $\mathfrak{S}_\psi \to \mathfrak{S}_{\psi_\infty} \xrightarrow{\langle -,\sigma\rangle} \mathbb{C}^\times$ を表す．$\langle -,\pi_\infty\rangle|_{\mathfrak{S}_\psi}$ も同様である．

*15 α の定義には $|-|\colon L_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}_{>0}$ が必要である．これは，以下の条件を満たす連続準同型として一意的に定まる：任意の連続指標 $\chi\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}^\times$ に対し，$\chi \circ |-|\colon L_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^\times$ は $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 $\chi \circ |\det|$ に対応する．

まず (1) の場合には，$\mathfrak{S}_\psi = 1$ に注意すると，

$$\{\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G) \mid \pi'_f \cong \pi_f\} = \{\pi_f \otimes \pi^{\mathrm{gen}}, \pi_f \otimes \pi^{\mathrm{hol}}\}$$

が成り立つ．これと

$$m(\pi_f \otimes \pi^{\mathrm{gen}}) = m(\pi_f \otimes \pi^{\mathrm{hol}}) = 1$$
$$\dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \pi^{\mathrm{gen}}) = \dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \pi^{\mathrm{hol}}) = \begin{cases} 2 & i = 3, \\ 0 & i \neq 3 \end{cases}$$

より，主張が従う．

次に (2) の場合を考える．この場合には $\mathfrak{S}_\psi \to \mathfrak{S}_{\psi_\infty}$ が同型であるから，

$$\{\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G) \mid \pi'_f \cong \pi_f\} = \{\pi\}$$

が成り立つ．これと $m(\pi) = 1$ および上述の $H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \pi^{\mathrm{gen}})$, $H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \pi^{\mathrm{hol}})$ の次元の計算より主張が従う．

(3), (4), (6) も同様である． □

7 より一般の場合について

より一般の志村データ (G, X) に対する交叉コホモロジー $IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{F}_\xi)$ については，Kottwitz が [Kot90] において提出した予想がある．本節ではこの Kottwitz の予想についてごく簡単に紹介を行う．詳細は [三枝 4, §3.2] を参照していただきたい．本節では，仮定 3.1 に加え，G_{der} が単連結であると仮定する（[Kot90, p. 162] 参照）．

■Arthur 分類　まず，G の Arthur 分類については，基本的に局所および大域 A パラメータを以下のように置き換えることで同様に定式化することができる（これは一般には未解決な予想である）．

定義 7.1　v を $\mathbb{Q}$ の素点とする．連続準同型 $\psi\colon L_{\mathbb{Q}_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{Q}_v}$ [*16]で以下の条件を満たすものを，G の v における局所 A パラメータという：

- ψ は自然な射影 $L_{\mathbb{Q}_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to W_{\mathbb{Q}_v}$, $\widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{Q}_v} \to W_{\mathbb{Q}_v}$ を保つ．

[*16] $\widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{Q}_v}$ は通常 ${}^L G$ と書かれるが，v との関係を明示するため，ここでは敢えてこのように書いている．

- 合成写像 $L_{\mathbb{Q}_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{Q}_v} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \widehat{G}$ による $L_{\mathbb{Q}_v}$ の像は有界である．
- $\psi|_{L_{\mathbb{Q}_v}}$ の像は半単純元からなる．ただし，$(g,\sigma) \in \widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{Q}_v}$ が半単純であるとは以下の条件を満たすこととする：G がその上で分裂するような $\mathbb{Q}_v$ の有限次 Galois 拡大体 L をとり，$d = [L : \mathbb{Q}_v]$ とおくと，$g\sigma(g) \cdots \sigma^{d-1}(g) \in \widehat{G}$ は半単純である．
- $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G}$ は代数的な準同型である．

大域 A パラメータも同様に定める（$\widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{Q}_v}$ の代わりに $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{\mathbb{Q}}$ を用いる）．

注意 7.2 注意 5.10 と同様に，G の v における局所 L パラメータを定義することもできる．

ψ を $\mathbb{Q}$ の素点 v における局所 A パラメータとする．$G_{\mathbb{Q}_v}$ が準分裂であるときには，$\mathfrak{S}_\psi = \pi_0(\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\psi)/Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})$ が PGSp_4 のときの $\mathfrak{S}_\psi$ と同様の役割を果たす．一方，$G_{\mathbb{Q}_v}$ が準分裂でないときには，$G_{\mathbb{Q}_v}$ に付加構造をつけた上で $\mathfrak{S}_\psi$ を適切に修正する必要がある．[三枝 4, §2.6] を参照．一方，大域 A パラメータ ψ に対する $\mathfrak{S}_\psi$ は $\pi_0(\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}\,\psi)/Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})$ を用いればよいと思われている．

注意 7.3 実は，上記の A パラメータを用いるだけでは，ユニタリな離散的保型表現，すなわち，$\bigcup_{|\omega|=1} \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)$ の元しか捉えることができない．一方で，非自明な局所系を係数に持つ交叉コホモロジーを考える際には，ユニタリとは限らない離散的保型表現に対する大域 Arthur 分類が必要となる．そのためには，指標 $A_G(\mathbb{R})^+ \to \mathbb{R}_{>0}$ を一つ固定し，それを $G(\mathbb{A})^1$ 上自明に延長することで得られる指標 $G(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}_{>0}$ によってユニタリな離散的保型表現を捻ったものを考えればよい．それに合わせて，A パラメータに対する有界性の条件を少し変更する必要があるが，詳細は省略する．

■$\widehat{G} \rtimes \Gamma_E$ の表現 r_μ $G = \mathrm{GSp}_4$ の場合には，埋め込み $r \colon \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ が交叉コホモロジーを記述する鍵の一つとなっていた（注意 6.2 参照）．これの一般化を与えよう．

定義 7.4 $\mu \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ を志村データから（共役を除いて）定まる余指標とする（[今井, §5] 参照）．これは $\widehat{G}$ の極大トーラスの指標と同一視できる．この指標を最高ウェイトに持つような $\widehat{G}$ の既約代数的表現を $r_\mu \colon \widehat{G} \to \mathrm{GL}(V_\mu)$ と書く．リフレックス体 E の定義より，r_μ は準同型 $\widehat{G} \rtimes \Gamma_E \to \mathrm{GL}(V_\mu)$ に延長することができる．この

準同型も r_μ と書く．

例 7.5 (1) $(G,X)=(\mathrm{GL}_2,\mathfrak{H}_1^{\pm})$ のとき，$\mu\colon z\mapsto \mathrm{diag}(z,1)$ であり，これを $\widehat{G}$ の対角トーラスの指標と同一視したものは $\mathrm{diag}(t_1,t_2)\mapsto t_1$ である（いずれも共役の任意性がある）．よって r_μ は自然表現 $\widehat{G}=\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\xrightarrow{\mathrm{id}}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ である．

(2) $(G,X)=(\mathrm{GSp}_4,\mathfrak{H}_2^{\pm})$ のとき，r_μ は自然表現 $\widehat{G}=\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ である．より一般に $(G,X)=(\mathrm{GSp}_{2n},\mathfrak{H}_n^{\pm})$ のとき，r_μ はスピノル表現 $\widehat{G}=\mathrm{GSpin}_{2n+1}(\mathbb{C})\xrightarrow{\mathrm{spin}}\mathrm{GL}_{2^n}(\mathbb{C})$ である（$n=2$ の場合は spin によって $\mathrm{GSpin}_5(\mathbb{C})\xrightarrow{\cong}\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ だったので，これによって $\widehat{G}=\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ と見ていた）．

E に対する仮説的 Langlands 群 L_E の存在も仮定する．L_E は自然な準同型 $L_{\mathbb{Q}}\to\Gamma_{\mathbb{Q}}$ による Γ_E の逆像となっているはずである．$\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ に対し，

$$L_E\xrightarrow{\alpha}L_E\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\xrightarrow{\psi|_{L_E\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}}\widehat{G}\rtimes\Gamma_E\xrightarrow{r_\mu}\mathrm{GL}(V_\mu)$$

の合成に $|-|^{(\dim\mathrm{Sh}_K)/2}$ をテンソルしたものを $r_\mu(\psi)$ と書く．さらに，$r_\mu(\psi)$ の $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ によるウェイト分解を $r_\mu(\psi)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}r_\mu^i(\psi)$ と書く．

■Kottwitz の予想

$$\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi=\{\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)\mid \Pi_{\psi_\infty}\ \text{は}\ \xi\ \text{に関してコホモロジー的な表現を含む}\}$$

とおく．また，$\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ に対し，

$$\Pi_{\psi_f}=\Bigl\{\sideset{}{'}\bigotimes_{v\neq\infty}\pi_v\ \Bigm|\ \pi_v\in\Pi_{\psi_v},\ \text{ほとんど全ての}\ v\ \text{に対し}\ \pi_v\ \text{は不分岐}\Bigr\}$$

とおく．このとき，$\pi_f\in\Pi_{\psi_f}$ に対して $S_\psi=\mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}(\psi))$ の指標 ν_{π_f} を定めることができる（[三枝 4, §3.2] および [Kot90, §9] を参照）．

Kottwitz の予想は以下の通りである：

予想 7.6（[Kot90, §10]） (1) $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$, $\pi_f\in\Pi_{\psi_f}$, $i\in\mathbb{Z}$ に対し，L_E の半単純表現 $r_\mu^i(\psi)[\nu_{\pi_f}]$ に対応する Γ_E の半単純 ℓ 進表現 $r_\mu^i(\psi)[\nu_{\pi_f}]_\ell$ が存在する．

(2) 整数 i に対し以下が成り立つ：

$$IH^{i+\dim\mathrm{Sh}_K}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{F}_\xi)^{\mathrm{ss}}\cong\bigoplus_{\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi}\ \bigoplus_{\pi_f\in\Pi_{\psi_f}}\pi_f\otimes r_\mu^i(\psi)[\nu_{\pi_f}]_\ell^\vee.$$

注意 7.7 上の予想と強 Lefschetz 定理（注意 6.3 参照）の関係については，[三枝 4, 注意 3.11] を参照.

注意 7.8 一般の G に対しては, 相異なる 2 つの大域 A パラメータ $\psi, \psi' \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ に対し Π_{ψ_f} と $\Pi_{\psi'_f}$ が交わりを持つ可能性があるため，予想の定式化がやや複雑になっている．$\psi \neq \psi'$ ならば $\Pi_{\psi_f} \cap \Pi_{\psi'_f} = \varnothing$ である場合には，以下のように定式化してもよい.

$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ および $\pi_f \in \Pi_{\psi_f}$ に対し，Γ_E の半単純 ℓ 進表現

$$IH^{i+\dim \mathrm{Sh}_K}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{F}_\xi)[\pi_f]^{\mathrm{ss}}$$

は L_E の半単純表現 $r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi_f}]^\vee$ に対応する.

8 PEL 型志村多様体の Lefschetz 数

8.1 共役類に関する補足

定理 6.1 の証明は，モジュラー曲線の場合（4 節参照）とおおむね同様の手順で行われる．すなわち，まず整正準モデルの還元における Lefschetz 数を軌道積分等で表し，その表示を Arthur-Selberg 跡公式を用いて保型表現の指標と結び付けることで証明される．本節では，より一般に，PEL 型志村多様体の Lefschetz 数の計算について解説を行う．モジュラー曲線の場合と比べて，技術的に最も大きな変更が必要となるのは次の点である：

- F を標数 0 の体とし，$\overline{F}$ をその代数閉包とする．$G = \mathrm{GL}_2$（より一般に GL_n）の場合は，$x, x' \in G(F)$ が $G(F)$ 内で共役であることと $G(\overline{F})$ 内で共役であることは同値であるが，G が一般の簡約代数群のときはこれは成立しない.

$x, x' \in G(F)$ が安定共役であるとは，概ね $G(\overline{F})$ 内で共役であることをいう．共役と安定共役の違いは，Lefschetz 数の計算の際にも，Arthur-Selberg 跡公式の適用の際にも問題となってくる（跡公式に関する説明は 9 節で与える）．Lefschetz 数の計算においてもう一つ相違点として現れるのは，

- モジュラー曲線の場合と異なり，Siegel モジュラー多様体をはじめとする，より一般の PEL 型志村多様体のモジュライ解釈にはアーベル多様体の偏極が現

れる

ということであるが，これについては後述することにして，本小節では安定共役等に関する用語の準備を行う．

以下では F を標数 0 の体，$\overline{F}$ をその代数閉包とする．G を F 上の連結簡約代数群とし，簡単のため，その導来群 G_{der} は単連結であると仮定する（$G = \mathrm{GSp}_4$ はこの仮定を満たす）．

定義 8.1 $x, x' \in G(F)$ とする．これらが $G(F)$ 内で共役であるとき，$x \sim x'$ と書く．x, x' が $G(\overline{F})$ 内で共役であるとき，x と x' は**安定共役**であるといい，$x \overset{\mathrm{st}}{\sim} x'$ と書く．

注意 8.2 G_{der} が単連結でないときには，安定共役の定義はもう少し複雑である．[Kot82, §3] を参照．

例 8.3 (1) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の 2 元

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$(a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1)$ は安定共役であるが，$b \neq 0$ のとき共役ではない．

(2) $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ のとき，半単純元 $g, g' \in \mathrm{Sp}_{2n}(F)$ が安定共役であることは，g, g' が $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ において共役であることと同値である ($\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{F})$ 共役と $\mathrm{GL}_{2n}(\overline{F})$ 共役が同値であることを示せばよいが，これについては [Gon10] に短い証明がある)．また，$2n$ 次モニック多項式 $f(T) \in F[T]$ が $f(T) = T^{2n} f(1/T)$ を満たすならば，半単純元 $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(F)$ であって $\det(T \cdot I_{2n} - g) = f(T)$（$I_{2n}$ は $2n$ 次の単位行列を表す）を満たすものが安定共役を除いて一意的に存在する（[Ste65, Theorem 1.7] 参照)．

(3) $G = \mathrm{GSp}_{2n}$ のとき，半単純元 $g, g' \in \mathrm{GSp}_{2n}(F)$ が安定共役であることは，$\mathrm{sim}(g) = \mathrm{sim}(g')$ かつ g, g' が $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ において共役であることと同値である（sim は相似指標を表す)．また，$2n$ 次モニック多項式 $f(T) \in F[T]$ および $c \in F^\times$ が $f(T) = c^{-n} T^{2n} f(c/T)$ を満たすならば，半単純元 $g \in \mathrm{GSp}_{2n}(F)$ であって $\mathrm{sim}(g) = c$ かつ $\det(T \cdot I_{2n} - g) = f(T)$ を満たすものが安定共役を除いて一意的に存在する（[Kot82, Theorem 4.4] 参照)．

$x \in G(F)$ を固定したとき，x と安定共役な $G(F)$ の元の共役類は Galois コホモロ

ジーで分類することができる．

定義 8.4 $x \in G(F)$ とし，x の中心化群を $Z_G(x)$ で表す．$x' \in G(F)$ が x と安定共役であるとき，$x' = gxg^{-1}$ となる $g \in G(\overline{F})$ をとると，任意の $\tau \in \Gamma_F$ に対し $gxg^{-1} = x' = \tau(x') = \tau(gxg^{-1}) = \tau(g)x\tau(g)^{-1}$ なので $g^{-1}\tau(g) \in Z_G(x)$ が成り立つ．よって，1 コサイクル $\Gamma_F \to Z_G(x)(\overline{F});\ \tau \mapsto g^{-1}\tau(g)$ が定まる．これのコホモロジー類は g のとり方によらないことが簡単に確認できるので，x, x' から $H^1(F, Z_G(x))$ の元が定まる．これを $\mathrm{inv}(x, x')$ と書く．定義から明らかに，$\mathrm{inv}(x, x') \in \mathrm{Ker}(H^1(F, Z_G(x)) \to H^1(F, G))$ が成り立つ．

命題 8.5（[Kot82, §3]） $x, x' \in G(F)$ が安定共役であるとする．

(1) $x'' \in G(F)$ が x' と（$G(F)$ 内で）共役ならば，$\mathrm{inv}(x, x') = \mathrm{inv}(x, x'')$ である．

(2) $x' \mapsto \mathrm{inv}(x, x')$ により，x と安定共役な元の共役類は $\mathrm{Ker}(H^1(F, Z_G(x)) \to H^1(F, G))$ の元と一対一に対応する．

注意 8.6 2.2 節の冒頭でも述べたように，$x \in G(F)$ が半単純ならば $Z_G(x)$ は連結である．この場合には，$Z_G(x)$ のことを G_x と書くのであった．

例 8.7 $F = \mathbb{R}, G = \mathrm{SL}_2$ とし，半単純元

$$x = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1,\ b \neq 0)$$

に対して $\mathrm{inv}(x, x')$ を計算してみよう．$g = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ とおくと $x' = gxg^{-1}$ である．$c \in \Gamma_{\mathbb{R}}$ を複素共役とすると，$g^{-1}c(g) = -I_2$ となる．

一方，$(\mathrm{SL}_2)_x \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{Nr}} \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{R}})$ であるから，

$$(\mathrm{SL}_2)_x(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Ker}(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\text{積}} \mathbb{C}^\times) = \mathbb{C}^\times$$

である．この同型で $c \in \Gamma_{\mathbb{R}}$ の $(\mathrm{SL}_2)_x(\mathbb{C})$ への作用は $z \mapsto \overline{z}^{-1}$ に対応する．

上記の同型を通して，$\mathrm{inv}(x, x') \in H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^\times)$ は 1 コサイクル

$$\Gamma_{\mathbb{R}} \to (\mathrm{SL}_2)_x(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times;\ 1 \mapsto 1,\ c \mapsto -1$$

が定めるコホモロジー類となる．これは非自明な元である．実際，$\mathrm{inv}(x, x')(\tau) = z^{-1}\tau(z)$ $(\tau \in \Gamma_{\mathbb{R}})$ となる $z \in \mathbb{C}^\times$ が存在したとすると，$-1 = \mathrm{inv}(x, x')(c) =$

$z^{-1}\overline{z}^{-1} = |z|^{-2} > 0$ となり矛盾が起こる．よって命題 8.5 より，x と x' は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 共役でない．

ここで，p 進体上の簡約代数群に対する Kottwitz 同型を思い出そう．以下では，F を p 進体（$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）とする．

定理 8.8 H を F 上の連結簡約代数群とするとき，自明なコホモロジー類を単位元にうつす自然な全単射 $\kappa_H\colon H^1(F,H) \xrightarrow{\cong} \pi_0(Z(\widehat{H})^{\Gamma_F})^D$ がある．ここで，$\pi_0(-)$ は連結成分のなす群を表し，$(-)^D$ は Pontryagin 双対を表す．

注意 8.9 ここでは F が p 進体であると仮定していたが，$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合にも同様の写像 $\kappa_H\colon H^1(F,H) \to \pi_0(Z(\widehat{H})^{\Gamma_F})^D$ がある．ただし，これは全単射とは限らない．

命題 8.10 $x, x', x'' \in G(F)$ を安定共役な半単純元とする．

(1) $G_{x'}$ は G_x の内部形式である．特に $\widehat{G}_x = \widehat{G}_{x'}$ が成り立つ．
(2) $\pi_0(Z(\widehat{G}_x)^{\Gamma_F})^D$ において以下の等式が成り立つ：

$$\kappa_{G_x}\bigl(\mathrm{inv}(x,x'')\bigr) = \kappa_{G_x}\bigl(\mathrm{inv}(x,x')\bigr) + \kappa_{G_{x'}}\bigl(\mathrm{inv}(x',x'')\bigr).$$

証明 (1) は [Kot82, Lemma 3.2] を参照．(2) は [Kot86, Lemma 1.4] の帰結である． □

PEL 型志村多様体の Lefschetz 数の計算の際には，共役類・安定共役類に加え，σ 共役類というものを考える必要がある（これはモジュラー曲線の場合（定理 4.12）も同様であり，p 進コホモロジーにおける Frobenius 作用が σ 線型であることに由来するものであった）．その定義を復習しておこう．

定義 8.11 $j \geq 1$ を整数とする．F を p 進体とし，その j 次不分岐拡大を F_j と書く．F_j の Frobenius 自己同型を σ と書く[*17]．

(1) $x, x' \in G(F_j)$ が $\boldsymbol{\sigma}$ **共役**であるとは，$x' = gx\sigma(g)^{-1}$ となる $g \in G(F_j)$ が存在することをいう．また，このとき $x \overset{\sigma}{\sim} x'$ と書く．

[*17] F の剰余体の位数を q と書くとき，ここでの σ は，F の剰余体における q 乗 Frobenius 自己同型の持ち上げである．幾何学的 Frobenius 元の持ち上げとは異なるので注意．

(2) $x \in G(F_j)$ に対し，$Nx = x\sigma(x)\cdots\sigma^{j-1}(x) \in G(F_j)$ を x の**ノルム**という．$x, x' \in G(F_j)$ が σ 共役ならば $Nx, Nx' \in G(F_j)$ は共役である．

(3) $x \in G(F_j)$ に対し，$G_{x\sigma}$ を以下で定まる F 上の代数群とする[*18]：F 代数 R に対し，$G_{x\sigma}(R) = \{g \in G(F_j \otimes_F R) \mid gx\sigma(g)^{-1} = x\}$.

以下に示すように，σ 共役類はアイソクリスタルと密接に関係している．

例 8.12 $F = \mathbb{Q}_p$ とする．このとき，F_j は $\mathbb{Q}_{p^j}$ と書かれる．

(1) $\mathbb{Q}_{p^j}$ 上の**アイソクリスタル**とは，$\mathbb{Q}_{p^j}$ 上の有限次元ベクトル空間 V と σ 線型な全単射 $\Phi\colon V \to V$ の組のことをいう．アイソクリスタル間の射も自然に定められる．
$b \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^j})$ に対し，$V = \mathbb{Q}_{p^j}^n$, $\Phi = b\sigma$ とすることでアイソクリスタルが定まる．この対応によって，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^j})$ の σ 共役類と $\mathbb{Q}_{p^j}$ 上の n 次元アイソクリスタルの同型類の間に全単射が導かれる．

(2) $\mathbb{Q}_{p^j}$ 上の**偏極付きアイソクリスタル**とは，$\mathbb{Q}_{p^j}$ 上のアイソクリスタル (V, Φ) と非退化交代 $\mathbb{Q}_{p^j}$ 双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V \to \mathbb{Q}_{p^j}$ の組であって，ある定数 $c \in \mathbb{Q}_{p^j}$ に対し $\langle \Phi x, \Phi y\rangle = c\sigma(\langle x, y\rangle)$ $(x, y \in V)$ を満たすもののことである．2 つの偏極付きアイソクリスタル $(V, \Phi, \langle\ ,\ \rangle)$, $(V', \Phi', \langle\ ,\ \rangle')$ の間の同型を，アイソクリスタルの同型 $f\colon V \xrightarrow{\cong} V'$ で，ある定数 $a \in \mathbb{Q}_{p^j}$ に対し $\langle f(x), f(y)\rangle' = a\langle x, y\rangle$ $(x, y \in V)$ を満たすもののことと定義する．
$b \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_{p^j})$ に対し，$(\mathbb{Q}_{p^j}^{2n}, b\sigma, \langle\ ,\ \rangle)$ は $\mathbb{Q}_{p^j}$ 上の偏極付きアイソクリスタルとなる（ここでの $\langle\ ,\ \rangle$ は GSp_{2n} を構成する際に用いた非退化交代形式）．この対応によって，集合 $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_{p^j})$ の σ 共役類と $\mathbb{Q}_{p^j}$ 上の偏極付き $2n$ 次元アイソクリスタルの同型類の間に全単射が導かれる．

F_j の代わりに F の最大不分岐拡大の完備化を考えることも多い．

定義 8.13 F の最大不分岐拡大の完備化を $\breve{F}$ と書き，その Frobenius 自己同型をまた σ と書く．$G(\breve{F})$ の σ 共役類全体を $B(G)$ と書く．

注意 8.14 Steinberg の定理 ([Ste65, Theorem 1.9]) より $H^1(\breve{F}, G) = 1$ である

*18 一般には $G_{x\sigma}$ は連結とは限らないため，G_x という記号と整合的ではないが，あまり気にしないことにする．なお，Nx が半単純ならば，[Kot82, Lemma 5.4] より $G_{x\sigma}$ は連結である．

から，F の剰余体を κ とすると，$H^1(F,G)\cong H^1(\kappa,G(\breve{F}))$ が成り立つ．さらに，Frobenius 元の行き先を見ることで単射 $H^1(\kappa,G(\breve{F}))\hookrightarrow B(G)$ が得られる．この合成 $H^1(F,G)\hookrightarrow B(G)$ によって $H^1(F,G)$ は $B(G)$ の部分集合とみなせる．

例 8.15 $F=\mathbb{Q}_p$ とする．$\breve{\mathbb{Q}}_p$ 上のアイソクリスタルおよび偏極付きアイソクリスタルを例 8.12 と同様に定義する．

(1) $G=\mathrm{GL}_n$ のとき，例 8.12 (1) と同様，$B(\mathrm{GL}_n)$ の元は $\breve{\mathbb{Q}}_p$ 上の n 次元アイソクリスタルの同型類と一対一に対応する．後者は Newton 多角形を用いて分類できることが知られているので（Dieudonné-Manin 分類，[Man63] 等を参照)，前者もそのようになる．

(2) $G=\mathrm{GSp}_{2n}$ のとき，例 8.12 (2) と同様，$B(\mathrm{GSp}_{2n})$ の元は $\breve{\mathbb{Q}}_p$ 上の偏極付き $2n$ 次元アイソクリスタルの同型類と一対一に対応する．また，自然な写像 $B(\mathrm{GSp}_{2n})\to B(\mathrm{GL}_{2n})$ は単射である．よって，$B(\mathrm{GSp}_{2n})$ の元も Newton 多角形を用いて分類することができる．

命題 8.16 自然な写像 $\kappa_G\colon B(G)\to X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})$ が存在し，以下の図式は可換となる：

$$\begin{tikzcd}
H^1(F,G) \arrow[r, "\kappa_G", "\cong"'] \arrow[d, "\text{注意 8.17 の包含写像}"'] & \pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})^D \arrow[d, "\text{自然な包含写像}"] \\
B(G) \arrow[r, "\kappa_G"] & X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F}).
\end{tikzcd}$$

写像 κ_G の構成については [Kot85, §2] および [Kot90, §5] を参照．

例 8.17 (1) $G=\mathrm{GL}_n$ のとき，$X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})=X^*(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})=\mathbb{Z}$ である．この同一視のもとで，$b\in G(\breve{F})$ に対し，$\kappa_G([b])=v_{\breve{F}}(\det b)$ である（$v_{\breve{F}}$ は $\breve{F}$ の正規化された付値を表す)．

(2) $G=\mathrm{GSp}_{2n}$ のとき，$X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})=X^*(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})=\mathbb{Z}$ である．この同一視のもとで，$b\in G(\breve{F})$ に対し，$\kappa_G([b])=v_{\breve{F}}(\operatorname{sim} b)$ である．

σ 共役類に対しても，その「安定版」，および inv の類似が定義できる．

定義 8.18 $x,x'\in G(F_j)$ が $G(F_j\otimes_F\overline{F})$ において σ 共役であるとき，**安定 σ 共役**であるという．

命題 8.19 $x, x' \in G(F_j)$ が安定 σ 共役であることは $Nx, Nx' \in G(F_j)$ が安定共役であることと同値である．

証明 [Kot82, Corollary 5.3] および同論文 803 ページ中段の注意より従う． □

定義 8.20 $x, x' \in G(F_j)$ が安定 σ 共役であるとする．$g \in G(F_j \otimes_F \overline{F})$ を $x' = gx\sigma(g)^{-1}$ となるようにとると，$\tau \in \Gamma_F$ に対して $g^{-1}\tau(g) \in G_{x\sigma}(\overline{F})$ であることが分かるので，1 コサイクル $\Gamma_F \to G_{x\sigma}(\overline{F}); \tau \mapsto g^{-1}\tau(g)$ が定まる．これのコホモロジー類は g のとり方によらないので，x, x' から $H^1(F, G_{x\sigma})$ の元が定まる．これを $\mathrm{inv}(x, x')$ と書く．

定義より明らかに $\mathrm{inv}(x, x') \in \mathrm{Ker}(H^1(F, G_{x\sigma}) \to H^1(F, \mathrm{Res}_{F_j/F} G_{F_j}))$ である．さらに，命題 8.5 の類似も成立する．

$x \in G(F)$, $y \in G(F_j)$ に対し x と Ny が安定共役であるとき，$B(G)$ に値をとる inv の変種が定義できる．

定義 8.21 $x \in G(F)$, $y \in G(F_j)$ とし，x が半単純かつ $x \overset{\mathrm{st}}{\sim} Ny$ であると仮定する．このとき，Steinberg の定理 $H^1(\breve{F}, G_x) = 1$ より，$gxg^{-1} = Ny$ となる $g \in G(\breve{F})$ がとれる．$\sigma(g)x\sigma(g)^{-1} = \sigma(gxg^{-1}) = \sigma(Ny) = y^{-1}(Ny)y = y^{-1}gxg^{-1}y$ より $b = g^{-1}y\sigma(g)$ は $G_x(\breve{F})$ の元であることが分かる．b の σ 共役類 $[b] \in B(G_x)$ は g のとり方に依存しないので，$\mathrm{inv}_\sigma(x, y) = [b]$ とおく[*19]．

注意 8.22 構成より，$B(G_x) \to B(G)$ による $\mathrm{inv}_\sigma(x, y)$ の像は $[y]$ に一致する．

inv と inv_σ は以下のように関係している．

命題 8.23 $x \in G(F)$ を半単純元とし，$y, y' \in G(F_j)$ を $x \overset{\mathrm{st}}{\sim} Ny$, $x \overset{\mathrm{st}}{\sim} Ny'$ を満たす元とする．

(1) $G_{y\sigma}$ は G_x の内部形式である．特に $\widehat{G}_x = \widehat{G}_{y\sigma}$ が成り立つ．
(2) $X^*(Z(\widehat{G}_x)^{\Gamma_F})$ において以下の等式が成り立つ：

$$\kappa_{G_x}\bigl(\mathrm{inv}_\sigma(x, y')\bigr) = \kappa_{G_x}\bigl(\mathrm{inv}_\sigma(x, y)\bigr) + \kappa_{G_{y\sigma}}\bigl(\mathrm{inv}(y, y')\bigr).$$

$Ny \overset{\mathrm{st}}{\sim} Ny'$ と命題 8.19 より y と y' は安定 σ 共役となり，$\mathrm{inv}(y, y')$ が定義で

*19 これは標準的ではない，本稿だけの記号である．

きることに注意.

証明 (1) は [Kot82, Lemma 5.4] と命題 8.10 (1) から従う. (2) の主張は [Kot90, p. 170] にある. □

8.2 Lefschetz 数の計算

$(B, *, V, \langle\ ,\ \rangle, h)$ を PEL データとする([今井, 定義 4.2] 参照). このとき, $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群 G および準同型 $h\colon \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ が定まり, h の $G(\mathbb{R})$ 共役類を X とおくと, (G, X) は志村データとなるのであった. (G, X) のリフレックス体を E と書く. h から指標 $\mu_h\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ が定まったことも思い出しておこう([今井, §5] 参照).

- $*$ で安定な B の $\mathbb{Z}$ 整環 $\mathcal{O}_B$
- $\mathcal{O}_B$ の作用で安定な V の $\mathbb{Z}$ 格子 Λ であって, $x, y \in \Lambda$ ならば $\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}$ となるもの

を固定する. これらを用いて, G を $\mathbb{Z}$ 上の群スキームへと自然に延長することができる(これも G と表す).

p を素数とし, 以下の条件を仮定する:

- $B_{\mathbb{Q}_p}$ は $\mathbb{Q}_p$ の不分岐拡大体上の行列環の直積に分解する.
- $(\mathcal{O}_B)_{\mathbb{Z}_p}$ は $B_{\mathbb{Q}_p}$ の極大整環である.
- $\Lambda_{\mathbb{Z}_p}$ は $V_{\mathbb{Q}_p}$ の自己双対的な格子である.

このとき, $G_{\mathbb{Q}_p}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の不分岐簡約代数群となり, $G(\mathbb{Z}_p)$ は $G(\mathbb{Q}_p)$ の超スペシャルコンパクト部分群である. また, p は $E/\mathbb{Q}$ において不分岐である.

p の上にある E の素点 $\mathfrak{p}$ を一つとる. また, K^p を $G(\mathbb{A}_f^p)$ の十分小さいコンパクト開部分群とする. このとき, [清水, §4.2] より, $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$ 上の滑らかなスキーム $\mathcal{S}_{K^p}$ が定まる. 以下では, 次の条件を仮定する:

- B が単純 $\mathbb{Q}$ 代数であり, G が A 型または C 型である.

特に $G_{\mathbb{R},\mathrm{der}}$ はユニタリ群またはシンプレクティック群なので単連結である. このとき, $\mathcal{S}_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}} E_{\mathfrak{p}}$ は志村多様体 $\mathrm{Sh}_{G(\mathbb{Z}_p)K^p} \otimes_E E_{\mathfrak{p}}$ を $|\ker^1(\mathbb{Q}, G)|$ 個直和したものと同型になる. ここで, $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ は $H^1(\mathbb{Q}, G) \to \prod_v H^1(\mathbb{Q}_v, G)$ の核として

定義される基点付き有限集合であった．C 型（Siegel モジュラー多様体を含む）の場合には $\ker^1(\mathbb{Q},G)=1$ であるが，A 型で G が奇数次一般ユニタリ群の場合には $\ker^1(\mathbb{Q},G)\neq 1$ となる可能性がある．

射影系 $\{\mathcal{S}_{K^p}\}_{K^p}$ には $G(\mathbb{A}_f^p)$ の Hecke 作用を自然に定めることができる．また，p と異なる素数 ℓ および $G_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ の既約代数的表現 ξ に対し，$\mathcal{S}_{K^p}$ 上の ℓ 進エタール局所系 $\mathcal{F}_\xi$ も自然に定まり，$\mathrm{Sh}_{G(\mathbb{Z}_p)K^p}$ 上の $\mathcal{F}_\xi$ と整合的になっている．

$j\geq 1$ を整数とする．モジュラー曲線の場合と同様，以下のように Lefschetz 数が定義される．

定義 8.24 $K^p\subset G(\mathbb{A}_f^p)$ をコンパクト開部分群とし，$g\in G(\mathbb{A}_f^p)$ に対し $f^p=\mathrm{vol}(K^p)^{-1}\mathbf{1}_{K^pgK^p}\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p),K^p)$ を考える．E の $\mathfrak{p}$ における剰余体を $k_\mathfrak{p}$，その位数を $q_\mathfrak{p}$ とし，$\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}\colon\mathcal{S}_{K^p,\overline{k}_\mathfrak{p}}\to\mathcal{S}_{K^p,\overline{k}_\mathfrak{p}}$ で $q_\mathfrak{p}$ 乗 Frobenius 射を表す．$\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}^j\circ f^p$ を以下の代数的対応とする：

$$\mathcal{S}_{K^p\cap gK^pg^{-1},\overline{k}_\mathfrak{p}}\xrightarrow{1\times\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}^j\circ g}\mathcal{S}_{K^p,\overline{k}_\mathfrak{p}}\times\mathcal{S}_{K^p,\overline{k}_\mathfrak{p}}.$$

さらに，$\mathrm{Lef}(j,f^p,\xi)$ を以下で定める：

$$\mathrm{Lef}(j,f^p,\xi)=\sum_{x'\in\mathrm{Fix}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}^j\circ f^p)}\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}^j\circ f^p;(\mathcal{F}_\xi)_x\bigr).$$

ただし，x は $x'\in\mathcal{S}_{K^p\cap gK^pg^{-1}}(\overline{k}_\mathfrak{p})$ の $\mathcal{S}_{K^p}(\overline{k}_\mathfrak{p})$ における像を表す．線型に拡張することで，一般の $f^p\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p),K^p)$ に対しても $\mathrm{Lef}(j,f^p,\xi)$ が定義できる．

本小節では，Kottwitz による以下の定理を解説する．

定理 8.25（[Kot92]）

$$\mathrm{Lef}(j,f^p,\xi)=\bigl|\ker^1(\mathbb{Q},G)\bigr|\cdot\sum_{\substack{(\gamma_0;\gamma,\delta)\in\mathrm{KT}_j\\ \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1}}c(\gamma_0;\gamma,\delta)O_\gamma(f^p)\,TO_\delta(\phi_j)\,\mathrm{Tr}\,\xi(\gamma_0).$$

未定義の記号を順に説明していこう．

- KT_j は以下で定義される．

定義 8.26 $E_\mathfrak{p}$ の j 次不分岐拡大を $E_{\mathfrak{p}^j}$ と書く．以下を満たす 3 つ組 $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ を **Kottwitz 3 つ組**という：

- γ_0 は $G(\mathbb{Q})$ の半単純元であり，その $G(\mathbb{R})$ における像は楕円的である.
- $\gamma \in G(\mathbb{A}_f^p)$ であり，各有限素点 $\ell' \neq p$ に対し $\gamma_0 \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma_{\ell'}$ である.
- $\delta \in G(E_{\mathfrak{p}^j})$ であり，$\gamma_0 \overset{\mathrm{st}}{\sim} N\delta$ および $\kappa_G([\delta]) = -\mu_h$ を満たす．ここで，右辺の μ_h は，$\mu_h\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ を $\widehat{G}$ の極大トーラスの指標と見て，$Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$ に制限したものを表す．これは μ_h の共役類のみから決まる．また，ここで用いている σ 共役類に関する記号（$N\delta$ および $\kappa_G([\delta])$）は，不分岐拡大 $E_{\mathfrak{p}^j}/\mathbb{Q}_p$ に対するものである（$E_{\mathfrak{p}^j}/E_{\mathfrak{p}}$ に対するものではないことに注意).

2 つの Kottwitz 3 つ組 $(\gamma_0; \gamma, \delta)$, $(\gamma_0'; \gamma', \delta')$ が同値であるとは，$\gamma_0 \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma_0'$, $\gamma \sim \gamma'$, $\delta \overset{\sigma}{\sim} \delta'$ が成り立つことをいう．Kottwitz 3 つ組の同値類全体の集合を KT_j と書く.

- $\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta)$ はある種の障害類である．これが現れる仕組みについては本小節で詳しく説明する．定義そのものについては定義 8.42 および注意 8.43 を参照.
- $O_\gamma(f^p) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A}_f^p)\backslash G(\mathbb{A}_f^p)} f^p(x^{-1}\gamma x)dx$ は軌道積分である.
- ϕ_j は以下で定義される $G(E_{\mathfrak{p}^j})$ 上の関数である.

定義 8.27 E 同型 $\mathbb{C} \cong \overline{E}_{\mathfrak{p}}$ を固定すると，余指標 $\mu_h\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ から余指標 $\mu_{\mathfrak{p}}\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},\overline{E}_{\mathfrak{p}}} \to G_{\overline{E}_{\mathfrak{p}}}$ が定まる．リフレックス体の定義より，$\mu_{\mathfrak{p}}$ の $G(\overline{E}_{\mathfrak{p}})$ 共役類は E 同型 $\mathbb{C} \cong \overline{E}_{\mathfrak{p}}$ のとり方に依存しない．$G_{E_{\mathfrak{p}^j}}$ の極大分裂トーラス S をとると，$\mu_{\mathfrak{p}}$ を $G(\overline{E}_{\mathfrak{p}})$ 共役でとりかえることで，$\mathbb{G}_{\mathrm{m},E_{\mathfrak{p}^j}} \to S$ を経由するようにできる ([Kot84a, Lemma (1.1.3)])．ϕ_j を $G(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}^j}})\mu_{\mathfrak{p}}(p^{-1})G(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}^j}})$ の特性関数とする.

- $TO_\delta(\phi_j) = \int_{G_{\delta\sigma}(\mathbb{Q}_p)\backslash G(E_{\mathfrak{p}^j})} \phi_j(x^{-1}\delta\sigma(x))dx$ は捻られた軌道積分である.
- $O_\gamma(f^p)$ および $TO_\delta(\phi_j)$ を定める際の $G(\mathbb{A}_f^p)$, $G_\gamma(\mathbb{A}_f^p)$, $G(E_{\mathfrak{p}^j})$, $G_{\delta\sigma}(\mathbb{Q}_p)$ の測度は，定理 4.12 と同様に正規化する.
- $c(\gamma_0; \gamma, \delta)$ は以下で定まる体積要素である.

定義 8.28 $I_0 = G_{\gamma_0}$ とおき，その内部形式 I で以下を満たすものを考える：

- $I_{\mathbb{Q}_{\ell'}} \cong G_{\gamma_{\ell'}}$（$\ell'$ は p と異なる素数).
- $I_{\mathbb{Q}_p} \cong G_{\delta\sigma}$.
- $I(\mathbb{R})/A_G(\mathbb{R})^+$ はコンパクト.

このような I は $\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta) = 1$ のときに存在することが分かり，さらに $I_{0,\mathrm{ad}}$ に対する Hasse 原理 $\ker^1(\mathbb{Q}, I_{0,\mathrm{ad}}) = 1$（[San81, Corollaire 5.4] を参照）から，存在すれば

一意であることが分かる．

$I(\mathbb{A}_f) = I(\mathbb{A}_f^p) \times I(\mathbb{Q}_p) \cong G_\gamma(\mathbb{A}_f^p) \times G_{\delta\sigma}(\mathbb{Q}_p)$ に直積測度を入れる．$I(\mathbb{Q}) \subset I(\mathbb{A}_f)$ は離散部分群であり，$I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)$ は体積有限となる．そこで，

$$c(\gamma_0;\gamma,\delta) = \mathrm{vol}\big(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)\big) \cdot \Big|\mathrm{Ker}\big(\ker^1(\mathbb{Q}, I_0) \to \ker^1(\mathbb{Q}, G)\big)\Big|$$

と定める．測度の正規化の方法から，$\mathrm{vol}(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f))$ は玉河数 $\tau(I)$ に一致する．

注意 8.29 Hodge 型志村多様体の整正準モデルに対しても，定理 8.25 と類似した結果が得られている．[Kis17], [Lee] を参照．なお，[Kis17] の定式化は定理 8.25 とは若干異なっている．また，アーベル型志村多様体の整正準モデルに対する定理 8.25 および [Lee] の一般化も，Kisin-Shin-Zhu によりアナウンスされているとのことである（[HH20, Introduction] を参照）．

定理 8.25 をモジュラー曲線の場合（定理 4.12）と比較すると，以下の 2 点が異なっていることに気づくだろう：

- モジュラー曲線のときは $\gamma_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ に関する和であったのが，3 つ組 $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ に関する和になっている．
- 障害類 $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ が登場する．

前者は共役類と安定共役類のずれからくるものである．モジュラー曲線のときは γ_0 から γ の共役類および δ の σ 共役類が一意に決まってしまうため 3 つ組を考える必要がないが，一般の場合にはそうはいかないということである．後者はアーベル多様体の偏極に起因して現れる障害類である．

以下では，簡単のため Siegel モジュラー多様体 $(G = \mathrm{GSp}_{2n})$[*20]の場合に限り，さらに $K^p \subset G(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$, $f^p = \mathrm{vol}(K^p)^{-1}\mathbf{1}_{K^p}$, $\xi = \mathbf{1}$ として定理 8.25 の証明を概説する．この場合，$\mathrm{Lef}(j, f^p, \mathbf{1})$ は $\mathbb{F}_{p^j}$ 上の $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 偏極・K^p レベル付き n 次元アーベル多様体 (A,λ,η^p) の $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ 同種類の個数に一致する．この個数は，モジュラー曲線の場合と同様，以下の 2 ステップに分けて計算することができる．

(A) $\mathbb{Q}$ 偏極付き n 次元アーベル多様体 (A,λ) の同種類が集合 $\{(\gamma_0;\gamma,\delta) \in \mathrm{KT}_j \mid \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta) = 0\}$ でパラメータ付けられる[*21]ことを示す．

---

*20 以下では，G, GSp_{2n} という記号を両方使う．GSp_{2n} と書いた方が定義を想起しやすいが，中心化群を表すときなどには G と書いた方が短く済むためである．

*21 実際には γ_0 にもう一つ条件が付く．命題 8.34 参照．

(B) (A,λ) が $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ でパラメータ付けられた同種類に属するような (A,λ,η^p) の $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ 同種類の個数を軌道積分および捻られた軌道積分で表す．

このうち，(B) の部分はモジュラー曲線の場合とほぼ同じであり，有理 Tate 加群および有理 Dieudonné 加群の格子を見ることによって達成される．そのため，本稿では (A) の部分のみを扱うことにする．

以下では $B=\mathbb{Q}$, $*=\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$, $V=\mathbb{Q}^{2n}$, $\Lambda=\mathbb{Z}^{2n}$ とし，V 上の交代形式 $\langle\ ,\ \rangle$ として Φ_{2n}（1 節の「記号」参照）に対応するものをとる．$h\colon\mathbb{C}\to M_{2n}(\mathbb{R})$ は $z=x+yi\mapsto x+y\Phi_{2n}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ で定める．このとき，$\mu_h\colon\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\to\mathrm{GSp}_{2n,\mathbb{C}}$ は $z\mapsto\mathrm{diag}(\underbrace{z,\ldots,z}_{n\text{ 個}},\underbrace{1,\ldots,1}_{n\text{ 個}})$ で与えられる．

$\mathbb{F}_{p^j}$ 上の $\mathbb{Q}$ 偏極[*22]付き n 次元アーベル多様体の同種類全体を PIsog_j で表す[*23]．ここで，$\mathbb{F}_{p^j}$ 上の $\mathbb{Q}$ 偏極付き n 次元アーベル多様体 (A,λ), (A',λ') が同種であるとは，擬同種写像 $f\colon A\to A'$ および $a\in\mathbb{Q}^{\times}$ であって $\lambda=a\widehat{f}\circ\lambda'\circ f$ を満たすものが存在することをいう．

■写像 $\mathrm{PIsog}_j\to\mathrm{KT}_j$ **の構成**　まずはじめに，$(A,\lambda)\in\mathrm{PIsog}_j$ から Kottwitz 3 つ組を構成する方法を説明する．

$\mathbb{Q}$ 偏極 λ を用いることで，有理 Tate 加群 $V^pA_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 上の交代形式 $V^pA_{\overline{\mathbb{F}}_p}\times V^pA_{\overline{\mathbb{F}}_p}\to\mathbb{A}_f^p(-1)$ が得られる．同型 $\mathbb{A}_f^p(-1)\cong\mathbb{A}_f^p$ を固定し，交代形式を定数倍を除いて保つ同型 $\psi^p\colon(\mathbb{A}_f^p)^{2n}\xrightarrow{\cong}V^pA_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ を一つとる．すると，$V^pA_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ への p^j 乗 Frobenius 作用 Fr_{p^j} は ψ^p によって $(\mathbb{A}_f^p)^{2n}$ の自己同型と対応する．ψ^p が交代形式を定数倍を除いて保つという条件から，この自己同型は $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}^p)$ の元 γ' を定める．$\gamma=\gamma'^{-1}$ とおく．γ は半単純になることが知られている ([Mum70, p. 203, Proposition])．ψ^p をとりかえると γ は $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}^p)$ における共役元に変わるので，γ の $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}^p)$ 共役類は ψ^p のとり方によらずに決まる．

1 次クリスタルホモロジー（有理 Dieudonné 加群）$H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_{\mathbb{Q}}$ 上にも交代形式が定まり，偏極付きアイソクリスタル（例 8.12 (2) 参照）となる．交代形式を定数倍を除いて保つ同型 $\psi_p\colon\mathbb{Q}_{p^j}^{2n}\xrightarrow{\cong}H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_{\mathbb{Q}}$ を一つとると，$\mathbb{Q}_{p^j}^{2n}$ にも偏極

[*22] アーベル多様体 A の $\mathbb{Q}$ 偏極とは，$\lambda\in\mathrm{Hom}(A,\widehat{A})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ であって，ある正整数 N に対し $N\lambda$ が偏極となるもののことをいう．[清水, 定義 4.1] の脚注を参照．

[*23] [HT01] 等では，この集合を PIC と書いている (polarized isogeny class の略と思われる)．Picard 群と紛らわしいので，ここでは別の記号を使うことにした．

付きアイソクリスタルの構造が入り，その同型類は ψ_p のとり方によらない．例 8.12 (2) より，この同型類に対応して $\delta' \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_{p^j})$ が σ 共役類を除いて一意に定まる．より明示的に書くと，$H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_{\mathbb{Q}}$ への Frobenius 作用 F と $\mathbb{Q}_{p^j}^{2n}$ の自己同型 $\delta'\sigma$ が ψ_p によって対応するように $\delta' \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_{p^j})$ を定めるということである．$\delta = p^{-1}\delta'$ とおく．

最後に $\gamma_0 \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})$ を定める．γ_0' を以下の 2 条件を満たす $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})$ の半単純元とする：

- $\mathrm{sim}(\gamma_0') = p^j$.
- ℓ' を p と異なる素数とするとき，$\gamma_0' \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Q})$ の固有多項式は $\mathrm{Fr}_{p^j} \in \mathrm{Aut}(V_{\ell'}A_{\overline{\mathbb{F}}_p})$ の固有多項式（これは $\mathbb{Q}$ 係数であり，ℓ' に依存しないことが知られている）と一致する．

このような γ_0' は存在し，安定共役を除いて一意的である (例 8.3 (3) 参照)．$\gamma_0 = \gamma_0'^{-1}$ とおく．

注意 8.30 $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ よりも $(\gamma_0';\gamma',\delta')$ の方が自然な選び方に見えるが，最終的に定理 8.25 と合わせるためにはこのようにする必要がある．例えば，ϕ_j の台は $\{g \in \mathrm{GSp}_{2n}(E_{\mathfrak{p}^j}) \mid \mathrm{sim}(g) \notin \mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}^j}}\}$ に含まれるので，$TO_\delta(\phi_j) \neq 0$ となるためには $\mathrm{sim}(\delta) \notin \mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}^j}}$ でなくてはならない．

命題 8.31 以上によって定まった $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ は KT_j の元を与える．

証明 ℓ' を p と異なる素数とするとき，定義から γ_0^{-1} と $\gamma_{\ell'}^{-1}$ の固有多項式は等しい．また，$\mathrm{sim}(\gamma_{\ell'}^{-1}) = p^j$ も容易に分かる．$\gamma_0^{-1}, \gamma_{\ell'}^{-1}$ は半単純であったから，γ_0^{-1} と $\gamma_{\ell'}^{-1}$ は安定共役である．よって γ_0 と $\gamma_{\ell'}$ も安定共役である．

また，上で固定した同型 $\psi_p\colon \mathbb{Q}_{p^j}^{2n} \xrightarrow{\cong} H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_{\mathbb{Q}}$ によって $N(p\delta) = (p\delta\sigma)^j$ は Fr_{p^j} が誘導する $H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_{\mathbb{Q}}$ の自己同型と対応するので，$N(p\delta)$ の固有多項式は $\mathrm{Fr}_{p^j} \in \mathrm{Aut}(V_{\ell'}A_{\overline{\mathbb{F}}_p})$ の固有多項式，すなわち γ_0^{-1} の固有多項式と一致する．また，$\mathrm{sim}(N(p\delta)) = p^j$ も容易に分かる．よって γ_0^{-1} と $N(p\delta) = p^jN\delta$ は安定共役である．したがって，$p^{-j}\gamma_0^{-1}$ と $N\delta$ も安定共役である．$p^{-j}\gamma_0^{-1}$ と γ_0 は安定共役であることが例 8.3 (3) から容易に分かるので，γ_0 と $N\delta$ が安定共役であることが示された．さらに，$\mathrm{sim}(N(p\delta)) = p^j$ から $\mathrm{sim}(N\delta) = p^{-j}$ となるので，$\kappa_G(\delta) = v_{\breve{\mathbb{Q}}_p}(\mathrm{sim}\,\delta) = -1 = -\mu_h$ を得る（最後の等号については例 7.5 (2) を参照）．

あとは γ_0 の $G(\mathbb{R})$ における像が楕円的であることを示せばよい．これを示す前に，以下の命題を証明する． □

命題 8.32 $\mathbb{Q}$ 上の代数群 I を $I(R)=(\mathrm{End}(A,\lambda)\otimes R)^\times$（$R$ は $\mathbb{Q}$ 代数，$\mathrm{End}(A,\lambda)$ は $\mathbb{Q}$ 偏極 λ を定数倍を除いて保つ A の自己準同型全体）で定める．このとき，I は定義 8.28 の条件を満たす G_{γ_0} の内部形式である．すなわち，以下が成り立つ：

(1) I は G_{γ_0} の内部形式である．
(2) $I_{\mathbb{Q}_{\ell'}}\cong G_{\gamma_{\ell'}}$（$\ell'$ は p と異なる素数）．
(3) $I_{\mathbb{Q}_p}\cong G_{\delta\sigma}$．
(4) $I(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$ はコンパクト．

証明 [津嶋, 定理 2.23.2 (b)] の証明を参考にするとよい．

まず (2) を示す．有限体上のアーベル多様体に対する Tate の定理（[津嶋, §2.2] 参照）から，$\mathrm{End}(A,\lambda)\otimes\mathbb{Q}_{\ell'}\to\mathrm{End}_{\Gamma_{\mathbb{F}_{p^j}}}(V_{\ell'}A,V_{\ell'}\lambda)$ は同型である（λ が定める $V_{\ell'}A$ 上の交代形式を $V_{\ell'}\lambda$ と書いた）．さらに，交代形式を定数倍を除いて保つ同型 $\psi_{\ell'}\colon\mathbb{Q}_{\ell'}^{2n}\xrightarrow{\cong}V_{\ell'}A_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ を固定すると，同型

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_{\ell'}}(V_{\ell'}A,V_{\ell'}\lambda)\cong\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_{\ell'}}(\mathbb{Q}_{\ell'}^{2n},\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{Q}_{\ell'}})$$

が誘導され，さらにこの同型で Fr_{p^j} は $\gamma_{\ell'}^{-1}$ にうつる．これらを合わせることで，$\mathbb{Q}_{\ell'}$ 代数の同型

$$\mathrm{End}(A,\lambda)\otimes\mathbb{Q}_{\ell'}\cong\{f\in\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_{\ell'}}(\mathbb{Q}_{\ell'}^{2n},\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{Q}_{\ell'}})\mid f\circ\gamma_{\ell'}^{-1}=\gamma_{\ell'}^{-1}\circ f\}$$

が得られる．これから代数群の同型 $I_{\mathbb{Q}_{\ell'}}\cong G_{\gamma_{\ell'}}$ が引き起こされるので，(2) が示された．

次に，I が G_{γ_0} の内部形式であることを示す．このために，対合付きの $\mathbb{Q}$ 代数とその元からなる以下の組 (a), (b), (c) を考える：

(a) $\gamma_0^{-1}\in\mathrm{End}(\mathbb{Q}^{2n},\langle\ ,\ \rangle)$．
(b) $\gamma_{\ell'}^{-1}\in\mathrm{End}(\mathbb{Q}_{\ell'}^{2n},\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{Q}_{\ell'}})$．
(c) $\mathrm{Fr}_{p^j}\in\mathrm{End}(A,\lambda)\otimes\mathbb{Q}$．

γ_0 のとり方から，(a) と (b) は $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$ 上同型である．また，上で見たように，(b) と (c) は $\mathbb{Q}_{\ell'}$ 上同型である．よって (a) と (c) は $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$ 上同型である．一方，(a) と (c) はと

もに $\mathbb{Q}$ 上定義されるので，$\mathbb{Q}$ 代数 R に対し (a) と (c) を R 上に係数拡大したものの間の同型を対応させる関手は $\mathbb{Q}$ 上有限型のアフィンスキームで表現される．このアフィンスキームは $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$ 有理点を持つので空ではなく，したがって $\overline{\mathbb{Q}}$ 有理点を持つ．すなわち，(a) と (c) は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上同型である．このことと Skolem-Noether の定理から，I が G_{γ_0} の内部形式であることが容易に従う．

(3) は (2) と同様，Dieudonné 加群に対する Tate の定理から従う．また，(4) は Rosati 対合の正値性（[石塚, 定理 3.19]）から明らかである．□

命題 8.31 の証明の続き　命題 8.32 を用いて γ_0 の $G(\mathbb{R})$ における像が楕円的であることを示そう．$\mathrm{Fr}_{p^j}^{-1}$ は $I(\mathbb{Q})$ の中心 $Z_I(\mathbb{Q})$ の元であった．これを γ_A と書く．命題 8.32 の証明より，内部捻り $\psi\colon I_{\overline{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\cong} G_{\gamma_0,\overline{\mathbb{Q}}}$ であって $\psi(\gamma_A)=\gamma_0$ を満たすものが存在する．これを係数拡大して，$\mathbb{R}$ 上の代数群の内部捻り $\psi_{\mathbb{R}}\colon (I_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} (G_{\gamma_0,\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ とみなしておく．

$I_{\mathbb{R}}$ の極大トーラス T' を任意にとる．$I(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}_{>0}$ を法としてコンパクトであるから，T' は楕円的である．[Kot86, Lemma 10.2] より，$\psi_{\mathbb{R}}$ を $G_{\gamma_0}(\mathbb{C})$ の元による共役で置き換えることで，$\psi_{\mathbb{R}}(T'_{\mathbb{C}})$ が $\Gamma_{\mathbb{R}}$ の作用で安定であるようにすることができる．このとき，$\psi_{\mathbb{R}}(T'_{\mathbb{C}})$ は $G_{\gamma_0,\mathbb{R}}$ のある極大トーラス T の係数拡大 $T_{\mathbb{C}}$ に等しく，さらに $\psi_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ 上の同型 $T' \xrightarrow{\cong} T$ を誘導する．$T(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0} \cong T'(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$ はコンパクトであるから，T も楕円的である．T を $G_{\mathbb{R}}$ のトーラスと見ると，これは楕円的な極大トーラスであり，γ_0 を含む．よって $\gamma_0 \in G(\mathbb{R})$ は楕円的である．□

注意 8.33　一般の PEL データの場合，γ, δ の構成は上と同様に行うことができるが，G が $\mathbb{Q}$ 上準分裂的でない場合には γ_0 の構成はもっと難しくなる．[Kot92, Lemma 14.1] を参照．

■写像 $\mathrm{PIsog}_j \to \mathrm{KT}_j$ の像と障害類　$\mathbb{F}_{p^j}$ 上の n 次元アーベル多様体の同種類全体を Isog_j で表す．$(A,\lambda) \in \mathrm{PIsog}_j$ から γ_0 を構成する際には $\mathbb{Q}$ 偏極 λ は使わないということに注意すると，以下の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{PIsog}_j \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{KT}_j \arrow[d, "(\gamma_0;\gamma,\delta)\mapsto\gamma_0"] \\ \mathrm{Isog}_j \arrow[r] & \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})/\overset{\mathrm{st}}{\sim}. \end{tikzcd}$$

まず，$\mathrm{Isog}_j \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})/\overset{\mathrm{st}}{\sim}$ について考える．

命題 8.34 (1) 写像 $\mathrm{Isog}_j \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})/\overset{\mathrm{st}}{\sim}$ は単射である．

(2) $\gamma_0 \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})$ の安定共役類が $\mathrm{Isog}_j \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})/\overset{\mathrm{st}}{\sim}$ の像に属することは以下の条件 $(*)$ が成り立つことと同値である：

$(*)$ $\gamma \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}_f^p)$, $\delta \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_{p^j})$ であって，$(\gamma_0; \gamma, \delta) \in \mathrm{KT}_j$ および $O_\gamma(\mathbf{1}_{\mathrm{GSp}_{2n}(\widehat{\mathbb{Z}}^p)}) \neq 0$, $TO_\delta(\phi_j) \neq 0$ を満たすものが存在する．

証明 (1) は有限体上のアーベル多様体に対する Tate の定理（[津嶋, §2.2] 参照）の帰結である．

(2) を示す．まず γ_0 の安定共役類が $[A] \in \mathrm{Isog}_j$ の像であると仮定する．A の偏極 λ を一つとると，$[(A, \lambda)] \in \mathrm{PIsog}_j$ である．(A, λ) に伴う Kottwitz 3 つ組を $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ とする．$O_\gamma(f^p) \neq 0$, $TO_\delta(\phi_j) \neq 0$ を示したい．γ は $\mathrm{Fr}_{p^j}^{-1} \colon V^p A_{\overline{\mathbb{F}}_p} \xrightarrow{\cong} V^p A_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ から定まっているのであった．Fr_{p^j} は $V^p A_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ の $\widehat{\mathbb{Z}}^p$ 格子 $T^p A_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ を保つので，γ は $\mathrm{GSp}_{2n}(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ のある共役に属する．すなわち $O_\gamma(\mathbf{1}_{\mathrm{GSp}_{2n}(\widehat{\mathbb{Z}}^p)}) \neq 0$ である．一方 δ は $p^{-1}F \colon H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_\mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_\mathbb{Q}$ から定まっているのであった．$H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}_{p^j}$ 格子 $H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})$ は

$$pH_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j}) \subset F(H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})) \subset H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})$$

を満たすことが分かっている．したがって，δ を構成するときに固定した同型 $\psi_p \colon \mathbb{Q}_{p^j}^{2n} \xrightarrow{\cong} H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_\mathbb{Q}$ による $H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})$ の逆像を Λ_A と書くと，これは

$$\Lambda_A \subset \delta\sigma(\Lambda_A) \subset p^{-1}\Lambda_A$$

を満たしている．$H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})$ は $H_{1,\mathrm{crys}}(A/\mathbb{Z}_{p^j})_\mathbb{Q}$ の自己双対的な $\mathbb{Z}_{p^j}$ 格子であり，ψ_p は交代形式を定数倍を除いて保つので，$\Lambda_A^\vee = c\Lambda_A$ となる $c \in \mathbb{Q}_{p^j}$ が存在することが分かる．このとき，$g \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_{p^j})$ であって $\Lambda_A = g\mathbb{Z}_{p^j}^{2n}$ を満たすものが存在する．上の包含関係は，

$$\mathbb{Z}_{p^j}^{2n} \subset g^{-1}\delta\sigma(g)\mathbb{Z}_{p^j}^{2n} \subset p^{-1}\mathbb{Z}_{p^j}^{2n}$$

と書き直すことができる．$\mathrm{sim}(g^{-1}\delta\sigma(g)) \in p^{-1}\mathbb{Z}_{p^j}^\times$ に注意すると，簡単な議論によって，この包含関係から

$$\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_{p^j})g^{-1}\delta\sigma(g)\,\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_{p^j}) = \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_{p^j})\mu_h(p^{-1})\,\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_{p^j})$$

を導くことができる（例えば，単因子論より分かる等式

$$\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}_{p^j})g^{-1}\delta\sigma(g)\,\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}_{p^j}) = \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}_{p^j})\mu_h(p^{-1})\,\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}_{p^j})$$

と [Kot92, Lemma 7.4] を用いればよい）．したがって $TO_\delta(\phi_j) \neq 0$ である．以上で条件 $(*)$ が確かめられた．

逆に，$\gamma_0 \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})$ に対して条件 $(*)$ が成り立つと仮定する．$c = \mathrm{sim}(\gamma_0) \in \mathbb{Q}^\times$ とおく．まず，$\gamma_0 \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{R})$ が楕円的であることから，$c > 0$ が分かる．また，$O_\gamma(\mathbf{1}_{\mathrm{GSp}_{2n}}(\widehat{\mathbb{Z}}^p)) \neq 0$ より，$\mathrm{sim}(\gamma_0) = \mathrm{sim}(\gamma) \in (\widehat{\mathbb{Z}}^p)^\times$ である．$TO_\delta(\phi_j) \neq 0$ より，$\mathrm{sim}(\gamma_0) = \mathrm{sim}(N\delta) \in p^{-j}\mathbb{Z}_{p^j}^\times$ である．以上より，$c = p^{-j}$ が得られる．

また，再び $\gamma_0 \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{R})$ が楕円的であることを用いると，γ_0^{-1} の固有多項式の根の複素絶対値は全て等しいことが分かる．$\mathrm{sim}(\gamma_0) = p^{-j}$ と合わせると，γ_0^{-1} の固有多項式の根は全て Weil p^j 数であることが分かる．γ_0^{-1} の固有多項式の根の $\Gamma_\mathbb{Q}$ 軌道それぞれに本田・Tate 理論（[津嶋, 定理 2.1]）を適用することで，$\mathbb{F}_{p^j}$ 上の n 次元アーベル多様体 A であって，その $\mathrm{Fr}_{p^j} \in \mathrm{Aut}(V_{\ell'}A)$ の固有多項式が γ_0^{-1} の固有多項式に等しいものをとることができる．これは $\mathrm{Isog}_j \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})/\overset{\mathrm{st}}{\sim}$ による $[A]$ の像が γ_0 の安定共役類に一致することを意味する． □

次に，条件 $(*)$ を満たす $\gamma_0 \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q})/\overset{\mathrm{st}}{\sim}$ を一つ固定し，$(\gamma_0;\gamma,\delta) \in \mathrm{KT}_j$ が $\mathrm{PIsog}_j \to \mathrm{KT}_j$ の像に属するための条件を考えよう．このためにはまず PIsog_j を把握する必要がある．γ_0 に対応する同種類に属する n 次元アーベル多様体 A をとり，その $\mathbb{Q}$ 偏極 λ_0 を一つ固定する．このとき，A の $\mathbb{Q}$ 偏極は以下のように記述することができる．

補題 8.35（[Kot92, Lemma 9.1]） $\lambda \in \mathrm{Hom}(A,\widehat{A}) \otimes \mathbb{Q}$ を $\widehat{\lambda} = \lambda$ を満たす元とする．このとき，λ が A の $\mathbb{Q}$ 偏極であることは以下と同値である：

$f \in (\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R})^\times$ で $\lambda = \widehat{f} \circ \lambda_0 \circ f$ を満たすものが存在する．

証明 これは [Mum70, §21, Application III] の内容から従う．以下，その概略を説明する． $C = \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ とおく．C 上の λ_0 に関する Rosati 対合を $*$ で表し，$C_{\mathrm{sym}} = \{x \in C \mid x^* = x\}$ とおく．このとき，C_{sym} は $x \circ y = (xy + yx)/2$ によって Jordan 代数の構造を持つ．Rosati 対合の正値性より，$C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R}$ は形式的実 (formally real) な Jordan 代数となる．さらに，A 上の直線束 L が豊富であることは $\lambda_0^{-1} \circ \phi_L \in C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R}$ が総正な元である（すなわち，$C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R} \to C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R}$;

$x \mapsto (\lambda_0^{-1} \circ \phi_L) \circ x$ の固有値が全て正である）ことと同値である．

一方，$\mathbb{R}$ 上の Jordan 代数 $C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R}$ は

$$H_r(K) = \{\alpha \in M_r(K) \mid {}^t\overline{\alpha} = \alpha\}$$

（K は $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, Hamilton 四元数体のいずれか，$r \geq 1$）という形の Jordan 代数いくつかの直積であり，$\alpha \in H_r(K)$ が総正であることは α が正定値であることと同値であることが示せる．このことから，$C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R}$ の総正な元全体 $(C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R})_+$ は $\{f^* f \mid f \in (C \otimes \mathbb{R})^\times\}$ に一致することが分かる（[Kot92, Lemma 2.8] 参照）．

以上を用いて補題を示す．λ を補題の通りとすると，$\lambda_0^{-1} \circ \lambda \in C_{\mathrm{sym}}$ である．λ が $\mathbb{Q}$ 偏極ならば $\lambda_0^{-1} \circ \lambda \in (C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R})_+$ なので，$\lambda_0^{-1} \circ \lambda = f^* f$ となる $f \in (C \otimes \mathbb{R})^\times$ が存在する．Rosati 対合の定義より，右辺は $\lambda_0^{-1} \circ \widehat{f} \circ \lambda_0 \circ f$ に等しいので，$\lambda = \widehat{f} \circ \lambda_0 \circ f$ であることが分かった．逆に，$f \in (C \otimes \mathbb{R})^\times$ に対し $\lambda = \widehat{f} \circ \lambda_0 \circ f$ となるならば，$\lambda_0^{-1} \circ \lambda = f^* f \in (C_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R})_+$ なので λ は $\mathbb{Q}$ 偏極である． □

命題 8.32 の通り，$I(R) = (\mathrm{End}(A, \lambda_0) \otimes R)^\times$（$R$ は $\mathbb{Q}$ 代数）によって定まる $\mathbb{Q}$ 上の代数群 I を考える．また，$f \in I(R)$ に対し，$\mathrm{sim}(f) \in R^\times$ を $\widehat{f} \circ \lambda_0 \circ f = \mathrm{sim}(f)\lambda_0$ を満たす元として定める．$\mathrm{sim}\colon I \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数群の準同型である．

上の補題を用いると，A の $\mathbb{Q}$ 偏極の同種類を I の Galois コホモロジーで記述することができる．

命題 8.36 $C = \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ とおく．

(1) λ を A の $\mathbb{Q}$ 偏極とするとき，$h \in (C \otimes \overline{\mathbb{Q}})^\times$ および $a \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ であって $\lambda = a(\widehat{h} \circ \lambda_0 \circ h)$ を満たすものが存在する．$c\colon \Gamma_{\mathbb{Q}} \to I(\overline{\mathbb{Q}})$; $\tau \mapsto h\tau(h)^{-1}$ は 1 コサイクルとなり，そのコホモロジー類 $[c] \in H^1(\mathbb{Q}, I)$ は (A, λ) の同種類のみに依存する．さらに，$[c] \in \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}, I) \to H^1(\mathbb{R}, I))$ が成り立つ．

(2) (1) の対応によって，A の $\mathbb{Q}$ 偏極の同種類と $\mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}, I) \to H^1(\mathbb{R}, I))$ の元は一対一に対応する．

証明 埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定する．

(1) を示す．$\mathbb{Q}$ 代数 R に対して $\{(h, a) \in (C \otimes R)^\times \times R^\times \mid \lambda = a(\widehat{h} \circ \lambda_0 \circ h)\}$ を対応させる関手は $\mathbb{Q}$ 上有限型のアフィンスキームによって表現される．補題 8.35 より，このアフィンスキームは $\mathbb{R}$ 値点を持つので空ではなく，したがって $\overline{\mathbb{Q}}$ 値点を持つ．このことから h, a の存在が分かる．$h\tau(h)^{-1} \in I(\overline{\mathbb{Q}})$ であることは λ_0, λ が τ 不

変であることから従う．$[c]$ が (A,λ) の同種類のみに依存することは容易に確認できる．$[c]\in\operatorname{Ker}(H^1(\mathbb{Q},I)\to H^1(\mathbb{R},I))$ を示す．$f\in(C\otimes\mathbb{R})^\times$ を補題 8.35 のようにとると，$g=hf^{-1}\in I(\mathbb{C})$ であり，$\tau\in\Gamma_\mathbb{R}$ に対し $c(\tau)=h\tau(h)^{-1}=gf\tau(gf)^{-1}=g\tau(g)^{-1}$ となるので $[c]$ の $H^1(\mathbb{R},I)$ における像は 1 であることが分かる．

(2) を示すために，(1) の逆写像を構成する．1 コサイクル $c\colon\Gamma_\mathbb{Q}\to I(\overline{\mathbb{Q}})$ であって $[c]\in\operatorname{Ker}(H^1(\mathbb{Q},I)\to H^1(\mathbb{R},I))$ となるものをとる．$H^1(\mathbb{Q},C^\times)=1$ であるから，$h\in(C\otimes\overline{\mathbb{Q}})^\times$ であって $c(\tau)=h\tau(h)^{-1}$ となるものが存在する．また，$H^1(\mathbb{Q},\mathbb{G}_\mathrm{m})=1$ であるから，$a\in\overline{\mathbb{Q}}^\times$ であって $\operatorname{sim}(c(\tau))=a\tau(a)^{-1}$ となるものが存在する．さらに，$[c]\in H^1(\mathbb{Q},I)$ の $H^1(\mathbb{R},I)$ における像が自明であることから，$g\in I(\mathbb{C})$ が存在して $c(\tau)=g\tau(g)^{-1}$ $(\tau\in\Gamma_\mathbb{R})$ を満たす．$\tau\in\Gamma_\mathbb{R}$ に対し，$\operatorname{sim}(g)\tau(\operatorname{sim}(g))^{-1}=\operatorname{sim}(c(\tau))=a\tau(a)^{-1}$ であるから，$a^{-1}\operatorname{sim}(g)=\tau(a^{-1}\operatorname{sim}(g))$ が分かる．よって $a^{-1}\operatorname{sim}(g)\in\mathbb{R}$ である．g をスカラー倍で調整して，必要なら a を $-a$ でとりかえることにより，$\operatorname{sim}(g)=a$ となるようにしておく．

$\lambda_c=a^{-1}(\widehat{h}\circ\lambda_0\circ h)\in\operatorname{Hom}(A,\widehat{A})\otimes\overline{\mathbb{Q}}$ とおく．このとき，$\tau(h)=c(\tau)^{-1}h$ および $c(\tau)\in I(\overline{\mathbb{Q}})$ に注意すると，$\tau\in\Gamma_\mathbb{Q}$ に対し

$$\begin{aligned}\tau(\lambda_c)&=\tau(a)^{-1}(\widehat{\tau(h)}\circ\lambda_0\circ\tau(h))=\tau(a)^{-1}(\widehat{h}\circ\widehat{c(\tau)}^{-1}\circ\lambda_0\circ c(\tau)^{-1}\circ h)\\&=\tau(a)^{-1}\operatorname{sim}(c(\tau))^{-1}(\widehat{h}\circ\lambda_0\circ h)=a^{-1}(\widehat{h}\circ\lambda_0\circ h)=\lambda_c\end{aligned}$$

となるので $\lambda_c\in\operatorname{Hom}(A,\widehat{A})\otimes\mathbb{Q}$ である．λ_c が $\mathbb{Q}$ 偏極であることを示そう．$f=g^{-1}h\in(C\otimes\mathbb{C})^\times$ とおくと，$\tau\in\Gamma_\mathbb{R}$ に対し $\tau(f)=\tau(g)^{-1}\tau(h)=g^{-1}h=f$（2 つ目の等号では $h\tau(h)^{-1}=c(\tau)=g\tau(g)^{-1}$ を用いた）なので $f\in(C\otimes\mathbb{R})^\times$ であり，

$$\widehat{f}\circ\lambda_0\circ f=\widehat{h}\circ\widehat{g}^{-1}\circ\lambda_0\circ g^{-1}\circ h=a\operatorname{sim}(g)^{-1}\lambda_c=\lambda_c$$

が成り立つ．よって補題 8.35 より λ は $\mathbb{Q}$ 偏極である．

同種類 $[(A,\lambda_c)]$ は h, a のとり方によらないこと，$[c]\mapsto[(A,\lambda_c)]$ は (1) の逆写像を与えることが容易に確認できるので，(2) が示された． □

さて，$(A,\lambda)\in\mathrm{PIsog}_j$ をとり，それに対応するコホモロジー類を $[c]\in H^1(\mathbb{Q},I)$ とする．(A,λ_0), (A,λ) に対応する Kottwitz 3 つ組をそれぞれ $(\gamma_0;\gamma^*,\delta^*)$, $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ とする．$[c]$ そのものを Kottwitz 3 つ組で記述することはできないが，その $\prod_{v\neq\infty}H^1(\mathbb{Q}_v,I)$ における像は，以下の命題のように γ^*, δ^*, γ, δ を用いて書くことができる．

命題 8.37 v を $\mathbb{Q}$ の有限素点とし，$[c] \in H^1(\mathbb{Q}, I)$ の $H^1(\mathbb{Q}_v, I)$ における像を $[c]_v$ と書く．

(1) $v = \ell' \neq p$ のとき，同型 $H^1(\mathbb{Q}_{\ell'}, I) \xrightarrow{\cong} H^1(\mathbb{Q}_{\ell'}, G_{\gamma^*_{\ell'}})$（命題 8.32 参照）による同一視のもとで $[c]_{\ell'} = \mathrm{inv}(\gamma^*_{\ell'}, \gamma_{\ell'})$ である．

(2) $\delta^*, \delta \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_{p^j})$ は安定 σ 共役であり，同型 $H^1(\mathbb{Q}_p, I) \xrightarrow{\cong} H^1(\mathbb{Q}_p, G_{\delta^*\sigma})$（命題 8.32 参照）による同一視のもとで $[c]_p = \mathrm{inv}(\delta^*, \delta)$ が成り立つ．

証明 (1) を示す．交代形式を定数倍を除いて保つ同型

$$\psi_0\colon (\mathbb{Q}_{\ell'}^{2n}, \langle\ ,\ \rangle) \xrightarrow{\cong} (V_{\ell'}A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \langle\ ,\ \rangle_{\lambda_0}),\ \psi\colon (\mathbb{Q}_{\ell'}^{2n}, \langle\ ,\ \rangle) \xrightarrow{\cong} (V_{\ell'}A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \langle\ ,\ \rangle_{\lambda})$$

($\mathbb{Q}$ 偏極 λ_0, λ から決まる $V_{\ell'}A_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 上のペアリングを $\langle\ ,\ \rangle_{\lambda_0}$, $\langle\ ,\ \rangle_{\lambda}$ と書いている）および埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$ を固定する．$h \in (C \otimes \overline{\mathbb{Q}})^\times$ を命題 8.36 (1) のようにとると，h は交代形式を定数倍を除いて保つ同型 $(V_{\ell'}A_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell'}} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}, \langle\ ,\ \rangle_{\lambda}) \xrightarrow{\cong} (V_{\ell'}A_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell'}} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}, \langle\ ,\ \rangle_{\lambda_0})$ を誘導する．したがって，$h' = \psi_0^{-1} \circ h \circ \psi$ は $\mathrm{GSp}_{2n}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'})$ の元を定める．h は Frobenius 作用を保つので，$\gamma_{\ell'} = \psi^{-1} \circ \mathrm{Fr}_{p^j}^{-1} \circ \psi = h'^{-1} \circ \psi_0^{-1} \circ h \circ \mathrm{Fr}_{p^j}^{-1} \circ h^{-1} \circ \psi_0 \circ h' = h'^{-1}\gamma^*_{\ell'}h'$ を得る．よって，$\mathrm{inv}(\gamma^*_{\ell'}, \gamma_{\ell'})$ は 1 コサイクル $\Gamma_{\mathbb{Q}_{\ell'}} \to G_{\gamma^*_{\ell'}}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'});\ \tau \mapsto h'\tau(h')^{-1}$ のコホモロジー類である．一方，$\tau \in \Gamma_{\mathbb{Q}_{\ell'}}$ に対し，$c(\tau) = h\tau(h)^{-1} \in I(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'})$ の同型 $I(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}) \xrightarrow{\cong} G_{\gamma^*_{\ell'}}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'})$ による像は $\psi_0^{-1} \circ h\tau(h)^{-1} \circ \psi_0 = h'\tau(h')^{-1}$ となる．すなわち，同型 $H^1(\mathbb{Q}_{\ell'}, I) \xrightarrow{\cong} H^1(\mathbb{Q}_{\ell'}, G_{\gamma^*_v})$ による $[c]$ の像は $\mathrm{inv}(\gamma^*_{\ell'}, \gamma_{\ell'})$ である．

次に (2) を示す．$N\delta^* \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma_0 \overset{\mathrm{st}}{\sim} N\delta$ と命題 8.19 より δ^* と δ が安定 σ 共役であることが従う．Tate 加群の代わりにクリスタルホモロジーを用いて上と同様の議論を行うことで $[c]_p = \mathrm{inv}(\delta^*, \delta)$ も確認できる． □

以上をまとめると，次が得られる．

命題 8.38 $(\gamma_0; \gamma, \delta) \in \mathrm{KT}_j$ とし，γ_0 が命題 8.34 の条件 $(*)$ を満たすと仮定する．このとき，$(\gamma_0; \gamma, \delta)$ が $\mathrm{PIsog}_j \to \mathrm{KT}_j$ の像に含まれることは以下の条件を満たす元 $[c] \in \mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}, I) \to H^1(\mathbb{R}, I))$ が存在することと同値である：

- 任意の有限素点 $\ell' \neq p$ に対し，$[c]_{\ell'} = \mathrm{inv}(\gamma^*_{\ell'}, \gamma_{\ell'})$.
- $[c]_p = \mathrm{inv}(\delta^*, \delta)$.

さらに，$(\gamma_0; \gamma, \delta)$ がこの条件を満たすとき，$\mathrm{PIsog}_j \to \mathrm{KT}_j$ の $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ における

ファイバーの元の個数は $|\ker^1(\mathbb{Q}, I)| = |\ker^1(\mathbb{Q}, I_0)|$ である（I_0 は定義 8.28 の通り，γ_0 の中心化群 G_{γ_0} を表すのであった）．

証明 等式 $|\ker^1(\mathbb{Q}, I)| = |\ker^1(\mathbb{Q}, I_0)|$ 以外は既に証明済みである．この等式は，[Kot84b, (4.2.2)] より

$$|\ker^1(\mathbb{Q}, I)| = |\ker^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{I}))| = |\ker^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{I}_0))| = |\ker^1(\mathbb{Q}, I_0)|$$

となるのでよい． □

上の命題によって，PIsog_j の元を数える問題は以下の問題に帰着された：

> $\bigl((\mathrm{inv}(\gamma^*_{\ell'}, \gamma_{\ell'}))_{\ell'}, \mathrm{inv}(\delta^*, \delta), 0\bigr) \in \prod_v H^1(\mathbb{Q}_v, I)$ はいつ $H^1(\mathbb{Q}, I)$ の元から来るか？

[Kot86, Proposition 7.1] より，有限個の素点 $\ell' \neq p$ を除いて $\mathrm{inv}(\gamma^*_{\ell'}, \gamma_{\ell'}) = 1$ であるから，$((\mathrm{inv}(\gamma^*_{\ell'}, \gamma_{\ell'}))_{\ell'}, \mathrm{inv}(\delta^*, \delta), 0)$ は

$$\bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, I) = \Bigl\{(a_v)_v \in \prod_v H^1(\mathbb{Q}_v, I) \Bigm| \text{ほとんど全ての } v \text{ に対し } a_v = 1\Bigr\}$$

の元である．$\bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, I)$ の元が $H^1(\mathbb{Q}, I)$ から来るための条件は次で与えられる：

命題 8.39（[Kot86, Proposition 2.6]） 合成

$$\bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, I) \xrightarrow{\bigoplus_v \kappa_{I_{\mathbb{Q}_v}}} \bigoplus_v \pi_0(Z(\widehat{I})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})^D \to \pi_0(Z(\widehat{I})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})^D$$

の核は $H^1(\mathbb{Q}, I) \to \bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, I)$ の像に一致する．

この命題をもとに，障害類を定義しよう．

定義 8.40 有限アーベル群 $\pi_0(Z(\widehat{I})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}}) = \pi_0(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}}}) = Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}}}/Z(\widehat{G})$ を $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ と書く[*24]．なお，2 つ目の等号は γ_0 が楕円的半単純であり，$Z(\widehat{G})$ が連結であることから従う．また，$((\mathrm{inv}(\gamma^*_{\ell'}, \gamma_{\ell'}))_{\ell'}, \mathrm{inv}(\delta^*, \delta), 0) \in \bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, I)$ の $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})^D$ における像を $\mathrm{obs}((\gamma_0; \gamma^*, \delta^*), (\gamma_0; \gamma, \delta))$ と書く．

[*24] 一般の場合の $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ の定義はもっと複雑である．[Kot90, p. 166] を参照（注意 8.43 にも定義を書いた）．$G = \mathrm{GSp}_{2n}$ の場合は $Z(\widehat{G})$ が連結で $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の作用が自明なので状況がだいぶ簡単になっている．

命題 8.38 と命題 8.39 から次が従う．

系 8.41 $(\gamma_0;\gamma,\delta)\in\mathrm{KT}_j$ とし，γ_0 が命題 8.34 の条件 $(*)$ を満たすとする．このとき, $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ が $\mathrm{PIsog}_j\to\mathrm{KT}_j$ の像に含まれることは $\mathrm{obs}((\gamma_0;\gamma^*,\delta^*),(\gamma_0;\gamma,\delta))=1$ と同値である．

■障害類の群論的な記述 上で定義した障害類は，意味付けは理解しやすいが，固定した $\mathbb{Q}$ 偏極 λ_0 に依存しているという欠点がある．ここではまず Kottwitz 3 つ組 γ_0,γ,δ から純代数的に $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)\in\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})^D$（**Kottwitz 不変量**と呼ばれる）を定義し，それが $\mathrm{obs}((\gamma_0;\gamma^*,\delta^*),(\gamma_0;\gamma,\delta))$ と一致することを見る．$\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ の定義のアイデアは，obs が γ^* と γ および δ^* と δ のずれを測っていたのに対し，γ_0 と γ および γ_0 と δ のずれを測るというものである．

定義 8.42（[Kot90, §2]） v を $\mathbb{Q}$ の素点とする．$\alpha_v(\gamma_0;\gamma,\delta)\in X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})$ を以下のように定める．

(1) $v\neq p,\infty$ のとき，$\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma_v)\in H^1(\mathbb{Q}_v,I_0)$ の $\kappa_{I_0}\colon H^1(\mathbb{Q}_v,I_0)\to\pi_0(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})^D\subset X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})$ での像を $\alpha_v(\gamma_0;\gamma,\delta)$ と書く．

(2) $v=p$ のとき，$\mathrm{inv}_\sigma(\gamma_0,\delta)\in B(I_0)$ の $\kappa_{I_0}\colon B(I_0)\to X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}})$ での像を $\alpha_p(\gamma_0;\gamma,\delta)$ と書く．

(3) $v=\infty$ のとき，$\mathrm{GSp}_{2n,\mathbb{R}}$ の楕円的な極大トーラス T で γ_0 を含むものを一つとる．志村データに現れる準同型 $h\colon\mathbb{S}\to\mathrm{GSp}_{2n,\mathbb{R}}$ を共役で動かすことで，T を経由するようにできる．このとき，$\mu_h\colon\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}\to\mathrm{GSp}_{2n,\mathbb{C}}$ は $T_{\mathbb{C}}$ を経由するので，$X_*(T)$ の元，すなわち $X^*(\widehat{T})$ の元を与える．この元の $X^*(\widehat{T})\to X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$ による像 α_∞ は h の共役のとり方によらないことが証明できる ([Kot90, Lemma 5.1])．さらに，α_∞ の $X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{R}}})\to X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$ による像は T のとり方によらないことが容易に確認できる（I_0 の楕円的極大トーラスが全て $I_0(\mathbb{R})$ 共役であることを使う）．これを $\alpha_\infty(\gamma_0;\gamma,\delta)$ と書く．

[Kot86, Proposition 7.1] よりほとんど全ての v に対して $\alpha_v(\gamma_0;\gamma,\delta)=1$ であるから，$\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=\prod_v\alpha_v(\gamma_0;\gamma,\delta)\in X^*(\bigcap_v Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})$ を考えることができる．Chebotarev 密度定理より $\bigcap_v Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}}=Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}}}$ であるから，$\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ は

$Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}}$ の指標である．さらに，

$$\alpha_v(\gamma_0;\gamma,\delta)|_{Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}}} = \begin{cases} 1 & (v \neq p, v < \infty) \\ -\mu_h & (v = p) \\ \mu_h & (v = \infty) \end{cases}$$

（$v = p$ の場合は注意 8.22 を参照）および $Z(\widehat{G})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}} = Z(\widehat{G})$ より，$\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ は $Z(\widehat{G})$ 上自明である．よって $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ は $Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}}/Z(\widehat{G}) = \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ の指標を与える．

注意 8.43 一般の場合にも，全く同様の方法によって

$$\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) = \bigcap_v (Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}} Z(\widehat{G}))/Z(\widehat{G})$$

上の指標 $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ を定義することができる．

命題 8.10 と命題 8.23 から次の補題が従う．

補題 8.44 $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta) = \alpha(\gamma_0;\gamma^*,\delta^*) + \mathrm{obs}((\gamma_0;\gamma^*,\delta^*),(\gamma_0;\gamma,\delta))$.

以下の命題は系 8.41 を $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ を用いて記述したものである．これが定理 8.25 の証明の核心である．

命題 8.45 $(\gamma_0;\gamma,\delta) \in \mathrm{KT}_j$ とし，γ_0 が命題 8.34 の条件 $(*)$ を満たすと仮定する．このとき，$(\gamma_0;\gamma,\delta)$ が $\mathrm{PIsog}_j \to \mathrm{KT}_j$ の像に含まれることは $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta) = 1$ と同値である．

γ_0 に対応する $\mathbb{F}_{p^j}$ 上の n 次元アーベル多様体 A をとる．系 8.41 と補題 8.44 より，この命題を証明するためには，A のある $\mathbb{Q}$ 偏極 λ_0 および (A,λ_0) に対応する $(\gamma_0;\gamma^*,\delta^*) \in \mathrm{KT}_j$ に対し $\alpha(\gamma_0;\gamma^*,\delta^*) = 1$ を証明すればよい．これは以下に解説するように，虚数乗法論を用いて示される．

$C = \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ とおき，その λ_0 に関する Rosati 対合を $*$ と書く．また，A の p^j 乗 Frobenius 射を $\pi_A \in C$ とおく．I の極大トーラス T を ∞ および I_0 が準分裂的でない素点において楕円的であるようにとり，C における T の中心化環を L とおく．L は $\mathbb{Q}(\pi_A)$ を含む n 次元の CM 代数（CM 体の直積）であり，その複素共役は Rosati 対合 $*$ の制限と一致する．さらに $T = \{x \in \mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \mid xx^* \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\}$ が成り立つ．つまり，$(L,*)$ は T の「環バージョン」のようなものになっている．

一方で，$(C,*)$ は I の「環バージョン」にあたる（命題 8.32 における I の定義を思い出すとよい）．$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)=M_{2n}(\mathbb{Q})$ における γ_0 の中心化環を C_0 と書き，$*$ を $\langle ax,y\rangle=\langle x,a^*y\rangle$ $(a\in\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V), x,y\in V)$ によって特徴付けられる $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ の対合とすると，$(C_0,*)$ は $I_0=G_{\gamma_0}$ の「環バージョン」となる．以下の補題のように，$(L,*)$ は $(C_0,*)$ に埋め込むことができる：

補題 8.46 $*$ を保ち，π_A を γ_0^{-1} にうつす $\mathbb{Q}$ 代数の埋め込み $L\hookrightarrow C_0$ が存在する．

証明 概要のみ述べる．詳細は [Kot92, Lemma 14.1] の証明を参照．T の条件から，$\mathbb{Q}$ の任意の素点 v に対し $\mathbb{Q}_v$ 上の埋め込み $T_{\mathbb{Q}_v}\hookrightarrow I_{0,\mathbb{Q}_v}$ が存在する（より正確には，$I_{\mathbb{Q}_v}$ の極大トーラス $T_{\mathbb{Q}_v}$ の $I_{0,\mathbb{Q}_v}$ への移送が存在する）ことが分かる．これを大域的な移送に延長するための障害類は

$$\ker^2(\mathbb{Q},I_{\mathrm{der}}\cap T)=\mathrm{Ker}\Bigl(H^2(\mathbb{Q},I_{\mathrm{der}}\cap T)\to\prod_v H^2(\mathbb{Q}_v,I_{\mathrm{der}}\cap T)\Bigr)$$

に現れることが知られている．T が ∞ で楕円的であるという条件と Tate・中山双対性から，$\ker^2(\mathbb{Q},I_{\mathrm{der}}\cap T)=0$ であることが示せる．

L の C_0 への移送は T の I_0 への移送と一対一に対応するので，埋め込み $L\hookrightarrow C_0$ が得られる． □

補題 8.46 の埋め込みを一つ固定する．このとき，V は階数 1 の自由 L 加群となり，$\langle ax,y\rangle=\langle x,a^*y\rangle$ $(a\in L, x,y\in V)$ が成り立つ．

以上の設定のもとで，$\alpha_v(\gamma_0;\gamma,\delta)$ を $X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})$ の元に持ち上げることができる．

定義 8.47 $\mathbb{Q}$ の各素点 v に対し，$\alpha_v\in X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})$ を以下のように定める．

(1) $v\neq p,\infty$ のとき，L の作用を保ち，交代形式を定数倍を除いて保つ同型 $\psi_v\colon V\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}_v\xrightarrow{\cong}V_vA\otimes_{\mathbb{Q}_v}\overline{\mathbb{Q}}_v$ をとると，1 コサイクル $\Gamma_{\mathbb{Q}_v}\to T(\overline{\mathbb{Q}}_v)$; $\tau\mapsto\psi_v^{-1}\circ\tau(\psi_v)$ が得られる．これのコホモロジー類は ψ_v のとり方に依存しないので，その $H^1(\mathbb{Q}_v,T)\xrightarrow{\kappa_T}\pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})^D\subset X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})$ による像を α_v とする．

(2) $v=p$ のとき，Steinberg の定理 $H^1(\breve{\mathbb{Q}}_p,T)=1$ より，L の作用を保ち，交代形式を定数倍を除いて保つ同型同型 $\psi_p\colon V\otimes_{\mathbb{Q}}\breve{\mathbb{Q}}_p\xrightarrow{\cong}H_{1,\mathrm{crys}}(A/\breve{\mathbb{Z}}_p)_{\mathbb{Q}}$ をとることができる（$\breve{\mathbb{Z}}_p$ は $\breve{\mathbb{Q}}_p$ の整数環を表す）．これによって $H_{1,\mathrm{crys}}(A/\breve{\mathbb{Z}}_p)_{\mathbb{Q}}$ の Frobenius 作用を引き戻したものを Φ と書くと，$(V\otimes_{\mathbb{Q}}\breve{\mathbb{Q}}_p,p^{-1}\Phi)$ は偏

極付きアイソクリスタルとなる．さらに Φ が L の作用と可換であることから，$T(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ の元 b を用いて $p^{-1}\Phi = b\sigma$ と書けることが分かる．b の σ 共役類 $[b] \in B(T)$ は ψ_p のとり方に依存しないので，その $\kappa_T\colon B(T_{\mathbb{Q}_p}) \to X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}})$ による像を α_p とする．

(3) $v = \infty$ のとき，α_∞ は定義 8.42 (3) の通りとする．

次の補題は $\pi_A \in L$ の作用を見ることで容易に従う：

補題 8.48 $X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}}) \to X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})$ による α_v の像は $\alpha_v(\gamma_0;\gamma^*,\delta^*)$ に一致する．

したがって，命題 8.45 は以下に帰着された：

命題 8.49 $\alpha \in X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})$ は自明な指標である．

この命題は A を標数 0 に持ち上げることで証明される．その際には A の定義体 $\mathbb{F}_{p^j}$ を拡大する必要があるため，実際には，上の命題を少し一般化した次の命題を証明する．

命題 8.50（[Kot92, Lemma 13.2]） L を n 次元 CM 代数とし，その複素共役を $*$ と書く．$T = \{x \in \mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \mid xx^* \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\}$ とおく．V を階数 1 の自由 L 加群とし，$\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ を $\langle ax, y\rangle = \langle x, a^*y\rangle$ $(a \in L, x, y \in V)$ を満たす非退化交代形式とする．

(A,λ) を $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の $\mathbb{Q}$ 偏極付き n 次元アーベル多様体とし，$C = \mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}$ 上の λ に関する Rosati 対合を $*$ と書く．$*$ を保つ埋め込み $L \hookrightarrow C$ が存在すると仮定する．

このとき，定義 8.47 と全く同様の方法で定義される $\alpha \in X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})$ は自明な指標である．

証明 $*$ を保つ埋め込み $L \hookrightarrow C$ を一つ固定する．A の $\mathbb{Q}$ 偏極 λ' の Rosati 対合がこの埋め込みに関して L 上の複素共役 $*$ と整合的であるとき，λ' は L と整合的であるということにする．

まず，指標 $\alpha \in X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})$ は $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ のとり方に依存しないことが比較的容易に証明できる．さらに，λ を L と整合的な別の $\mathbb{Q}$ 偏極にとりかえても α は変わらないことが示せる．これは基本的に系 8.41 と同様の議論で証明されるので，ここでは説明しない．詳細は [Kot92, p. 417] を参照されたい．

L は C の極大可換半単純部分代数なので，C は L 上分裂する．よって [Tat71, Théorème 2] より，A をそれと同種なアーベル多様体にとりかえることで，p 進体 F の整数環上のアーベルスキーム $\widetilde{A}$ および $\mathbb{Q}$ 代数の準同型 $L \to \mathrm{End}(\widetilde{A}) \otimes \mathbb{Q}$ が存在して，A が $\widetilde{A}$ の幾何学的特殊ファイバーと L の作用込みで同型となるとしてよい．$\widetilde{A}$ の $\mathbb{Q}$ 偏極 $\widetilde{\lambda}$ であって L と整合的なものをとる．上で述べたことから，λ が $\widetilde{\lambda}$ の A への制限である場合を考えれば十分である．必要なら F を拡大して，$\#\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, F) = [L : \mathbb{Q}]$ となるようにしておく．このとき T は F 上で分裂する．埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ をとる．$V = H_1(\widetilde{A}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}), \langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_{\widetilde{\lambda}_{\mathbb{C}}}$ の場合に考えればよい．

v を $\mathbb{Q}$ の有限素点とするとき，比較定理の同型 $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v = H_1(\widetilde{A}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v \cong V_v\widetilde{A}_{\mathbb{C}} \cong V_v\widetilde{A}_{\overline{F}}$ は L の作用および偏極から決まる交代形式を保つ．このことから，$v \neq p$ ならば $\alpha_v = 1$ であることが分かる．

$v = p$ の場合には，p 進 Hodge 理論の比較定理から，L の作用および交代形式を保つ以下の同型がある：

$$D_{\mathrm{crys}}(V_p\widetilde{A}_{\overline{F}}) \cong H_{1,\mathrm{crys}}(A/\breve{\mathbb{Z}}_p)_{\mathbb{Q}}.$$

ここで，$D_{\mathrm{crys}} \colon V \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{crys}})^{\Gamma_{\breve{F}}}$ は完備離散付値体 $\breve{F}$ に関する Fontaine の関手である．α_p は右辺への Frobenius 作用 F の p^{-1} 倍から決まる不変量であった．A の $\mathbb{Q}$ 偏極 λ から誘導される同型 $H_{1,\mathrm{crys}}(A/\breve{\mathbb{Z}}_p)_{\mathbb{Q}} \cong H_{1,\mathrm{crys}}(\widehat{A}/\breve{\mathbb{Z}}_p)_{\mathbb{Q}} \cong H_{1,\mathrm{crys}}(A/\breve{\mathbb{Z}}_p)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ によって左辺の $p^{-1}F$ は右辺の F に対応するから，結局，α_p は $D_{\mathrm{crys}}(V_p\widetilde{A}_{\overline{F}})^{\vee} \cong D_{\mathrm{crys}}((V_p\widetilde{A}_{\overline{F}})^{\vee})$ への Frobenius 作用に対応して決まる不変量である．

一方で，$I_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F^{\mathrm{ur}})$ の $V_p\widetilde{A}_{\overline{F}}$ への作用は志村・谷山の虚数乗法論によって記述される．すなわち，次が成り立つ：

> $\Phi_F \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, F)$ を $\mathrm{Lie}(\widetilde{A}_F) \cong \bigoplus_{\varphi \in \Phi_F} \varphi$ (L 加群の同型) となるようにとると，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, F) = \Phi_F \sqcup (\Phi_F \circ *)$ が成り立つ．Φ_F から余指標 $\mu \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},F} \to T_F$ が自然に定まる[*25] (F 値点に誘導される写像 $F^\times \to T(F) \subset (L \otimes_{\mathbb{Q}} F)^\times$ が，同型 $L \otimes_{\mathbb{Q}} F \xrightarrow{\cong} \prod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L,F)} F;\ a \otimes b \mapsto (\varphi(a)b)$ による同一視 $(L \otimes_{\mathbb{Q}} F)^\times \cong \prod_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L,F)} F^\times$ のもとで $a \mapsto (\underbrace{a, \ldots, a}_{\Phi_F\ 成分}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\Phi_F \circ *\ 成分})$ となるようにする)．こ

*25 合成 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_{\mathrm{m},F} \xrightarrow{\mu} \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} T_F \xrightarrow{\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}_p}} T_{\mathbb{Q}_p}$ がリフレックスノルム ([越川, 定義 5.14]) の局所版にあたる．

のとき，I_F の $V_p\widetilde{A}_{\overline{F}}$ への作用は以下の合成で与えられる：

$$I_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F^{\mathrm{ur}}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F^{\mathrm{ur}}) \xrightarrow{\mathrm{Art}_F^{-1}} \mathcal{O}_F^{\times} \xrightarrow{\mu} T(F) \xrightarrow{\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}_p}} T(\mathbb{Q}_p).$$

埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ による Φ_F の $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \mathbb{C})$ への像を $\Phi_{\mathbb{C}}$ と書くと，これは偏極付き CM アーベル多様体 $(\widetilde{A}_{\mathbb{C}}, \widetilde{\lambda}_{\mathbb{C}})$ の CM 型となるので，μ を底変換して得られる余指標 $\mu_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \to T_{\mathbb{C}}$ と $T_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathrm{GSp}_{2n,\mathbb{C}}$ の合成は μ_h と共役である．よって，以下の補題を $-\mu$ に対して用いることで $\alpha_p = -\alpha_\infty$ が得られ，α が自明であることが分かる． □

補題 8.51 F を p 進体とする．T を $\mathbb{Q}_p$ 上のトーラスで F 上分裂するものとし，$\mu\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},F} \to T_F$ を余指標とする．同型 $B(T) \xrightarrow{\cong} X^*(\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}) \cong X_*(T)_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$ によって μ に対応する $B(T)$ の元を b_μ と書く．

T の $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次元代数的表現 (ξ, V) に対し，V への I_F の作用を

$$I_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F^{\mathrm{ur}}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F^{\mathrm{ur}}) \xrightarrow{\mathrm{Art}_F^{-1}} \mathcal{O}_F^{\times} \xrightarrow{\mu} T(F) \xrightarrow{\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}_p}} T(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\xi} \mathrm{GL}(V)$$

の合成で定める．このとき V はクリスタリン表現であり，V に関して関手的なアイソクリスタルの同型 $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p, b_\mu\sigma) \cong D_{\mathrm{crys}}(V)$ がある．

証明 簡単のため $F = \mathbb{Q}_p$, $T = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の場合に説明する．一般の場合は [Kot92, Lemma 12.1] を参照．この場合 μ は $\mu(z) = z^m$ $(m \in \mathbb{Z})$ の形であり，このとき $b_\mu = p^m$ となる．(ξ, V) として，まず $T = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の 1 次元表現を考える．これは $\xi(z) = z^{m'}$ $(m' \in \mathbb{Z})$ の形である．このとき，V は $I_{\mathbb{Q}_p}$ の表現として $\mathbb{Q}_p(-mm')$ と同型になる（$\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}$ が $\mathbb{Q}_p$ の素元を幾何学的 Frobenius 元の持ち上げにうつすように正規化されていることに注意）．これはクリスタリン表現であり，$D_{\mathrm{crys}}(V)$ は 1 次元 $\breve{\mathbb{Q}}_p$ ベクトル空間になる．さらに，その Frobenius 作用は $p^{mm'}\sigma$ で与えられる．したがって $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p, b_\mu\sigma) \cong D_{\mathrm{crys}}(V)$ が成り立つことが確かめられた．

これを用いて補題の主張を導く．T の $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次元代数的表現のなす淡中圏を $\mathbf{Rep}(T)$ と書く．また，$\breve{\mathbb{Q}}_p$ 上のアイソクリスタルのなす淡中圏を $\mathbf{Isoc}$ と書く．$V \in \mathbf{Rep}(T)$ は 1 次元表現の直和であるから，上で示したことより，V は I_F 表現としてクリスタリンである．したがってテンソル関手 $\mathbf{Rep}(T) \to \mathbf{Isoc}$; $V \mapsto D_{\mathrm{crys}}(V)$ が得られる．このような関手はある $b \in B(T)$ に対する関手 $V \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p, b\sigma)$ と同型であることが知られている ([Kot97, §3.1])．V として一次元表現をとることで $b = b_\mu$ であることが分かるので，主張が従う． □

以上で，定理 8.25 の証明のうち，401 ページのステップ (A) の部分の説明が完了した．ステップ (B) の部分は認めることにすると，

$$\mathrm{Lef}(j, f^p, \mathbf{1}) = \left|\ker^1(\mathbb{Q}, G)\right| \cdot \sum_{\substack{(\gamma_0;\gamma,\delta)\in \mathrm{KT}_j \\ \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1,(*)}} c(\gamma_0;\gamma,\delta) O_\gamma(f^p)\, TO_\delta(\phi_j)$$

という式が得られることになる（「$(*)$」は γ_0 が命題 8.34 の条件 $(*)$ を満たすことを表す）．しかし，γ_0 が条件 $(*)$ を満たさないならば $O_\gamma(f^p)TO_\delta(\phi_j) = 0$ となるので，$(*)$ を満たさないような $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ も含めて和をとっても結果は同じである．これより定理 8.25 が従う．

8.3 Lefschetz 数の安定化

前節では $\mathrm{Lef}(j, f^p, \xi)$ を軌道積分等で表す公式（定理 8.25）を解説したが，ここではさらにそれを変形し，**安定軌道積分**によって表すことを目標とする．主要な文献は [Kot90] であるが，[SS13, §4] も大いに参考になる．安定軌道積分の定義は以下の通りである．

定義 8.52 F を局所体とする．G を F 上の連結簡約代数群とし，G_{der} が単連結であると仮定する．$\gamma \in G(F)$ および $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対し，

$$SO_\gamma(f) = \sum_{\gamma' \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma} e(G_{\gamma'}) O_{\gamma'}(f)$$

と定め，**安定軌道積分**と呼ぶ．ここで γ' は γ と安定共役な $G(F)$ の元の共役類を動く．また，$e(G_{\gamma'}) \in \{\pm 1\}$ は **Kottwitz 符号**と呼ばれ，$G_{\gamma'}$ がその準分裂内部形式からどのくらいずれているかを測る符号である（[Kot83] 参照）．$G_{\gamma'}$ が準分裂ならば $e(G_{\gamma'}) = 1$ となる．特に，γ が正則半単純ならば $G_{\gamma'}$ はトーラス（したがって準分裂）となるので，$SO_\gamma(f) = \sum_{\gamma' \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma} O_{\gamma'}(f)$ である．

計算を始める前に，$c(\gamma_0;\gamma,\delta)$（定義 8.28 参照）をもう少し見やすい形で表示しておく．

補題 8.53 $c(\gamma_0;\gamma,\delta) = \tau(G) \cdot |\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})|$.

証明 簡単のため，まず $G = \mathrm{GSp}_{2n}$ の場合に示す．この場合は $H^1(\mathbb{Q}, G) = 1$ であるから，$c(\gamma_0;\gamma,\delta) = \tau(I) \cdot |\ker^1(\mathbb{Q}, I_0)|$ である．さらに，[Kot84b, (4.2.2)]

より，$|\ker^1(\mathbb{Q},I_0)| = |\ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{I}_0))| = |\ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{I}))|$ である．また，2.1 節で述べたように $\tau(I) = |\pi_0(Z(\widehat{I})^{\Gamma_\mathbb{Q}})|\cdot|\ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{I}))|^{-1}$ だったから，$c(\gamma_0;\gamma,\delta) = |\pi_0(Z(\widehat{I})^{\Gamma_\mathbb{Q}})| = |\tau(\mathrm{GSp}_{2n})|\cdot|\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})|$ となるのでよい．

一般の場合は，

$$1\to\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_\mathbb{Q}})\to\pi_0(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_\mathbb{Q}})\to\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})\to\ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{G}))\xrightarrow{(*)}\ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{I}_0))$$

という完全系列があり，さらに $(*)$ の Pontryagin 双対は $\ker^1(\mathbb{Q},I_0)\to\ker^1(\mathbb{Q},G)$ である（[Kot86, §9] 参照）．これを用いて上と同様の議論を行えばよい． □

Lefschetz 数は $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1$ となる Kottwitz 3 つ組 $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ で添字付けられた和で表されていた．$\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ は有限アーベル群 $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ $(I_0=G_{\gamma_0})$ の指標であったことを思い出そう．変形の最初のステップでは，有限アーベル群 $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ に関する指標の直交関係を用いる：

$$\begin{aligned}
&\left|\ker^1(\mathbb{Q},G)\right|^{-1}\mathrm{Lef}(j,f^p,\xi)\\
&=\tau(G)\sum_{\substack{(\gamma_0;\gamma,\delta)\in\mathrm{KT}_j\\ \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1}}|\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})|e(\gamma,\delta)O_\gamma(f^p)\,TO_\delta(\phi_j)\,\mathrm{Tr}\,\xi(\gamma_0)\\
&=\tau(G)\sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)\in\mathrm{KT}_j}\ \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})}\langle\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta),\kappa\rangle^{-1}e(\gamma,\delta)O_\gamma(f^p)\,TO_\delta(\phi_j)\,\mathrm{Tr}\,\xi(\gamma_0)\\
&=\tau(G)\sum_{\gamma_0}\ \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})}\ \sum_{(\gamma,\delta)}\langle\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta),\kappa\rangle^{-1}e(\gamma,\delta)O_\gamma(f^p)\,TO_\delta(\phi_j)\,\mathrm{Tr}\,\xi(\gamma_0).
\end{aligned}$$

ここで，$e(\gamma,\delta)=(\prod_{v\neq p,\infty}e(G_{\gamma_v}))e(G_{\delta\sigma})e(I_\mathbb{R})$（$I_\mathbb{R}$ は $I_{0,\mathbb{R}}$ の内部形式で中心を法としてコンパクトなもの）は Kottwitz 符号の積である．$\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1$ のときには G_{γ_v}, $G_{\delta\sigma}$, $I_\mathbb{R}$ は I_0 の $\mathbb{Q}$ 上の内部形式 I の局所成分となっていたので，[Kot83, p. 297, Proposition] より $e(\gamma,\delta)=1$ である．しかし，上の式の 3 行目以降では $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1$ とならない $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ も考えているので，$e(\gamma,\delta)=1$ とは限らない．

f^p が $\bigotimes'_{v\neq p,\infty}f_v$ と制限テンソル積に分かれていると仮定し，γ_0 および $\kappa\in\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ に対応する内側の和

$$\sum_{(\gamma,\delta)}\langle\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta),\kappa\rangle^{-1}e(\gamma,\delta)O_\gamma(f^p)\,TO_\delta(\phi_j)\,\mathrm{Tr}\,\xi(\gamma_0) \tag{†}$$

を考える．$\kappa=1$ の場合，これは

$$\Bigl(\prod_{v\neq p,\infty}SO_{\gamma_v}(f_v)\Bigr)\times\Bigl(\sum_{N\delta\overset{\mathrm{st}}{\sim}\gamma_0}e(G_{\delta\sigma})\,TO_\delta(\phi_j)\Bigr)\times\Bigl(e(I_\mathbb{R})\,\mathrm{Tr}\,\xi(\gamma_0)\Bigr)$$

と局所成分の積に分解し，少なくとも $v \neq p, \infty$ の部分は安定軌道積分で表せている．$\kappa \neq 1$ の場合にも，上の式 (†) を κ から決まる別の群（エンドスコピー群）の安定軌道積分で記述するのがエンドスコピーの理論である[*26]．

■エンドスコピー群　H が G のエンドスコピー群であるとは，おおむね $\widehat{H}$ が半単純元 $s \in \widehat{G}$ による中心化群 $Z_{\widehat{G}}(s)$ の連結成分となっていることをいう．正確な定義は以下の通りである．

定義 8.54（[Kot84b, §7]，[Shi10, §2]）　F を標数 0 の局所体または代数体とする．G を F 上の連結簡約代数群とし，G_{der} が単連結であると仮定する．G の**エンドスコピー 3 つ組**とは，F 上の準分裂連結簡約代数群 H，$Z(\widehat{H})$ の元 s，埋め込み $\eta\colon \widehat{H} \hookrightarrow \widehat{G}$ の 3 つ組 (H, s, η) で以下の条件を満たすもののことである：

- $\eta(\widehat{H}) = \widehat{G}_{\eta(s)}$（右辺は中心化群 $Z_{\widehat{G}}(\eta(s))$ の単位元を含む連結成分 $Z_{\widehat{G}}(\eta(s))^0$ を表す）．
- η の $\widehat{G}$ 共役類は Γ_F の作用で安定 (特に $Z(\widehat{H}) \to Z(\widehat{G})$ は Γ_F の作用と可換)．
- s の $Z(\widehat{H})/Z(\widehat{G})$ での像は Γ_F 不変であり，短完全列 $1 \to Z(\widehat{G}) \to Z(\widehat{H}) \to Z(\widehat{H})/Z(\widehat{G}) \to 1$ の境界準同型 $(Z(\widehat{H})/Z(\widehat{G}))^{\Gamma_F} \to H^1(F, Z(\widehat{G}))$ での像は F が局所体ならば自明であり，F が代数体ならば $\ker^1(F, Z(\widehat{G}))$ に属する．

H のことを G の**エンドスコピー群**ともいう．

エンドスコピー 3 つ組 (H, s, η) が $(Z(\widehat{H})^{\Gamma_F})^0 \subset Z(\widehat{G})$ を満たすとき，**楕円的**であるという．

エンドスコピー 3 つ組 (H, s, η), (H', s', η') の間の同型とは，以下の条件を満たす同型 $\alpha\colon H \xrightarrow{\cong} H'$ のこととする：

- η' と $\eta \circ \widehat{\alpha}$ は $\widehat{G}$ 共役である．このことから特に，$\widehat{\alpha}\colon Z(\widehat{H'}) \to Z(\widehat{H})$ は $Z(\widehat{G})$ 上 id であることが分かる．
- $\widehat{\alpha}\colon Z(\widehat{H'})/Z(\widehat{G}) \xrightarrow{\cong} Z(\widehat{H})/Z(\widehat{G})$ は s' を s にうつす[*27]．

G のエンドスコピー 3 つ組の同型類全体の集合を $\mathcal{E}(G)$ と書き，そのうち楕円的なも

[*26] エンドスコピー群には準分裂的であることを課すので，G が準分裂的でない場合には，$\kappa = 1$ の項も，G の準分裂内部形式という，G とは異なる群の安定軌道積分で記述することになる．

[*27] この条件は [Shi10, Definition 2.5] に合わせたもので，[Kot84b, (7.5.2)] よりも強いものとなっている．[Shi10, Remark 2.6] を参照．

ののなす部分集合を $\mathcal{E}^{\mathrm{ell}}(G)$ と書く．

例 8.55　$G=\mathrm{Sp}_{2n}$ のとき，$\widehat{G}=\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ である．$\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ を行列 Φ_{2n+1} (1 節の「記号」参照) から定まる対称形式を用いて実現しておく．このとき，$2a+(2b+1)=2n+1$ を満たす整数 $a,b\geq 0$ に対し，$s=\mathrm{diag}(\underbrace{-1,\dots,-1}_{a\text{ 個}},\underbrace{1,\dots,1}_{2b+1\text{ 個}},\underbrace{-1,\dots,-1}_{a\text{ 個}})$ とおくとこれは $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ の元である．s の中心化群 $Z_{\widehat{G}}(s)$ は

$$\bigl\{(h_1,h_2)\in \mathrm{O}_{2a}(\mathbb{C})\times \mathrm{O}_{2b+1}(\mathbb{C})\bigm| (\det h_1)(\det h_2)=1\bigr\}$$

となるが，$(h_1,h_2)\mapsto (h_1,(\det h_2)h_2)$ により，これは $\mathrm{O}_{2a}(\mathbb{C})\times \mathrm{SO}_{2b+1}(\mathbb{C})$ と同型である．特に $\widehat{G}_s=\mathrm{SO}_{2a}(\mathbb{C})\times\mathrm{SO}_{2b+1}(\mathbb{C})$ となる．$\widehat{H}=\widehat{G}_s$ となるエンドスコピー群 H を考えよう．このためには，$\Gamma_F\to\mathrm{Aut}(\widehat{H})\to\mathrm{Out}(\widehat{H})=\mathrm{Aut}(\widehat{H})/\widehat{H}_{\mathrm{ad}}$ の合成がどうなるかを決定する必要がある．埋め込み $\widehat{H}\hookrightarrow\widehat{G}$ の $\widehat{G}$ 共役類が Γ_F 不変であるという条件から，Γ_F の $\widehat{H}$ への作用は $\widehat{G}$ の元による共役で書けることが分かる．$\tau\in\Gamma_F$ が $g_\tau\in\widehat{G}$ による共役で作用するとしよう．さらに $s\in Z(\widehat{H})$ が Γ_F 不変であるという条件から，$g_\tau\in Z_{\widehat{G}}(s)$ であることが分かる．このことから，$\Gamma_F\to\mathrm{Out}(\widehat{H})$ は $\Gamma_F\to Z_{\widehat{G}}(s)/\widehat{H}$ を経由する．容易に分かるように

$$Z_{\widehat{G}}(s)/\widehat{H}\cong\begin{cases}1 & (a=0)\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (a>0)\end{cases}$$

であるから，この準同型の核に対応する F の拡大体を F' とすると，F' は F の高々 2 次拡大であり，H は F' 上分裂する $2a$ 次準分裂直交群 $\mathrm{SO}_{2a,F'/F}$ と Sp_{2b} の直積であることが分かる．以上でエンドスコピー 3 つ組 $(\mathrm{SO}_{2a,F'/F}\times\mathrm{Sp}_{2b},s,\mathrm{id})$ が得られた．

$a\neq 1$ の場合，$Z(\widehat{H})^{\Gamma_F}=\{1,s\}\subset\mathrm{SO}_{2a}(\mathbb{C})\times\mathrm{SO}_{2b+1}(\mathbb{C})$ なので，$(Z(\widehat{H})^{\Gamma_F})^0=\{1\}=Z(\widehat{G})$ となり $(\mathrm{SO}_{2a,F'/F}\times\mathrm{Sp}_{2b},s,\mathrm{id})$ は楕円的であることが分かる．$a=1$ のときには $\mathrm{SO}_{2a}(\mathbb{C})$ はアーベルなので状況が異なる．この場合には $(\mathrm{SO}_{2a,F'/F}\times\mathrm{Sp}_{2b},s,\mathrm{id})$ が楕円的であることと $F'\neq F$ が同値である．

Sp_{2n} の楕円的なエンドスコピー 3 つ組は，同型を除きこのような形のものに限られることが知られている．

例 8.56　$G=\mathrm{GSp}_4$ のとき，$\widehat{G}=\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ である．$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ を行列 Φ_4 から定まる交代形式を用いて実現しておく．$H=(\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_2)/\{(z,z^{-1})\mid z\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\}$ とおくと，

$\widehat{H} = \{(g, g') \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \det g = \det g'\}$ である．$s = (1, -1) \in Z(\widehat{H})$ とおく．また，埋め込み $\eta\colon \widehat{H} \hookrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) = \widehat{G}$ を以下で定める：

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a' & b' & 0 \\ 0 & c' & d' & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

このとき，(H, s, η) は楕円的なエンドスコピー 3 つ組である．GSp_4 の楕円的なエンドスコピー 3 つ組は，同型を除いて $(\mathrm{GSp}_4, 1, \mathrm{id})$, (H, s, η) の 2 つのみであることが知られている．

G のエンドスコピー 3 つ組 (H, s, η) が与えられたとき，$H(F)$ の半単純元 γ_H と $G(F)$ の半単純元 γ が「対応する」ということが定義できる．このためにまず，G, H の極大トーラスの間の許容同型を定義しよう．

定義 8.57 $\widehat{G}$, $\widehat{H}$ の Borel 対 $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$, $(\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$ を固定し，$\mathrm{Ad}(g)(\eta(\mathbb{T}_H)) = \mathbb{T}$ となる $g \in \widehat{G}$ をとる．T, T_H をそれぞれ $G_{\overline{F}}$, $H_{\overline{F}}$ の極大トーラスとする．T を含む $G_{\overline{F}}$ の Borel 部分群 B をとると同型 $\widehat{T} \cong \mathbb{T}$ が決まり，T_H を含む $H_{\overline{F}}$ の Borel 部分群 B_H をとると同型 $\widehat{T}_H \cong \mathbb{T}_H$ が決まる．合成 $\widehat{T} \cong \mathbb{T} \xrightarrow[\cong]{\eta^{-1} \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})} \mathbb{T}_H \cong \widehat{T}_H$ の双対をとることで，同型 $T_H \xrightarrow{\cong} T$ が得られる．このような同型を**許容同型**と呼ぶ．許容同型の Weyl 群 $\Omega(G_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}})$ による軌道は $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$, $(\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$, g, B_H, B のとり方によらない．

T, T_H が F 上定義されるとき，B をとりかえることで許容同型が F 上定義されるようにできるならば，T は T_H の**移送**であるという．

補題 8.58（[Kot82, Corollary 2.2], [LS87, p. 226]） G が準分裂であるときには，H の任意の極大トーラス T_H に対し，その移送となる G の極大トーラス T が存在する．

この許容同型を用いて半単純元の対応を定義しよう．

定義 8.59 $\gamma_H \in H(\overline{F})$, $\gamma \in G(\overline{F})$ を半単純元とする．γ_H と γ が対応するとは，以下が存在することをいう：

- γ_H を含む $H_{\overline{F}}$ の極大トーラス T_H,
- γ を含む $G_{\overline{F}}$ の極大トーラス T,

- γ_H を γ にうつす許容同型 $T_H \xrightarrow{\cong} T$.

これは γ_H の $H(\overline{F})$ 共役類，および γ の $G(\overline{F})$ 共役類のみに依存する性質である．

半単純元 $\gamma_H \in H(F)$, $\gamma \in G(F)$ が対応するとは，$H(\overline{F})$ および $G(\overline{F})$ の元として対応することをいう．これは γ_H, γ の安定共役類のみに依存する性質であり，γ_H に対応する γ の安定共役類は高々一つである．

$\gamma_H \in H(F)$ に対応する $\gamma \in G(F)$ が存在するとき，γ_H は G に**移送可能**であるということにする．

補題 8.58 より，G が F 上準分裂的な場合，任意の半単純元 $\gamma_H \in H(F)$ は G に移送可能である．

例 8.60 (1) H を G の準分裂内部形式とすると，$(H, 1, \mathrm{id})$ は G のエンドスコピー 3 つ組である．内部捻り $\psi\colon H_{\overline{F}} \xrightarrow{\cong} G_{\overline{F}}$ をとる．このとき，半単純元 $\gamma_H \in H(F)$ と半単純元 $\gamma \in G(F)$ が対応することは $\psi(\gamma_H)$ と γ が $G(\overline{F})$ において共役であることと同値である．

(2) 例 8.55 における $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ の場合，半単純元 $\gamma_H = (\gamma_{H,1}, \gamma_{H,2}) \in H(F)$ と半単純元 $\gamma \in G(F)$ が対応することは $\gamma_{H,1}$ の固有多項式と $\gamma_{H,2}$ の固有多項式の積が γ の固有多項式に一致することと同値である．

(3) 例 8.56 における $G = \mathrm{GSp}_4$ の場合，半単純元 $\gamma_H = (\gamma_{H,1}, \gamma_{H,2}) \in H(F)$ と半単純元 $\gamma \in G(F)$ が対応することは，以下の 2 つが成り立つことと同値である：

- $\gamma_{H,1} \otimes \gamma_{H,2} \in \mathrm{GL}_4(F)$ の固有多項式は γ の固有多項式に一致する．
- $\mathrm{sim}(\gamma) = \det \gamma_{H,1} (= \det \gamma_{H,2})$.

安定共役類の対応を用いると，(γ_0, κ) に関する和をエンドスコピー群を用いた和で書き直すことができる．

定義 8.61 G を $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群とし，G_{der} が単連結であると仮定する．

(1) (H, s, η) を G のエンドスコピー 3 つ組とする．半単純元 $\gamma_H \in H(\mathbb{Q})$ が以下の条件を満たすとき，**(G, H) 正則**といわれる：

γ_H を含む $H_{\overline{\mathbb{Q}}}$ の極大トーラス T をとり，その双対トーラス $\widehat{T}$ を $\widehat{T} \subset \widehat{H} \overset{\eta}{\hookrightarrow} \widehat{G}$ によって $\widehat{G}$ の極大トーラスとみなす．$(\widehat{G}, \widehat{T})$, $(\widehat{H}, \widehat{T})$ のコルー

トの集合をそれぞれ $\Phi^\vee(\widehat{G},\widehat{T})$, $\Phi^\vee(\widehat{H},\widehat{T})$ と書く．$\alpha\in X^*(T)=X_*(\widehat{T})$ が $\Phi^\vee(\widehat{G},\widehat{T})\setminus\Phi^\vee(\widehat{H},\widehat{T})$ に属するならば $\alpha(\gamma_H)\neq 1$ である．

(2) エンドスコピー3つ組 (H,s,η)，および (G,H) 正則かつ G に移送可能な半単純元 $\gamma_H\in H(\mathbb{Q})$ からなる4つ組 (H,s,η,γ_H) 全体を考え，これに次のような同値関係を入れる：(H,s,η,γ_H), $(H',s',\eta',\gamma'_{H'})$ が同値であるとは，同型 $\alpha\colon(H,s,\eta)\xrightarrow{\cong}(H',s',\eta')$ が存在して $\alpha(\gamma_H),\gamma'_{H'}\in H'(\mathbb{Q})$ が安定共役であることとする．このような4つ組の同値類の集合を $\mathcal{EQ}(G)$ と書く．さらに，(H,s,η) が楕円的であるような4つ組のなす部分集合を $\mathcal{EQ}^{\mathrm{ell}}(G)$ と書く．

(3) 半単純元 $\gamma_0\in G(\mathbb{Q})$ と $\kappa\in\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ $(I_0=G_{\gamma_0})$ の組 (γ_0,κ) 全体を考え，これに次のような同値類を入れる：(γ_0,κ), (γ'_0,κ') が同値であるとは，$\gamma_0\overset{\mathrm{st}}{\sim}\gamma'_0$ かつ，自然な同型 $Z(\widehat{I_0})\cong Z(\widehat{I'_0})$ のもとで $\kappa=\kappa'$ となることとする（$I'_0=G_{\gamma'_0}$ とおいた．命題 8.10 (1) より，I'_0 は I_0 の内部形式であることに注意）．このような組の同値類の集合を $\mathcal{SS}(G)$ と書く．さらに，γ_0 が楕円的であるような組のなす部分集合を $\mathcal{SS}^{\mathrm{ell}}(G)$ と書く．

命題 8.62（[Shi10, Lemma 2.8]） (1) 自然な全単射 $\mathcal{EQ}(G)\xrightarrow{\cong}\mathcal{SS}(G)$ が存在する．さらに，これは全単射 $\mathcal{EQ}^{\mathrm{ell}}(G)\xrightarrow{\cong}\mathcal{SS}^{\mathrm{ell}}(G)$ を誘導する．

(2) $(H,s,\eta,\gamma_H)\in\mathcal{EQ}(G)$ とするとき，(H,s,η,γ_H) と (H,s,η,γ'_H) が同値であるような $\gamma'_H\in H(\mathbb{Q})$ の安定共役類の個数は $|\mathrm{Aut}(H,s,\eta)/H_{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})|$ に等しい．

証明 (1) の写像の構成のみ述べる．$(H,s,\eta,\gamma_H)\in\mathcal{EQ}(G)$ に対し，γ_H の G への移送を γ_0 とする．$I_{H,0}=H_{\gamma_H}$, $I_0=G_{\gamma_0}$ とおくと，γ_H が (G,H) 正則であることから，$I_{H,0}$ は I_0 の内部形式である（[Kot86, §3] 参照）．合成 $Z(\widehat{H})\hookrightarrow Z(\widehat{I}_{H,0})\cong Z(\widehat{I_0})$ による s の像 $\widetilde{\kappa}$ は $\bigcap_v Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}}Z(\widehat{G})$ に属することが分かる．その $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ における像を κ と定める．これが全単射を誘導することは，[Kot86, Lemma 9.7] を参照．

(2) については，[Kot86, Lemma 9.7], [Shi10, Lemma 2.8] およびその証明の後の記述を参照． □

■移送予想と基本補題 さて，我々の当面の目標は 419 ページの式 (†) を (γ_0,κ) に対応するエンドスコピー群 H の安定軌道積分で書き直すことであった．このために，移送因子と呼ばれるものを導入し，G の軌道積分と H の安定軌道積分を結び付ける定理を紹介する．

以下しばらく F を標数 0 の局所体とし，G を F 上の連結簡約代数群で G_{der} が

単連結であるものとする．(H, s, η) を G のエンドスコピー 3 つ組とし，η の延長 $\widetilde{\eta}\colon \widehat{H} \rtimes W_F \hookrightarrow \widehat{G} \rtimes W_F$ で W_F への射影を保つものを固定する（G_{der} が単連結であるという仮定から，このような $\widetilde{\eta}$ は常に存在することが分かる）．

移送因子とは，(G, H) 正則な半単純元 $\gamma_H \in H(F)$ および半単純元 $\gamma \in G(F)$ に対して複素数 $\Delta(\gamma_H, \gamma)$ を定める写像 $\Delta(-,-)$ であり，以下の性質を満たす．

- γ_H と γ が対応しない場合は $\Delta(\gamma_H, \gamma) = 0$.
- $\Delta(\gamma_H, \gamma)$ は γ_H の安定共役類，および γ の共役類のみに依存する．
- $\gamma, \gamma' \in G(F)$ が安定共役ならば $\Delta(\gamma_H, \gamma) = \langle \kappa_{G_\gamma}(\mathrm{inv}(\gamma, \gamma')), s\rangle \Delta(\gamma_H, \gamma')$ が成り立つ．

移送因子の定義は非常に複雑であり，ここでは述べることができない．[LS87] や [KS99] 等を参照．

一般には，移送因子は $\mathbb{C}^\times$ 倍の不定性を除いてしか決めることができない．G が F 上準分裂的な場合には，G の Whittaker データ（G の Borel 部分群とその冪単根基の非退化指標の組）を固定するごとに標準的な正規化が可能である（Whittaker 正規化）．G が F 上準分裂的とは限らない場合でも，G に純内部形式やリジッド内部形式等の付加構造を加えることで，移送因子を正規化することが可能である．より詳しい説明については，[三枝 4, §2.6] を参照．

移送因子は以下のような積公式を満たす．

命題 8.63（[LS87, §6.4]） $\mathbb{Q}$ 上の G および (H, s, η) を考え，${}^LG = \widehat{G} \rtimes \Gamma_{\mathbb{Q}}$, ${}^LH = \widehat{H} \rtimes \Gamma_{\mathbb{Q}}$ とおく．η の延長 $\widetilde{\eta}\colon {}^LH \hookrightarrow {}^LG$ を固定する．$\mathbb{Q}$ の各素点 v に対し，$G_{\mathbb{Q}_v}, H_{\mathbb{Q}_v}, \widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_v}$ に関する移送因子 $\Delta_v(-,-)$ の正規化を適切に選ぶことで，以下を満たすようにできる．

> (G, H) 正則な半単純元 $\gamma_H \in H(\mathbb{Q})$ および半単純元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ が対応するならば，ほとんど全ての素点 v において $\Delta_v(\gamma_H, \gamma) = 1$ であり，さらに $\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma) = 1$ が成り立つ．

移送因子を用いて G の軌道積分と H の安定軌道積分を結び付けよう．

定理 8.64（移送予想） $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対し，以下の条件を満たす $f^H \in \mathcal{H}(H(F))$

が存在する：任意の (G,H) 正則な半単純元 $\gamma_H\in H(F)$ に対し，

$$SO_{\gamma_H}(f^H)=\sum_{\gamma}e(G_\gamma)\Delta(\gamma_H,\gamma)O_\gamma(f).$$

ここで γ は $G(F)$ の半単純元の共役類を動く．また，軌道積分を定義する際の測度については，以下のように正規化する：$\Delta(\gamma_H,\gamma)\neq 0$ ならば γ_H と γ は対応するので，G_γ は H_{γ_H} の内部形式である．$G_\gamma(F)$ と $H_{\gamma_H}(F)$ の測度はこの内部形式の構造と両立するようにとる（[Kot86, §5.2] 参照）．

f^H を f の H への**移送**と呼ぶ．

F がアルキメデス的である場合には，定理 8.64 は Shelstad [She79] によって証明された．F が非アルキメデス的である場合の証明については後述する．

以下では F が非アルキメデス的であるとし，G および H が不分岐であり，$\widetilde{\eta}\colon \widehat{H}\rtimes W_F\hookrightarrow\widehat{G}\rtimes W_F$ が $\widehat{H}\rtimes(W_F/I_F)\hookrightarrow\widehat{G}\rtimes(W_F/I_F)$ から誘導されていると仮定する（このとき $\widetilde{\eta}$ は不分岐であるという）．$G(F)$ および $H(F)$ の超スペシャルコンパクト部分群 K, K_H を固定し，これらに関する不分岐表現および不分岐 Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F),K)$, $\mathcal{H}(H(F),K_H)$ を考える．$H(F)$ の不分岐表現 π_H の佐武パラメータを $\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi_H}\colon W_F/I_F\to\widehat{H}\rtimes(W_F/I_F)$ とおき（[Bor79, §7.1] 参照），$\widetilde{\eta}\circ\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi_H}$ を佐武パラメータに持つ $G(F)$ の不分岐表現を $\widetilde{\eta}_*\pi_H$ と書く．このとき，以下を満たすような $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\widetilde{\eta}^*\colon\mathcal{H}(G(F),K)\to\mathcal{H}(H(F),K_H)$ が一意的に存在する：

> $H(F)$ の任意の不分岐表現 π_H に対し，$(\widetilde{\eta}_*\pi_H)^K$ への $f\in\mathcal{H}(G(F),K)$ の作用（これはスカラー倍である）は $\pi_H^{K_H}$ への $\widetilde{\eta}^*f\in\mathcal{H}(H(F),K_H)$ の作用と一致する．

この準同型 $\widetilde{\eta}^*$ が移送を与えることを主張するのが基本補題である．

定理 8.65（基本補題） 移送因子 $\Delta(-,-)$ を超スペシャルコンパクト部分群 K を用いて正規化しておく（[Hal93, §7] 参照）．このとき，任意の $f\in\mathcal{H}(G(F),K)$ に対し，$\widetilde{\eta}^*f$ は f の移送となる．特に，$\mathrm{vol}(K_H)^{-1}\mathbf{1}_{K_H}$ は $\mathrm{vol}(K)^{-1}\mathbf{1}_K$ の移送である．

（F が非アルキメデス的である場合の）移送予想，および基本補題はともに長年未解決な予想であったが，現在では証明されている．まず定理 8.65 は，F の剰余標数が十分大きく，かつ $f=\mathrm{vol}(K)^{-1}\mathbf{1}_K$ である場合に帰着されることが Hales [Hal95] により示された．さらにこの主張は，剰余標数が十分大きい場合の基本補題の Lie 環

版に帰着できることが Waldspurger [Wal08] によって証明された．一方，定理 8.64 も，剰余標数が十分大きい場合の基本補題の Lie 環版から従うことが Waldspurger [Wal97] によって証明された．さらに Waldspurger [Wal06] によって，剰余標数が十分大きい場合の基本補題の Lie 環版は正標数局所体上の類似の結果に帰着されることが証明された．正標数局所体上の Lie 環の基本補題は，Ngô [Ngô10] によって（標数が十分大きい場合には）解決され，その結果，定理 8.64 と定理 8.65 の証明が完結した．

■安定化の開始　ここで記号を戻し，419 ページの式 (†) についての考察を再開しよう．式 (†) は $(\gamma_0,\kappa)\in\mathcal{SS}^{\mathrm{ell}}(G)$ についての項だったので，命題 8.62 で (γ_0,κ) に対応する $\mathcal{EQ}^{\mathrm{ell}}(G)$ の元を考え，その同値類に属する 4 つ組 (H,s,η,γ_H) を固定する．このとき，命題 8.62 の証明から，κ の $\bigcap_v Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}}Z(\widehat{G})$ への持ち上げ $\widetilde{\kappa}$ が定まる．また，$\alpha_p(\gamma_0;\gamma,\delta)\in X^*(Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}})$ の $Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}Z(\widehat{G})$ 上への延長 $\widetilde{\alpha}_p(\gamma_0;\gamma,\delta)$ を $\widetilde{\alpha}_p(\gamma_0;\gamma,\delta)|_{Z(\widehat{G})}=-\mu_h$ となるように定める（定義 8.42 を参照）．同様に，$\alpha_\infty(\gamma_0;\gamma,\delta)\in X^*(Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{R}}})$ の $Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}Z(\widehat{G})$ 上への延長 $\widetilde{\alpha}_\infty(\gamma_0;\gamma,\delta)$ を $\widetilde{\alpha}_\infty(\gamma_0;\gamma,\delta)|_{Z(\widehat{G})}=\mu_h$ となるように定める．すると，

$$
\begin{aligned}
&\langle\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta),\kappa\rangle\\
&\quad=\Bigl(\prod_{v\neq p,\infty}\bigl\langle\kappa_{I_0}(\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma_v)),\kappa\bigr\rangle\Bigr)\times\bigl\langle\widetilde{\alpha}_p(\gamma_0;\gamma,\delta),\widetilde{\kappa}\bigr\rangle\times\bigl\langle\widetilde{\alpha}_\infty(\gamma_0;\gamma,\delta),\widetilde{\kappa}\bigr\rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

η の（大域的な）延長 $\widetilde{\eta}\colon {}^LH\hookrightarrow{}^LG$ を固定し，これに関する移送因子 $\Delta_v(-,-)$（v は $\mathbb{Q}$ の素点）を命題 8.63 の積公式が成立するように正規化しておく．このとき $\prod_v\Delta_v(\gamma_H,\gamma_0)=1$ であるから，(†) は以下の局所項の積に分解することが分かる：

$$
\begin{aligned}
(\dagger_v)&=\sum_{\gamma_v}\bigl\langle\kappa_{I_0}(\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma_v)),\kappa\bigr\rangle^{-1}\Delta_v(\gamma_H,\gamma_0)e(G_{\gamma_v})O_{\gamma_v}(f_v)\quad(v\neq p,\infty),\\
(\dagger_p)&=\sum_{\delta}\bigl\langle\widetilde{\alpha}_p(\gamma_0;\gamma,\delta),\widetilde{\kappa}\bigr\rangle^{-1}\Delta_p(\gamma_H,\gamma_0)e(G_{\delta\sigma})\,TO_\delta(\phi_j),\\
(\dagger_\infty)&=\bigl\langle\widetilde{\alpha}_\infty(\gamma_0;\gamma,\delta),\widetilde{\kappa}\bigr\rangle^{-1}\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma_0)e(I_{\mathbb{R}})\operatorname{Tr}\xi(\gamma_0).
\end{aligned}
$$

まず，$(\dagger_v)$ について考えよう．移送因子の性質から，

$$(\dagger_v)=\sum_{\gamma_v}\Delta_v(\gamma_H,\gamma_v)e(G_{\gamma_v})O_{\gamma_v}(f_v)$$

となる．移送予想（定理 8.64）を用いて f_v の H への移送 f_v^H をとる．基本補題（定理 8.65）より，ほとんど全ての素点 v において f_v^H は不分岐 Hecke 環の単位元にとることができる．したがって $f^{p,H}=\bigotimes'_{v\neq p,\infty} f_v^H$ は意味を持つ．上の式と移送の定義から，

$$(\dagger_v)=SO_{\gamma_H}(f_v^H),\quad (\dagger^{\infty,p})=\prod_{v\neq p,\infty}(\dagger_v)=SO_{\gamma_H}(f^{p,H})$$

となり，∞, p の外での安定化が完成する．

■p での安定化　次に，$(\dagger_p)$ を $H(\mathbb{Q}_p)$ の安定軌道積分で表すことを考える．その際には，捻られた軌道積分に関する基本補題の類似（「捻られた基本補題」）を用いる．$R=\mathrm{Res}_{E_{\mathfrak{p}^j}/\mathbb{Q}_p} G_{E_{\mathfrak{p}^j}}$ とおく．$\sigma\in\mathrm{Gal}(E_{\mathfrak{p}^j}/\mathbb{Q}_p)$ を p 乗 Frobenius 写像の持ち上げとし，σ が定める R の自己同型を θ と書く．$d=j[E_{\mathfrak{p}}:\mathbb{Q}_p]$ とおくと，

$$\widehat{R}=\underbrace{\widehat{G}\times\cdots\times\widehat{G}}_{d\text{ 個}},\qquad \widehat{\theta}\colon \widehat{R}\to\widehat{R};\ (g_1,\ldots,g_d)\mapsto(g_2,\ldots,g_d,g_1)$$

となる．さらに，$\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ の $\widehat{R}$ への作用は $\mathrm{Gal}(E_{\mathfrak{p}^j}/\mathbb{Q}_p)$ を経由し，$\sigma\in\mathrm{Gal}(E_{\mathfrak{p}^j}/\mathbb{Q}_p)$ の作用は $(g_1,\ldots,g_d)\mapsto\widehat{\theta}(\sigma(g_1),\ldots,\sigma(g_d))$ で与えられる．$i\colon\widehat{G}\to\widehat{R}$ を $g\mapsto(g,\ldots,g)$ で定める．これを自然に延長した準同型 $\widehat{G}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}\to\widehat{R}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p};\ g\rtimes w\mapsto i(g)\rtimes w$ も i と書く．$\widetilde{\eta}$ の制限 $\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}\colon\widehat{H}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}\to\widehat{G}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ と合成することで，準同型 $i\circ\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}\colon\widehat{H}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}\to\widehat{R}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ が定まる．

G の楕円的エンドスコピー群 H を (R,θ) の「捻られたエンドスコピー群」([KS99, §2.1] 参照）とみなしたい．まず，以下の仮定のもとで話を進める：

(a) $s\in Z(\widehat{H})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$（一般には s は $Z(\widehat{H})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}Z(\widehat{G})$ の元であった）．
(b) $H_{\mathbb{Q}_p}$ および $\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}$ は不分岐である．

(b) の条件のもとで，上で考えていた準同型 $\widehat{H}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}\xrightarrow{\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}}\widehat{G}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}\xrightarrow{i}\widehat{R}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ は

$$\widehat{H}\rtimes(W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p})\to\widehat{G}\rtimes(W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p})\to\widehat{R}\rtimes(W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p})$$

から誘導される．これらも同じ記号で書くことにする．

$(s^{-1},1,\ldots,1)\in Z(\widehat{H})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}\times\cdots\times Z(\widehat{H})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$ の $\widehat{R}$ における像を t とおく．このとき，t の $\widehat{\theta}$ 中心化群 $\{x\in\widehat{R}\mid x^{-1}t\theta(x)=t\}$ の単位元を含む連結成分は $(i\circ\eta)(\widehat{H})$ に一致する．つまり，[KS99, (2.1.4b)] の条件が満たされている．しかし，このままでは [KS99, (2.1.4a)] の条件，すなわち

$$(i\circ\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p})(\widehat{H}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p})\text{ は }\mathrm{Int}(t)\circ{}^L\theta\text{ で固定される}$$

（ただし，$\mathrm{Int}(t)$ は t による共役を表し，${}^L\theta=\widehat{\theta}\rtimes\mathrm{id}\colon \widehat{R}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}\to\widehat{R}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ は $\widehat{\theta}$ の L 群への自然な延長を表す）という条件が満たされない．そこで，以下のように $i\circ\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}$ を修正する[*28]．

定義 8.66 準同型 $\widetilde{\eta}_t\colon \widehat{H}\rtimes(W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p})\to\widehat{R}\rtimes(W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p})$ を以下で定める：

- $\widetilde{\eta}_t|_{\widehat{H}}=i\circ\eta$.
- $\widetilde{\eta}_t(1\rtimes\sigma)=(t\rtimes 1)\cdot(i\circ\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p})(1\rtimes\sigma)$．ただし，$\sigma\in W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}$ は同型 $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}\xrightarrow{\cong}\Gamma_{\mathbb{F}_p}$ によって p 乗 Frobenius 元にうつる元を表す．

$\widetilde{\eta}_t$ が準同型であることは，$(i\circ\eta)(\widehat{H})$ の $\widehat{R}$ における中心化群が $Z(\widehat{H})\times\cdots\times Z(\widehat{H})$ であることから分かる．この $\widetilde{\eta}_t$ は [KS99, (2.1.4a), (2.1.4b)] をともに満たし，4 つ組 $(H,H\rtimes W_{\mathbb{Q}_p},t,\widetilde{\eta}_t)$ は，[KS99, §2.1] の意味で (R,θ) の捻られたエンドスコピーデータとなる．

426 ページと同様，佐武パラメータに $\widetilde{\eta}_t$ を合成することで，$H(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現 π に $R(\mathbb{Q}_p)=G(E_{\mathfrak{p}^j})$ の不分岐表現 $(\widetilde{\eta}_t)_*\pi$ を対応させることができる．これに対応して，$\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\widetilde{\eta}_t^*\colon \mathcal{H}(G(E_{\mathfrak{p}^j}),G(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}^j}}))\to\mathcal{H}(H(\mathbb{Q}_p),H(\mathbb{Z}_p))$ が自然に定まる．

注意 8.67 $G=H=\mathrm{GL}_2$ の場合には，$\widetilde{\eta}_t^*$ は定義 4.13 における b と一致する．

注意 8.68 π を $H(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現とするとき，π の佐武パラメータ $\phi_\pi^{\mathrm{ur}}\colon W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}\to\widehat{H}\rtimes(W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p})$ は $\phi_\pi^{\mathrm{ur}}(\sigma)\in\widehat{H}\rtimes\sigma$ の $\widehat{H}$ 共役類と同一視される（本稿の前半部では，これの逆元を佐武パラメータと呼んでいる）．一方，$R(\mathbb{Q}_p)=G(E_{\mathfrak{p}^j})$ の不分岐表現 π' の佐武パラメータとしては，$R(\mathbb{Q}_p)$ と見るか，$G(E_{\mathfrak{p}^j})$ と見るかによって，

- $\phi_{\pi'}^{\mathrm{ur}}\colon W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}\to\widehat{R}\rtimes(W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p})$
- $\phi_{\pi',E_{\mathfrak{p}^j}}^{\mathrm{ur}}\colon W_{E_{\mathfrak{p}^j}}/I_{E_{\mathfrak{p}^j}}\to\widehat{G}\rtimes(W_{E_{\mathfrak{p}^j}}/I_{E_{\mathfrak{p}^j}})$

の 2 通りが考えられる．これらの間には，$\phi_{\pi'}^{\mathrm{ur}}|_{W_{E_{\mathfrak{p}^j}}/I_{E_{\mathfrak{p}^j}}}=i\circ\phi_{\pi',E_{\mathfrak{p}^j}}^{\mathrm{ur}}$ という関係が

[*28] この修正が，注意 6.2 で述べたような現象，すなわち，志村多様体のコホモロジーに，保型表現から自然に定まる Galois 表現の一部のみが現れるという現象の根源となっている．

ある（$I_{E_{\mathfrak{p}^j}}=I_{\mathbb{Q}_p}$ なので $W_{E_{\mathfrak{p}^j}}/I_{E_{\mathfrak{p}^j}}\subset W_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p}$ である）．また，後者のパラメータ $\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi',E_{\mathfrak{p}^j}}$ は $\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi',E_{\mathfrak{p}^j}}(\sigma^d)\in\widehat{G}\rtimes\sigma^d$ の $\widehat{G}$ 共役類と同一視することができる．

$\pi'=(\widetilde{\eta}_t)_*\pi$ であるとき，

$$\begin{aligned}i(\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi',E_{\mathfrak{p}^j}}(\sigma^d))&=\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi'}(\sigma^d)=((t\rtimes 1)\cdot(i\circ\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}\circ\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi})(\sigma))^d\\&=i(\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}((s^{-1}\rtimes 1)\cdot\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi}(\sigma)^d))\end{aligned}$$

であるから，$\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi}(\sigma)$ と $\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi',E_{\mathfrak{p}^j}}(\sigma^d)$ の間には

$$\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi',E_{\mathfrak{p}^j}}(\sigma^d)=\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}((s^{-1}\rtimes 1)\cdot\phi^{\mathrm{ur}}_{\pi}(\sigma)^d)$$

という関係がある．

この設定において，基本補題（定理 8.65）の類似が成立する．

定理 8.69 $h^H_{p,j}=\widetilde{\eta}^*_t(\phi_j)$ に対し，次が成り立つ：

$$SO_{\gamma_H}(h^H_{p,j})=\sum_{\delta}\bigl\langle\widetilde{\alpha}_p(\gamma_0;\gamma,\delta),\widetilde{\kappa}\bigr\rangle^{-1}\Delta_p(\gamma_H,\gamma_0)e(G_{\delta\sigma})TO_{\delta}(\phi_j).$$

ここで，δ は $\gamma_0\overset{\mathrm{st}}{\sim}N\delta$ を満たす $G(E_{\mathfrak{p}^j})$ の σ 共役類を動く．

[Mor10, Corollary A.2.10] で証明されているように，$\langle\widetilde{\alpha}_p(\gamma_0;\gamma,\delta),\widetilde{\kappa}\rangle^{-1}\Delta_p(\gamma_H,\gamma_0)$ は捻られたエンドスコピーの設定での移送因子 $\Delta_p(\gamma_H,\delta)$ に一致する．したがって，この定理は [Wal08], [Ngô10], [LMW18], [LW17] において証明された「捻られた基本補題」の帰結である（正則元への帰着については [Mor10, Proposition A.3.14] も参照）．

以上においては，2 つの条件 (a), (b) を仮定していた．本稿ではこれらの条件が満たされる場合しか扱わないので，あまり気にする必要はないが，これらが満たされない場合にどのような修正を行うかについても一応述べておく．条件 (a) が満たされない場合には，$s'\in Z(\widehat{H})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$ および $z\in Z(\widehat{G})$ を用いて $s=s'z$ と書ける．この場合には，s' に対する $h^H_{p,j}$ を $\mu_h(z)^{-1}$ 倍することで，定理 8.69 と同様の式を満たす関数を構成することができる．条件 (b) に関して，$H_{\mathbb{Q}_p}$ が不分岐だが $\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}$ が不分岐でない場合には，不分岐な η の延長 $\widetilde{\eta}'\colon\widehat{H}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}\to\widehat{G}\rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ を一つとる．このとき，$\widetilde{\eta}_{\mathbb{Q}_p}$ と $\widetilde{\eta}'$ のずれは $H^1(W_{\mathbb{Q}_p},Z(\widehat{H}))$ の元によって測ることができる．局所類体論でこの元に対応する $H(\mathbb{Q}_p)$ の指標を χ と書き，$\widetilde{\eta}'$ に対する $h^H_{p,j}$ を χ 倍すればよい．$H_{\mathbb{Q}_p}$ が不分岐でない場合には $h^H_{p,j}=0$ とおく．

■無限素点での安定化 最後に，$(\dagger_\infty)$ の安定化を考察する．無限素点においては，局所 Langlands 対応および Euler-Poincaré 関数を用いて所望の安定軌道積分を持つテスト関数を構成する．$G(\mathbb{R})$ の L パラメータの $\widehat{G}$ 共役類全体の集合を $\Phi_\infty(G)$ と書くのであった（注意 5.10，注意 7.2 参照）．$G(\mathbb{R})$ の局所 Langlands 対応により，$\phi \in \Phi_\infty(G)$ に対して，$G(\mathbb{R})$ の既約許容表現の有限集合 Π_ϕ が定まる．Π_ϕ を ϕ に対応する L パケットと呼ぶ．$G(\mathbb{R})$ の有限次元既約表現 $\xi^\vee$ と同じ中心指標，無限小指標を持つ $G(\mathbb{R})$ の既約離散系列表現全体の集合 $\Pi_{\mathrm{disc},\xi^\vee}$ は L パケットをなすことが知られている．その L パラメータを $\phi\colon W_\mathbb{R} \to \widehat{G} \rtimes W_\mathbb{R}$ とおく．これは離散的な L パラメータとなる．すなわち，S_ϕ を $\operatorname{Im}\phi$ の $\widehat{G}$ における中心化群とすると，$S_\phi/Z(\widehat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}}$ は有限群である．

$$\Phi_H(\phi) = \bigl\{\phi_H \in \Phi_\infty(H) \bigm| \widetilde{\eta}_\mathbb{R} \circ \phi_H \sim \phi\bigr\}$$

とおく（$\sim$ は $\widehat{G}$ 共役であることを表す）．$G_\mathbb{R}$ の楕円的極大トーラス T が $H_\mathbb{R}$ の楕円的極大トーラス T_H の移送になっているならば，$\Phi_H(\phi) \neq \varnothing$ である．以下しばらくこの条件を仮定する．T を含む $G_\mathbb{C}$ の Borel 部分群 B，および許容同型 $j\colon T_H \xrightarrow{\cong} T$ を固定する．このとき，T_H を含む $H_\mathbb{C}$ の Borel 部分群 B_H であって，(B,T) に関する正ルートが j によって (B_H,T_H) に関する正ルートに対応するようなものが一意的に存在する．このことを $(j,B) \mapsto B_H$ と書く．$(G_\mathbb{C},T_\mathbb{C})$, $(H_\mathbb{C},T_{H,\mathbb{C}})$ の Weyl 群をそれぞれ Ω, Ω_H と書き，j によって $\Omega_H \subset \Omega$ とみなす．さらに，

$$\Omega_* = \{\omega \in \Omega \mid (j,\omega(B)) \mapsto B_H\}$$

とおく．Ω_* は $\Omega_H \backslash \Omega$ の完全代表系となる．

$\Phi_H(\phi)$ を Ω_* でパラメータ付けるために，以下の定義を行う：

定義 8.70 $\phi_H \in \Phi_H(\phi)$ とする．

(1) ϕ に対し，$\widehat{G}$ の Borel 対 $(\widehat{S},\widehat{B})$ を以下のように定める：
- $\widehat{S}$ は $\phi(\mathbb{C}^\times)$ の中心化群とする．
- $\phi|_{\mathbb{C}^\times}\colon \mathbb{C}^\times \to \widehat{S}$ を，$\Lambda, \Lambda' \in X_*(\widehat{S}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$, $\Lambda - \Lambda' \in X_*(\widehat{S})$ を用いて

$$z \mapsto z^\Lambda \overline{z}^{\Lambda'} := z^{\Lambda-\Lambda'}(z\overline{z})^{\Lambda'}$$

と書いたとき[*29]，Λ が $\widehat{B}$ に関して支配的になるように $\widehat{B}$ をとる．

[*29] このときの Λ は $\pi \in \Pi_\phi$ の無限小指標に一致する．

同様に，ϕ_H に対して $\widehat{H}$ の Borel 対 $(\widehat{S}_H, \widehat{B}_H)$ を定める．

(2) (j, B, B_H) が ϕ_H に関して**整列している** (aligned) とは，以下の図式が可換になることをいう：

$$\begin{tikzcd} \widehat{T} \arrow[r, "(B,\widehat{B})", "\cong"'] \arrow[d, "\widehat{j}"', "\cong"] & \widehat{S} \\ \widehat{T}_H \arrow[r, "(B_H,\widehat{B}_H)", "\cong"'] & \widehat{S}_H. \arrow[u, "\cong", "\widehat{\eta}"'] \end{tikzcd}$$

ただし，横向きの同型は，矢印の上に書いてある Borel 部分群の組から誘導されるものとする．

(3) 以下の性質を満たす $\omega_* \in \Omega_*$ が一意的に存在する：

$(\omega_*^{-1} \circ j, B, B_H)$ は ϕ_H に関して整列している．

この ω_* を $\omega_*(\phi_H)$ と書く．

(j, B) から，Shelstad の移送因子 $\Delta_{j,B}$ を定めることができる（[Kot90, p. 184] 参照）．しかし，この移送因子は以前固定した移送因子 Δ_∞ とは定数倍だけずれているかもしれない．$a_{j,B} \in \mathbb{C}^\times$ を $\Delta_\infty = a_{j,B}\Delta_{j,B}$ となるようにとる．

Euler-Poincaré 関数についても思い出しておこう（GL_2 の場合は命題 4.15 で既に扱った）．$G(\mathbb{R})$ の既約許容表現 π に対し，その中心指標の $A_G(\mathbb{R})^+$ への制限を ω_π と書く．

命題 8.71 以下の条件を満たすような $f_{\mathrm{EP},\xi} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}), \omega_\xi)$ が存在する：$G(\mathbb{R})$ の既約許容表現 π が $\omega_\pi = \omega_\xi^{-1}$ を満たすならば，

$$\operatorname{Tr}\pi(f_{\mathrm{EP},\xi}) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_\infty; \pi\otimes\xi).$$

$f_{\mathrm{EP},\xi}$ を ξ に伴う Euler-Poincaré 関数と呼ぶ．

$\Pi_{\mathrm{disc},\xi^\vee} \to \mathbb{C};\ \pi \mapsto \operatorname{Tr}\pi(f_{\mathrm{EP},\xi})$ は定数関数である．ϕ を L パケット $\Pi_{\mathrm{disc},\xi^\vee}$ に伴う L パラメータとして，$f_\phi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}), \omega_\xi)$ を，$f_{\mathrm{EP},\xi}$ の定数倍であって $\pi \in \Pi_\phi = \Pi_{\mathrm{disc},\xi^\vee}$ に対し $\operatorname{Tr}\pi(f_\phi) = |\Pi_\phi|^{-1}$ を満たすものとして定める．

この命題は [CD85] と全く同様の議論で証明できる．以上の準備のもと，テスト関数を定義することができる．

定義 8.72 $G_{\mathbb{R}}$ の楕円的な極大トーラス T が $H_{\mathbb{R}}$ の楕円的極大トーラスの移送になっているとき，$H(\mathbb{R})$ 上の関数 h_∞^H を

$$h_\infty^H = (-1)^{q(G_{\mathbb{R}})} a_{j,B} \langle \mu_h, s\rangle^{-1} \sum_{\phi_H \in \Phi_H(\phi)} \det\bigl(\omega_*(\phi_H)\bigr) f_{\phi_H}$$

と定める．ただし，$q(G_{\mathbb{R}})$ は $G(\mathbb{R})$ の対称空間の実次元の半分，すなわち，志村多様体 Sh_K の次元を表す．$\langle \mu_h, s\rangle$ の定義は以下の通りである．$h\colon \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ の共役をとって T を経由するようにしておき，$\mu_h\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \to T_{\mathbb{C}}$ を $X^*(\widehat{T})$ の元とみなす．$s \in Z(\widehat{H}) \subset \widehat{T}_H$ を $\widehat{j}$ によって $\widehat{T}$ の元とみなし，ペアリング $\langle \mu_h, s\rangle$ をとる（これは h の共役のとり方によらない）．また，$\det(\omega_*(\phi_H))$ は $\omega_*(\phi_H)$ の $X^*(T)$ への作用の行列式を表す．

命題 8.73 $\gamma_H \in H(\mathbb{R})$ を半単純元とする．

(1) γ_H が楕円的かつ (G, H) 正則ならば，その G への移送を $\gamma_0 \in G(\mathbb{R})$ とすると，以下が成り立つ：

$$SO_{\gamma_H}(h_\infty^H) = \langle \widetilde{\alpha}_\infty(\gamma_0; \gamma, \delta), \widetilde{\kappa}\rangle^{-1} \Delta_\infty(\gamma_H, \gamma_0) e(I_{\mathbb{R}}) \operatorname{Tr} \xi(\gamma_0).$$

定義 8.42 より，$\widetilde{\alpha}_\infty(\gamma_0; \gamma, \delta)$ は γ_0 のみに依存することに注意．

(2) γ_H が楕円的でない，または (G, H) 正則でないならば，$SO_{\gamma_H}(h_\infty^H) = 0$ である．

この命題は，[Art89a, Theorem 5.1] と移送因子の具体的な記述を組み合わせることで容易に証明できる．[Kot90, §7] および [Mor10, Proposition 3.3.4, Remark 3.3.5] を参照．

T が $H_{\mathbb{R}}$ の楕円的極大トーラスの移送になっていない場合には $h_\infty^H = 0$ とおく．このときにも命題 8.73 は明らかに成り立つ．

以上をまとめて次の定理を得る．

定理 8.74 $(H, s, \eta) \in \mathcal{E}^{\mathrm{ell}}(G)$ に対し $h^H = f^{p,H} \otimes h_{p,j}^H \otimes h_\infty^H$ とおき，

$$ST_{\mathrm{ell}}^H(h^H) = \tau(H) \sum_{\gamma_H} SO_{\gamma_H}(h^H)$$

と定める．ここで，γ_H は $H(\mathbb{Q})$ の楕円半単純元の安定共役類を動く．また，

$$\iota(G, H) = \tau(G)\tau(H)^{-1} \bigl|\mathrm{Aut}(H, s, \eta)/H_{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})\bigr|^{-1}$$

とおく．このとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Lef}(j,f^p,\xi)=|\ker^1(\mathbb{Q},G)|\sum_{(H,s,\eta)\in\mathcal{E}^{\mathrm{ell}}(G)}\iota(G,H)ST^H_{\mathrm{ell}}(h^H).$$

注意 8.75 [Kot90, p. 189] の $ST^*_e(h)$ の式には $|(H_{\gamma_H}/H^0_{\gamma_H})(\mathbb{Q})|^{-1}SO_{\gamma_H}(h)$ という項が出てくるが，ここでは G_{der} が単連結であると仮定しているので，[Kot86, Lemma 3.2] および命題 8.73 (2) より $|(H_{\gamma_H}/H^0_{\gamma_H})(\mathbb{Q})|=1$ または $SO_{\gamma_H}(h^H)=0$ となり，いずれにしても $|(H_{\gamma_H}/H^0_{\gamma_H})(\mathbb{Q})|^{-1}SO_{\gamma_H}(h^H)=SO_{\gamma_H}(h^H)$ が成り立つ．

9 安定跡公式

定理 8.74 と単純跡公式（定理 2.3）を組み合わせることで，志村多様体のコホモロジーと保型表現を関連付けたい．このためには，8.3 節で行ったのと同様，単純跡公式の軌道積分側をエンドスコピー群の安定軌道積分で書き直す必要がある．これは 8.3 節の議論とほぼ同様の手法で行うことができる*30．本節でも G_{der} は単連結であると仮定する．

定理 9.1（単純跡公式の安定化） ϕ を $G(\mathbb{R})$ の離散的な L パラメータとし，$f_\phi\in\mathcal{H}(G(\mathbb{R}),\omega^{-1})$ を命題 8.71 の通りに定める．ただし，ω は $\pi\in\Pi_\phi$ の中心指標の $A_G(\mathbb{R})^+$ への制限である．また，w を $\mathbb{Q}$ の有限素点とし，$f_w\in\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_w))$ が以下の条件を満たすとする：

- $G(\mathbb{Q}_w)$ の既約許容表現 π が超尖点表現でないならば $\mathrm{Tr}\,\pi(f_w)=0$ である．

$f^{\infty,w}\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}^w_f))$ に対し $f=f^{\infty,w}\otimes f_\phi\otimes f_w$ とおくと，次が成り立つ：

$$\sum_{\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)}m(\pi)\,\mathrm{Tr}\,\pi(f)=\sum_{(H,s,\eta)\in\mathcal{E}^{\mathrm{ell}}(G)}\iota(G,H)ST^H_{\mathrm{ell}}(f^H).$$

定理 9.1 の証明の鍵となるのは，以下の命題である．

命題 9.2 $\gamma_0\in G(\mathbb{Q})$ を楕円半単純元とし，$I_0=G_{\gamma_0}$ とおく．$\gamma\in G(\mathbb{A})$ を γ_0 と安定共役な元とし，$(\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma_v))_v\in\bigoplus_v\mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}_v,I_0)\to H^1(\mathbb{Q}_v,G))$ の

*30 むしろ，8.3 節の議論（[Kot90] による）が跡公式の安定化（[Kot86] による）をもとにしているというのが本来の順序である．

$\bigoplus_v \kappa_{I_{0,\mathbb{Q}_v}}\colon \bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, I_0) \to \bigoplus_v \pi_0(Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})^D$ による像が誘導する $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) = \bigcap_v (Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}} Z(\widehat{G}))/Z(\widehat{G})$ の指標を $\mathrm{obs}(\gamma)$ とおく．このとき，$\mathrm{obs}(\gamma) = 1$ であることは，γ が $G(\mathbb{Q})$ の元と $G(\mathbb{A})$ 共役であることと同値である．

証明　簡単のため，$G = \mathrm{GSp}_{2n}$ の場合に考える．このとき $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) = \pi_0(Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})$ であり，$\mathrm{obs}(\gamma)$ は $(\mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma_v))_v$ の

$$\bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, I_0) \xrightarrow{\bigoplus_v \kappa_{I_{0,\mathbb{Q}_v}}} \bigoplus_v \pi_0(Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}_v}})^D \to \pi_0(Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_{\mathbb{Q}}})^D$$

による像に他ならない．命題 8.39 より，上の合成写像の核は $H^1(\mathbb{Q}, I_0) \to \bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, I_0)$ の像に一致するから，命題 8.5 よりこの場合の命題 9.2 が従う．一般の場合はもう少し工夫が必要である．[Kot86, Theorem 6.6] を参照．□

注意 9.3　(1) $\mathrm{obs}(\gamma)$ は γ_0 の安定共役類のみに依存する．すなわち，$\gamma_0' \in G(\mathbb{Q})$ が γ_0 と安定共役であるとし，$I_0' = G_{\gamma_0'}$ とおき，γ_0' に対する $\mathrm{obs}(\gamma)$ を $\mathrm{obs}'(\gamma)$ とおくと，同型 $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{K}(I_0'/\mathbb{Q})$ が自然に定まり，$\mathrm{obs}(\gamma)$ は $\mathrm{obs}'(\gamma)$ にうつる．

(2) $\{\gamma \in G(\mathbb{Q}) \mid \gamma \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma_0\}/{\sim} \to \{\gamma \in G(\mathbb{A}) \mid \gamma \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma_0, \mathrm{obs}(\gamma) = 1\}/{\sim}$ は全射であり，各ファイバーの元の個数は $|\mathrm{Ker}(\ker^1(\mathbb{Q}, I_0) \to \ker^1(\mathbb{Q}, G))|$ である．

定理 9.1 の証明の概略　定理 2.3 より

$$\sum_{\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G,\omega)} m(\pi) \operatorname{Tr} \pi(f) = \sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{Q})/\sim \\ \gamma\ \text{は楕円的半単純}}} \tau(G_\gamma) O_\gamma(f)$$

である．命題 9.2，注意 9.3 および玉河数が内部形式で不変であること ([Kot88]) を用いると，右辺を以下のように変形することができる：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{Q})/\sim \\ \gamma\ \text{は楕円的半単純}}} \tau(G_\gamma) O_\gamma(f) \\
&= \sum_{\substack{\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})/\overset{\mathrm{st}}{\sim} \\ \gamma_0\ \text{は楕円的半単純}}} \tau(I_0) \bigl|\mathrm{Ker}(\ker^1(\mathbb{Q}, I_0) \to \ker^1(\mathbb{Q}, G))\bigr| \sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{A})/\sim \\ \gamma \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma_0 \\ \mathrm{obs}(\gamma)=1}} \Bigl(\prod_v e(G_{\gamma_v})\Bigr) O_\gamma(f) \\
&\overset{(*)}{=} \tau(G) \sum_{\substack{\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})/\overset{\mathrm{st}}{\sim} \\ \gamma_0\ \text{は楕円的半単純}}} \sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{A})/\sim \\ \gamma \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma_0}} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})} \langle \mathrm{obs}(\gamma), \kappa \rangle^{-1} \Bigl(\prod_v e(G_{\gamma_v})\Bigr) O_\gamma(f)
\end{aligned}$$

$$= \tau(G) \sum_{(\gamma_0,\kappa)\in\mathcal{SS}^{\mathrm{ell}}(G)} \sum_{\substack{\gamma\in G(\mathbb{A})/\sim \\ \gamma \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma_0}} \langle \mathrm{obs}(\gamma),\kappa\rangle^{-1}\Bigl(\prod_v e(G_{\gamma_v})\Bigr)O_\gamma(f).$$

ただし $(*)$ では，補題 8.53 で得られた等式

$$\tau(I_0)\bigl|\mathrm{Ker}(\ker^1(\mathbb{Q},I_0)\to\ker^1(\mathbb{Q},G))\bigr| = \tau(G)|\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})|$$

を用いた．あとは $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ の代わりに $\mathrm{obs}(\gamma)$ を用いて 8.3 節と同様の議論を行えばよい（$\mathrm{obs}(\gamma)$ の構成は，$v\neq p,\infty$ に対する $\alpha_v(\gamma_0;\gamma,\delta)$ の構成と全く同じであることに注意）． □

10 定理 6.1 (1), (2) の証明

本節では，定理 8.74 および定理 9.1 を用いて定理 6.1 (1), (2) を証明する．以下では (H,s,η) を例 8.56 の通りとする．これは GSp_4 の唯一の非自明な楕円的エンドスコピー 3 つ組である．また，$\phi\colon W_{\mathbb{R}}\to\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ を $r\circ\phi=\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}}\theta_{3,0}\oplus\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}}\theta_{1,0}$ を満たす L パラメータとする．ϕ は離散的な L パラメータであり，$\Pi_\phi=\Pi_{\mathrm{disc},\mathbf{1}}=\{\pi^{\mathrm{gen}},\pi^{\mathrm{hol}}\}$ であった．

まず，定理 8.74 に現れる関数 $h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4}$, $h_{p,j}^H$, $h_\infty^{\mathrm{GSp}_4}$, h_∞^H および定理 9.1 に現れる関数 $(f_\phi)^H$ を特定しよう．

命題 10.1 (1) π を $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現とし，π の佐武パラメータと双対群の埋め込み $r\colon\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ を合成することによって定まる $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現を $r_*\pi$ と書く（426 ページを参照）．このとき，

$$\mathrm{Tr}\,\pi(h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4}) = p^{3j/2}\bigl(z_1(r_*\pi)^{-j}+z_2(r_*\pi)^{-j}+z_3(r_*\pi)^{-j}+z_4(r_*\pi)^{-j}\bigr)$$

である．

(2) π_1,π_2 を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現とし，π_1,π_2 の中心指標が一致しているとする．このとき，$\pi_1\boxtimes\pi_2$ は $H(\mathbb{Q}_p)$ の不分岐表現とみなせる．これに対し，

$$\mathrm{Tr}(\pi_1\boxtimes\pi_2)(h_{p,j}^H) = p^{3j/2}\bigl(z_1(\pi_1)^{-j}+z_2(\pi_1)^{-j}-z_1(\pi_2)^{-j}-z_2(\pi_2)^{-j}\bigr)$$

が成り立つ．

証明　まず，π' を $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_{p^j})$ の不分岐表現とし，その佐武パラメータを $\mathrm{diag}(z_1(\pi'), z_2(\pi'), z_3(\pi'), z_4(\pi')) \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ とおくとき，

$$\mathrm{Tr}\,\pi'(\phi_j) = (p^j)^{3/2}\bigl(z_1(\pi')^{-1} + z_2(\pi')^{-1} + z_3(\pi')^{-1} + z_4(\pi')^{-1}\bigr)$$

が成り立つことに注意する．これは [Kot84a, Theorem 2.1.3] で示されている ([Kot84a] における f_μ は，本稿の ϕ_j の定義において $\mu_{\mathfrak{p}}(p^{-1})$ を $\mu_{\mathfrak{p}}(p)$ に変えたものに一致している)．これを用いて主張を示す．

(1) を示す．π の佐武パラメータを $\mathrm{diag}(z_1(\pi), z_2(\pi), z_3(\pi), z_4(\pi)) \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ とおくと，$z_1(r_*\pi)$, $z_2(r_*\pi)$, $z_3(r_*\pi)$, $z_4(r_*\pi)$ は $z_1(\pi)$, $z_2(\pi)$, $z_3(\pi)$, $z_4(\pi)$ の並べ換えに一致する．注意 8.68 を用いると，$(\widetilde{\eta}_t)_*\pi$ の佐武パラメータは $\mathrm{diag}(z_1(\pi)^j, z_2(\pi)^j, z_3(\pi)^j, z_4(\pi)^j)$ であることが分かる．よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\pi(h^{\mathrm{GSp}_4}_{p,j}) &= \mathrm{Tr}\,\pi(\widetilde{\eta}_t^*\phi_j) = \mathrm{Tr}((\widetilde{\eta}_t)_*\pi)(\phi_j)\\ &= p^{3j/2}\bigl(z_1(\pi)^{-j} + z_2(\pi)^{-j} + z_3(\pi)^{-j} + z_4(\pi)^{-j}\bigr)\\ &= p^{3j/2}\bigl(z_1(r_*\pi)^{-j} + z_2(r_*\pi)^{-j} + z_3(r_*\pi)^{-j} + z_4(r_*\pi)^{-j}\bigr)\end{aligned}$$

を得る．

次に (2) を示す．$\pi_1 \boxtimes \pi_2$ の佐武パラメータは

$$z(\pi_1 \boxtimes \pi_2) = (\mathrm{diag}(z_1(\pi_1), z_2(\pi_1)), \mathrm{diag}(z_1(\pi_2), z_2(\pi_2))) \in \widehat{H}$$

である．注意 8.68 を用いると，$(\widetilde{\eta}_t)_*(\pi_1 \boxtimes \pi_2)$ の佐武パラメータは

$$\eta(s \cdot z(\pi_1 \boxtimes \pi_2)^j) = \mathrm{diag}(z_1(\pi_1)^j, -z_1(\pi_2)^j, -z_2(\pi_2)^j, z_2(\pi_1)^j)$$

であることが分かる．したがって，(1) と同様の計算により，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\pi_1 \boxtimes \pi_2)(h^H_{p,j}) &= \mathrm{Tr}(\pi_1 \boxtimes \pi_2)(\widetilde{\eta}_t^*\phi_j) = \mathrm{Tr}((\widetilde{\eta}_t)_*(\pi_1 \boxtimes \pi_2))(\phi_j)\\ &= p^{3j/2}\bigl(z_1(\pi_1)^{-j} + z_2(\pi_1)^{-j} - z_1(\pi_2)^{-j} - z_2(\pi_2)^{-j}\bigr)\end{aligned}$$

が得られる． □

命題 10.2　$H(\mathbb{R})$ において $\{D_{3,0} \boxtimes D_{1,0}\}$, $\{D_{1,0} \boxtimes D_{3,0}\}$ はともに離散系列表現からなる L パケットである．それぞれに命題 8.71 を適用して得られる関数を $f_{D_{3,0}\boxtimes D_{1,0}}$, $f_{D_{1,0}\boxtimes D_{3,0}}$ と書く．このとき，以下が成り立つ：

(1) $h^{\mathrm{GSp}_4}_\infty = -f_\phi$.

(2) $h_\infty^H = f_{D_{3,0}\boxtimes D_{1,0}} - f_{D_{1,0}\boxtimes D_{3,0}}$.

(3) $(f_\phi)^H = 0$.

証明 (1) は定義から明らかである．(2) は定数倍を除けば定義から容易に従うが，定数を決める際には注意が必要である．この計算は [Wei09, Lemma 8.4] で行われている[*31]．(3) は [Shi11, Lemma 3.7 (ii)] から導かれる． □

補題 10.3 $\tau(\mathrm{GSp}_4, H) = \dfrac{1}{4}$.

証明 $\widehat{H} = \{(g,g') \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \det g = \det g'\}$ であるから，$Z(\widehat{H}) = \{(z,z') \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \mid z^2 = z'^2\} \cong \mathbb{C}^\times \times \{\pm 1\}$ である．また，$\Gamma_\mathbb{Q}$ の $Z(\widehat{H})$ への作用は自明である．これより $\pi_0(Z(\widehat{H})^{\Gamma_\mathbb{Q}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\ker^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{H})) = 1$ となり，$\tau(H) = 2$ を得る．また，定義より容易に $|\mathrm{Aut}(H,s,\eta)/H_{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})| = 2$ が分かる．$\tau(\mathrm{GSp}_4) = 1$ なので，$\tau(\mathrm{GSp}_4, H) = \dfrac{1}{2\times 2} = \dfrac{1}{4}$ が成り立つ． □

これらのことから，以下が分かる：

定理 10.4 $K^p \subset \mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f^p)$ をコンパクト開部分群とし，$f^p \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f^p), K^p)$ とする．

(1) 以下が成り立つ：

$$\mathrm{Lef}(j, f^p, \xi) = -ST_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{GSp}_4}(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi) + \frac{1}{4} ST_{\mathrm{ell}}^H(f^{p,H} \otimes h_{p,j}^H \otimes h_\infty^H).$$

(2) p と異なる有限素点 w に対し $f^p = f^{p,w} \otimes f_w$ と分解しており，f_w が以下の性質を満たすとする：

$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_w)$ の既約許容表現 π が超尖点表現でないならば $\mathrm{Tr}\,\pi(f_w) = 0$ である．

このとき，以下が成り立つ：

$$\sum_{\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})} m(\pi) \,\mathrm{Tr}\,\pi(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi) = ST_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{GSp}_4}(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi).$$

(3) (2) の f_w がさらに以下の条件を満たすとする：

[*31] [Wei09] では GSp_4 の実現の仕方が本稿と異なる．[Wei09] で選んでいる Borel 部分群が上三角になるように合わせるためには，1 行目と 2 行目，1 列目と 2 列目を入れ換えればよい．この修正によって，[Wei09] における埋め込み $\widehat{H} \hookrightarrow \mathrm{GSp}_4$ は，成分の入れ換え $\widehat{H} \to \widehat{H}$; $(g,g') \mapsto (g',g)$ と本稿の埋め込みを合成したものになる．

$H(\mathbb{Q}_w)$ の既約許容表現 π_H が超尖点表現でないならば $\operatorname{Tr}\pi_H(f_w^H)=0$ である．

このとき，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}\sum_{\pi_H\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(H,\mathbf{1})} & m(\pi_H)\operatorname{Tr}\pi_H(f^{p,H}\otimes h_{p,j}^H\otimes(f_{D_{3,0}\boxtimes D_{1,0}}-f_{D_{1,0}\boxtimes D_{3,0}})) \\ &= ST_{\mathrm{ell}}^H(f^{p,H}\otimes h_{p,j}^H\otimes h_\infty^H).\end{aligned}$$

証明　(1) は定理 8.74，命題 10.2 (1)，補題 10.3 から従う．(2) は定理 9.1 および命題 10.2 (3) より得られる．(3) は命題 10.2 (2) および H に対する定理 9.1 より分かる（H は非自明な楕円的エンドスコピー群を持たないことに注意．H_{der} は単連結でないので，単純跡公式（定理 2.3）において，中心化群が連結でないような $\gamma_H\in H(\mathbb{Q})$ の寄与が定数倍ずれるが，[Kot86, Lemma 3.2] と命題 8.73 (2) より，そのような項は 0 になるので問題は起こらない)． □

■定理 6.1 (1) の証明　$\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4)$ の中心指標が自明であるとし，$\pi\in\mathcal{A}_\psi(\mathrm{PGSp}_4)$ となる $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{PGSp}_4)$ をとる．定理 6.1 (1) の通り，合成 $r\circ\psi\colon L_{\mathbb{Q}}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\xrightarrow{\psi}\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})\overset{r}{\hookrightarrow}\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ は $\phi_\tau\boxtimes\nu[1]$ という形であると仮定する．ただし，τ は中心指標が自明な $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現であって $L(s,\tau,\wedge)$ が $s=1$ で極を持つものである．さらに以下を仮定する：

仮定 10.5　ある有限素点 w において，局所 L パケット Π_{ψ_w} は超尖点表現のみからなる．

この仮定のもとで定理 6.1 (1) を証明しよう．$p\neq\ell$ を $\mathbb{Q}$ の有限素点であって π_p が不分岐であるものとする．$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 $K=\prod_{v\neq\infty}K_v$ を，以下の条件を満たすようにとる：

- $\pi_f^K\neq 0$.
- $K_p=\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_p)$.
- ある整数 $N\geq 3$ に対し $K\subset\operatorname{Ker}(\mathrm{GSp}_4(\widehat{\mathbb{Z}})\to\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ となる．

このとき，Sh_K の $\mathbb{Z}_p$ 上の整正準モデル $\mathrm{Sh}_{K,\mathbb{Z}_p}$ を考えることができる（[清水] 参照）．

必要なら K_w を縮めて，以下のような $f_w\in\mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_w),K_w)$ をとる：

- $\operatorname{Tr}\pi_w(f_w)=1$.

- $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_w)$ の既約許容表現 π' が $\pi_w \otimes (\chi \circ \mathrm{sim})$（$\chi\colon \mathbb{Q}_w^\times \to \mathbb{C}^\times$ は不分岐指標）という形の超尖点表現でないならば，$\mathrm{Tr}\,\pi'(f_w) = 0$.
- $H(\mathbb{Q}_w)$ の既約許容表現 π_H が超尖点表現でないならば $\mathrm{Tr}\,\pi_H(f_w^H) = 0$.

π_w が超尖点表現であるという仮定のもとで，π_w の行列係数を適切に修正することで，一つ目と二つ目の条件を満たすような f_w をとることができる．さらに仮定 10.5 を用いると，f_w が三つ目の条件を満たすことが示せる．

注意 10.6 $\chi\colon \mathbb{Q}_w^\times \to \mathbb{C}^\times$ を指標とするとき，π_w が生成的であることと $\pi_w \otimes (\chi \circ \mathrm{sim})$ が生成的であることは同値である．L パケット Π_{ψ_w} はちょうど一つの生成的表現を含むことが知られているので，特に $\pi_w \otimes (\chi \circ \mathrm{sim}) \not\cong \pi_w$ ならば $\pi_w \otimes (\chi \circ \mathrm{sim}) \notin \Pi_{\psi_w}$ である．このことから，$\pi' \in \Pi_{\psi_w} \setminus \{\pi_w\}$ に対し $\mathrm{Tr}\,\pi'(f_w) = 0$ であることが分かる．

∞, p, w の外のテスト関数 $f^{p,w} \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f^{p,w}), K^{p,w})$ は以下の補題のようにとる．

補題 10.7 以下の条件を満たす $f^{p,w} \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f^{p,w}), K^{p,w})$ が存在する：$f^p = f^{p,w} \otimes f_w$ とおくと，

- $\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})$ に対し，π'_p が不分岐であり，π'_∞ が $\mathbf{1}$ と同じ無限小指標を持つならば，
$$\mathrm{Tr}\,\pi_f'^p(f^p) = \begin{cases} 1 & \pi'_f \cong \pi_f, \\ 0 & \pi'_f \not\cong \pi_f. \end{cases}$$
- $\pi_H \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(H, \mathbf{1})$ に対し，$\pi_{H,v}$ が不分岐であり，$\pi_{H,\infty}$ が $D_{3,0} \boxtimes D_{1,0}$ または $D_{1,0} \boxtimes D_{3,0}$ と同じ無限小指標を持つならば，
$$\mathrm{Tr}\,\pi_{H,f}^p(f^{p,H}) = 0.$$

証明 Harish-Chandra の有限性定理より，$\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})$ であって，$\pi'^K \neq 0$ を満たし，かつ π'_∞ が $\mathbf{1}$ と同じ無限小指標を持つようなものは有限個である．このような π' のうち，$\mathrm{Tr}\,\pi'_w(f_w) \neq 0$ となるものの集合を $\mathcal{R}$ とおく．

まず，$\pi' \in \mathcal{R}$ に対し，$\pi_f \not\cong \pi'_f$ ならば $\pi_f^{p,w} \not\cong \pi_f'^{p,w}$ であることを示す．実際，$\pi_f^{p,w} \cong \pi_f'^{p,w}$ と仮定すると，まず π' の中心指標が π の中心指標と一致することが分かる．よって $\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{PGSp}_4)$ とみなせる．次に定理 5.13 より，$\pi'_p \in \Pi_{\psi_p}$, $\pi'_w \in \Pi_{\psi_w}$ が分かる．定理 5.11 (3) より Π_{ψ_p} に属する不分岐表現は一意的であり，

π_p, π'_p はともに不分岐表現であるから，$\pi_p \cong \pi'_p$ が分かる．また，$\operatorname{Tr}\pi'_w(f_w) \neq 0$ と注意 10.6 より，$\pi_w \cong \pi'_w$ が分かる．以上より $\pi_f \cong \pi'_f$ となるので，上の主張の対偶が示された．

したがって，指標の線型独立性より，$f^{p,w} \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}(\mathbb{A}_f^{p,w}), K^{p,w})$ であって，$\pi' \in \mathcal{R}$ に対し

$$\operatorname{Tr}\pi_f'^{p,w}(f^{p,w}) = \begin{cases} 1 & \pi'_f \cong \pi_f \\ 0 & \pi'_f \not\cong \pi_f \end{cases}$$

を満たすものが存在する．この $f^{p,w}$ は一つ目の条件を満たす．

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ の有限集合 S を p, w, ∞ および $\{v \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \setminus \{\infty\} \mid K_v \neq \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_v)\}$ を含むように十分大きくとり，

$$f^{p,w} = f_S^{p,w} \otimes \mathrm{vol}(\mathrm{GSp}_4(\widehat{\mathbb{Z}}^S))^{-1}\mathbf{1}_{\mathrm{GSp}_4(\widehat{\mathbb{Z}}^S)}$$

と分解している状況を考える．$f_S^{p,w}$ の H への移送 $f_S^{p,w,H}$ をとり，

$$f^{p,H} = f_S^{p,w,H} \otimes f_w^H \otimes \mathrm{vol}(H(\widehat{\mathbb{Z}}^S))^{-1}\mathbf{1}_{H(\widehat{\mathbb{Z}}^S)}$$

とおく．このとき，$\pi_H \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(H, \mathbf{1})$ であって

- $\operatorname{Tr}\pi_{H,f}^p(f^{p,H}) \neq 0$
- $\pi_{H,p}$ は不分岐
- $\pi_{H,\infty}$ は $D_{3,0} \boxtimes D_{1,0}$ または $D_{1,0} \boxtimes D_{3,0}$ と同じ無限小指標を持つ

という 3 条件を満たすものの集合 $\mathcal{R}_H$ は有限集合である．$\pi_H = \pi_{H,1} \boxtimes \pi_{H,2} \in \mathcal{R}_H$ に対し，π_H^S は $H(\mathbb{A}^S)$ の不分岐表現である．双対群の埋め込み $\widehat{H} \overset{\eta}{\hookrightarrow} \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) \overset{r}{\hookrightarrow} \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ から，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}^S)$ の不分岐表現 $\eta_*\pi_H^S$ および $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}^S)$ の不分岐表現 $r_*\eta_*\pi_H^S$ が誘導される．定義から $r_*\eta_*\pi_H^S \cong (\pi_{H,1} \boxplus \pi_{H,2})^S$ である (Langlands 和 $\pi_{H,1} \boxplus \pi_{H,2}$ については [Clo90, §1.1] および [三枝 2, 定義 1.45] を参照)．一方，π^S は $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}^S)$ の不分岐表現であり，$r_*\pi^S = \tau^S$ が成り立つ．τ は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現だったので，[JS81] より，$\tau^S \not\cong (\pi_{H,1} \boxplus \pi_{H,2})^S$ すなわち $r_*\eta_*\pi_H^S \not\cong r_*\pi^S$ が成り立つ．特に $\eta_*\pi_H^S \not\cong \pi^S$ である．したがって，指標の線型独立性より，$f^S \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}^S), \mathrm{GSp}_4(\widehat{\mathbb{Z}}^S))$ であって

- $\operatorname{Tr}\pi^S(f^S) = 1$
- $\operatorname{Tr}\pi_H^S(f^{S,H}) = \operatorname{Tr}(\eta_*\pi_H^S)(f^S) = 0$ $(\pi_H \in \mathcal{R}_H)$

を満たすものが存在する．$f_S^{p,w} \otimes f^S \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f^{p,w}), K^{p,w})$ が一つ目と二つ目の条件を同時に満たすことを示そう．二つ目の条件については定義から明らかである．一つ目の条件を確認する．$\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})$ に対し，π'_p が不分岐であり，π'_∞ が $\mathbf{1}$ と同じ無限小指標を持つとする．もし $\mathrm{Tr}\,\pi'^p_f(f_S^{p,w} \otimes f^S \otimes f_w) \neq 0$ ならば，

$$\mathrm{Tr}\,\pi'^p_f(f_S^{p,w} \otimes f^S \otimes f_w) = \mathrm{Tr}\,\pi'^p_{f,S}(f_S^{p,w} \otimes f_w)\,\mathrm{Tr}\,\pi'^S(f^S)$$

（$\pi'^p_{f,S} = \bigotimes_{v \in S \setminus \{\infty, p\}} \pi'_v$ とおいた）より特に $\mathrm{Tr}\,\pi'^S(f^S) \neq 0$ であるから，π'^S は不分岐である．よって $\mathrm{Tr}\,\pi'^p_f(f^p) = \mathrm{Tr}\,\pi'^p_{f,S}(f_S^{p,w} \otimes f_w) \neq 0$ も成り立つ．これと $f^{p,w}$ が一つ目の条件を満たすことから $\pi'_f \cong \pi_f$ が分かり，さらにそのとき

$$\mathrm{Tr}\,\pi'^p_f(f_S^{p,w} \otimes f^S \otimes f_w) = \mathrm{Tr}\,\pi^p_{f,S}(f_S^{p,w} \otimes f_w)\,\mathrm{Tr}\,\pi^S(f^S) = \mathrm{Tr}\,\pi^p_f(f^p)\,\mathrm{Tr}\,\pi^S(f^S) = 1$$

となる．これで一つ目の条件が確認できた． □

補題 10.7 中にあるように，$f^p = f^{p,w} \otimes f_w$ とおく．系 4.11 と同様にして以下が得られる：

命題 10.8 $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の ℓ 進表現 $IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]$ は p において不分岐である．さらに，十分大きい整数 j に対して以下が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]) = -\mathrm{Lef}(f^p, j, \mathbf{1}).$$

証明 系 4.11 の証明においては，系 4.5，補題 4.8，補題 4.9 が用いられている．GSp_4 の場合の系 4.5，すなわち定理 6.1 (1) の次元の部分については，6 節で既に示した．補題 4.8 は GSp_4 の場合にも全く同様の方法で証明できる．補題 4.9 は，Sh_K の整正準モデルの最小コンパクト化ではなくトロイダルコンパクト化を用いることで，同様に証明できる．整正準モデルのコンパクト化の理論については，[FC90] および [Lan13] を参照． □

定理 10.4 (1) より

$$-\mathrm{Lef}(f^p, j, \mathbf{1}) = ST_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{GSp}_4}(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi) - \frac{1}{4} ST_{\mathrm{ell}}^H(f^{p,H} \otimes h_{p,j}^H \otimes h_\infty^H)$$

であった．定理 10.4 (2) より

$$ST_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{GSp}_4}(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi) = \sum_{\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})} m(\pi')\,\mathrm{Tr}\,\pi'(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi)$$

である．f^p の選び方から，$\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})$ が $\mathrm{Tr}\,\pi'(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi) \neq 0$ を満たすなら $\pi'_f \cong \pi_f$ である．定理 5.13 より，$\pi' \in \{\pi_f \otimes \pi^{\mathrm{gen}}, \pi_f \otimes \pi^{\mathrm{hol}}\}$ および $m(\pi_f \otimes \pi^{\mathrm{gen}}) = m(\pi_f \otimes \pi^{\mathrm{hol}}) = 1$ が分かる．f_ϕ の定義より $\mathrm{Tr}\,\pi^{\mathrm{gen}}(f_\phi) = \mathrm{Tr}\,\pi^{\mathrm{hol}}(f_\phi) = \dfrac{1}{2}$ であるから，命題 10.1 (1) と合わせて

$$\begin{aligned} ST_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{GSp}_4}(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi) &= \mathrm{Tr}\,\pi_f(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4}) = \mathrm{Tr}\,\pi_p(h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4}) \\ &= p^{3j/2}\bigl(z_1(\tau_p)^{-j} + z_2(\tau_p)^{-j} + z_3(\tau_p)^{-j} + z_4(\tau_p)^{-j}\bigr) \end{aligned}$$

が得られる．

一方，定理 10.4 (3) より

$$\begin{aligned} &ST_{\mathrm{ell}}^{H}(f^{p,H} \otimes h_{p,j}^{H} \otimes h_\infty^{H}) \\ &\quad = \sum_{\pi_H \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(H,\mathbf{1})} m(\pi_H)\,\mathrm{Tr}\,\pi_H(f^{p,H} \otimes h_{p,j}^{H} \otimes (f_{D_{3,0}\boxtimes D_{1,0}} - f_{D_{1,0}\boxtimes D_{3,0}})) \end{aligned}$$

であるが，f^p のとり方から右辺は 0 になる．

以上より，十分大きな j に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]) &= -\,\mathrm{Lef}(f^p, j, \mathbf{1}) \\ &= p^{3j/2}\bigl(z_1(\tau_p)^{-j} + z_2(\tau_p)^{-j} + z_3(\tau_p)^{-j} + z_4(\tau_p)^{-j}\bigr) \end{aligned}$$

となるので，定理 6.1 (1) が証明された．

■定理 6.1 (2) の証明　以前と同様，$\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4)$ を中心指標が自明な離散的保型表現とし，$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{PGSp}_4)$ をその A パラメータとする．定理 6.1 (2) の通り，合成 $r \circ \psi\colon L_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) \xhookrightarrow{r} \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ は $(\phi_{\tau_1} \oplus \phi_{\tau_2}) \boxtimes \nu[1]$ という形であると仮定する．ただし，τ_1, τ_2 は中心指標が自明な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現であって $\tau_{1,\infty} \cong D_{3,0}$, $\tau_{2,\infty} \cong D_{1,0}$ を満たすものとする．

ここでは，さらに仮定 10.5 を課して定理 6.1 (2) の証明を行う．この場合の仮定 10.5 は，ある有限素点 w において $\tau_{1,w}$ および $\tau_{2,w}$ がともに超尖点表現であり，$\tau_{1,w} \not\cong \tau_{2,w}$ であることと同値である（これは [GT11a] および [GT11b] による GSp_4 の局所 L パケットの記述から分かる）．

$p \neq \ell$ を $\mathbb{Q}$ の有限素点であって π_p が不分岐であるものとし，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 $K = \prod_{v\neq\infty} K_v$ を以前と同様にとる．必要なら K_w を縮めて，$f_w \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_w), K_w)$ も以前と同様にとる．

補題 10.7 と同様の議論によって，以下を証明することができる：

補題 10.9 以下の条件を満たす $f^{p,w} \in \mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f^{p,w}), K^{p,w})$ が存在する：$f^p = f^{p,w} \otimes f_w$ とおくと，

- $\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})$ に対し，π'_p が不分岐であり，π'_∞ が $\mathbf{1}$ と同じ無限小指標を持つならば，

$$\operatorname{Tr} \pi'^p_f(f^p) = \begin{cases} 1 & \pi'_f \cong \pi_f, \\ 0 & \pi'_f \ncong \pi_f. \end{cases}$$

- 大域 A パケット Π_ψ（定義 5.12 参照）の元 π' に対し，

$$\operatorname{Tr} \pi'^p_f(f^p) = \begin{cases} 1 & \pi'^p_f \cong \pi^p_f, \\ 0 & \pi'^p_f \ncong \pi^p_f. \end{cases}$$

- $\pi_H \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(H, \mathbf{1})$ に対し，$\pi_{H,p}$ が不分岐であり，$\pi_{H,\infty}$ が $D_{3,0} \boxtimes D_{1,0}$ または $D_{1,0} \boxtimes D_{3,0}$ と同じ無限小指標を持つとする．さらに $\pi_H \ncong \tau_1 \boxtimes \tau_2, \tau_2 \boxtimes \tau_1$ ならば，

$$\operatorname{Tr} \pi^p_{H,f}(f^{p,H}) = 0.$$

$f^p = f^{p,w} \otimes f_w$ に対し，命題 10.8 と同様のことが成り立つ．すなわち，十分大きい整数 j に対し

$$\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]) = -\operatorname{Lef}(f^p, j, \mathbf{1})$$

である．定理 10.4 (1) より

$$-\operatorname{Lef}(f^p, j, \mathbf{1}) = ST^{\mathrm{GSp}_4}_{\mathrm{ell}}(f^p \otimes h^{\mathrm{GSp}_4}_{p,j} \otimes f_\phi) - \frac{1}{4} ST^H_{\mathrm{ell}}(f^{p,H} \otimes h^H_{p,j} \otimes h^H_\infty)$$

であった．定理 10.4 (2) より

$$ST^{\mathrm{GSp}_4}_{\mathrm{ell}}(f^p \otimes h^{\mathrm{GSp}_4}_{p,j} \otimes f_\phi) = \sum_{\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})} m(\pi') \operatorname{Tr} \pi'(f^p \otimes h^{\mathrm{GSp}_4}_{p,j} \otimes f_\phi)$$

である．f^p の選び方から，$\pi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GSp}_4, \mathbf{1})$ が $\operatorname{Tr} \pi'(f^p \otimes h^{\mathrm{GSp}_4}_{p,j} \otimes f_\phi) \neq 0$ を満たすなら $\pi'_f \cong \pi_f$ である．定理 5.13 より $\pi' \cong \pi$ と $m(\pi) = 1$ が分かる．f_ϕ の定義より $\operatorname{Tr} \pi_\infty(f_\phi) = \dfrac{1}{2}$ であるから，命題 10.1 (1) と合わせて

$$\begin{aligned} ST^{\mathrm{GSp}_4}_{\mathrm{ell}}(f^p \otimes h^{\mathrm{GSp}_4}_{p,j} \otimes f_\phi) &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \pi_f(f^p \otimes h^{\mathrm{GSp}_4}_{p,j}) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \pi_p(h^{\mathrm{GSp}_4}_{p,j}) \\ &= \frac{1}{2} p^{3j/2} \bigl(z_1(\tau_{1,p})^{-j} + z_2(\tau_{1,p})^{-j} + z_1(\tau_{2,p})^{-j} + z_2(\tau_{2,p})^{-j} \bigr) \end{aligned}$$

が得られる．

次に $ST^H_{\mathrm{ell}}(f^{p,H}\otimes h^H_{p,j}\otimes h^H_\infty)$ を計算しよう．定理 10.4 (3) より

$$\begin{aligned}&ST^H_{\mathrm{ell}}(f^{p,H}\otimes h^H_{p,j}\otimes h^H_\infty)\\&\quad=\sum_{\pi_H\in\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(H,\mathbf{1})} m(\pi_H)\operatorname{Tr}\pi_H(f^{p,H}\otimes h^H_{p,j}\otimes(f_{D_{3,0}\boxtimes D_{1,0}}-f_{D_{1,0}\boxtimes D_{3,0}}))\end{aligned}$$

であった．f^p の選び方および $m(\tau_1\boxtimes\tau_2)=m(\tau_2\boxtimes\tau_1)=1$ から，右辺は

$$\operatorname{Tr}(\tau^p_{1,f}\boxtimes\tau^p_{2,f})(f^{p,H})\operatorname{Tr}(\tau_{1,p}\boxtimes\tau_{2,p})(h^H_{p,j})-\operatorname{Tr}(\tau^p_{2,f}\boxtimes\tau^p_{1,f})(f^{p,H})\operatorname{Tr}(\tau_{2,p}\boxtimes\tau_{1,p})(h^H_{p,j})$$

である．命題 10.1 (2) より，これは

$$\begin{aligned}&p^{3j/2}\bigl(z_1(\tau_{1,p})^{-j}+z_2(\tau_{1,p})^{-j}-z_1(\tau_{2,p})^{-j}-z_2(\tau_{2,p})^{-j}\bigr)\\&\qquad\times(\operatorname{Tr}(\tau^p_{1,f}\boxtimes\tau^p_{2,f})(f^{p,H})+\operatorname{Tr}(\tau^p_{2,f}\boxtimes\tau^p_{1,f})(f^{p,H}))\end{aligned}$$

に等しい．

$\operatorname{Tr}(\tau^p_{1,f}\boxtimes\tau^p_{2,f})(f^{p,H})$ および $\operatorname{Tr}(\tau^p_{2,f}\boxtimes\tau^p_{1,f})(f^{p,H})$ は，定理 5.11 (1) において説明を省いたエンドスコピー指標関係式を用いて計算することができる．現在の設定において，エンドスコピー指標関係式は以下のようになる：

定理 10.10（エンドスコピー指標関係式） v を $\mathbb{Q}$ の素点とする．このとき，任意の $f_v\in\mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_v))$ に対し，以下が成り立つ：

$$\sum_{\pi'_v\in\Pi_{\psi_v}}\langle s_v,\pi'_v\rangle\operatorname{Tr}\pi'_v(f_v)=\operatorname{Tr}(\tau_{1,v}\boxtimes\tau_{2,v})(f^H_v)=\operatorname{Tr}(\tau_{2,v}\boxtimes\tau_{1,v})(f^H_v).$$

ただし，s は $\mathfrak{S}_\psi=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明な元を表す．

$$\Pi_{\psi^p_f}=\Bigl\{\pi'={\bigotimes_{v\neq p,\infty}}'\pi'_v\Bigm|\pi'_v\in\Pi_{\psi_v},\ \text{ほとんど全ての } v \text{ に対し } \pi'_v \text{ は不分岐}\Bigr\}$$

とおき，$\pi'\in\Pi_{\psi^p_f}$ に対し $\langle s^p_f,\pi'\rangle=\prod_{v\neq p,\infty}\langle s_v,\pi'_v\rangle$ と定める．定理 10.10 より，

$$\sum_{\pi'\in\Pi_{\psi^p_f}}\langle s^p_f,\pi'\rangle\operatorname{Tr}\pi'(f^p)=\operatorname{Tr}(\tau^p_{1,f}\boxtimes\tau^p_{2,f})(f^{p,H})=\operatorname{Tr}(\tau^p_{2,f}\boxtimes\tau^p_{1,f})(f^{p,H})$$

が成り立つ．f^p のとり方から，左辺は $\langle s^p_f,\pi^p_f\rangle\operatorname{Tr}\pi^p_f(f^p)=\langle s^p_f,\pi^p_f\rangle$ に等しい．一方，定理 5.13 より $\langle s^p_f,\pi^p_f\rangle\langle s_p,\pi_p\rangle\langle s_\infty,\pi_\infty\rangle=\langle s,\pi\rangle=1$ である．π_p は不分岐なの

で定理 5.11 (2) から $\langle s_p, \pi_p\rangle = 1$ である．したがって $\langle s_f^p, \pi_f^p\rangle = \langle s_\infty, \pi_\infty\rangle$ が得られる（$\langle s_\infty, \pi_\infty\rangle \in \{\pm 1\}$ に注意）．

以上で $\mathrm{Tr}(\tau_{1,f}^p \boxtimes \tau_{2,f}^p)(f^{p,H}) = \mathrm{Tr}(\tau_{2,f}^p \boxtimes \tau_{1,f}^p)(f^{p,H}) = \langle s_\infty, \pi_\infty\rangle$ が分かった．これを代入すると，

$$\begin{aligned} &ST_{\mathrm{ell}}^{H}(f^{p,H} \otimes h_{p,j}^H \otimes h_\infty^H) \\ &\qquad = 2\langle s_\infty, \pi_\infty\rangle p^{3j/2}\bigl(z_1(\tau_{1,p})^{-j} + z_2(\tau_{1,p})^{-j} - z_1(\tau_{2,p})^{-j} - z_2(\tau_{2,p})^{-j}\bigr) \end{aligned}$$

が得られる．

$\pi_\infty = \pi^{\mathrm{gen}}$ のとき，$\langle s_\infty, \pi_\infty\rangle = 1$ であるから，

$$\begin{aligned} &ST_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{GSp}_4}(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi) - \frac{1}{4}ST_{\mathrm{ell}}^{H}(f^{p,H} \otimes h_{p,j}^H \otimes h_\infty^H) \\ &\qquad = p^{3j/2}(z_1(\tau_{2,p})^{-j} + z_2(\tau_{2,p})^{-j}) \end{aligned}$$

となる．一方，$\pi_\infty = \pi^{\mathrm{hol}}$ のとき，$\langle s_\infty, \pi_\infty\rangle = -1$ であるから，

$$\begin{aligned} &ST_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{GSp}_4}(f^p \otimes h_{p,j}^{\mathrm{GSp}_4} \otimes f_\phi) - \frac{1}{4}ST_{\mathrm{ell}}^{H}(f^{p,H} \otimes h_{p,j}^H \otimes h_\infty^H) \\ &\qquad = p^{3j/2}(z_1(\tau_{1,p})^{-j} + z_2(\tau_{1,p})^{-j}) \end{aligned}$$

となる．よって，十分大きい整数 j に対し

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p^j; IH^3(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\pi_f]) = \begin{cases} p^{3j/2}(z_1(\tau_{2,p})^{-j} + z_2(\tau_{2,p})^{-j}) & \pi_\infty \cong \pi^{\mathrm{gen}} \\ p^{3j/2}(z_1(\tau_{1,p})^{-j} + z_2(\tau_{1,p})^{-j}) & \pi_\infty \cong \pi^{\mathrm{hol}} \end{cases}$$

が示された．定理 6.1 (2) はこれより直ちに従う．

■**謝辞**　原稿に多数の有益なコメントをくださった今井直毅氏，越川皓永氏，清水康司氏に感謝いたします．また，実 Lie 群の表現論に関する質問に答えてくださった跡部発氏，阿部紀行氏に感謝いたします．

参考文献

[AJ87] J. Adams and J. F. Johnson, *Endoscopic groups and packets of non-tempered representations*, Compositio Math. **64** (1987), no. 3, 271–309.

[AMR15] N. Arancibia, C. Mœglin, and D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires*, preprint, arXiv:1507.01432, 2015.

[Art88] J. Arthur, *The invariant trace formula. II. Global theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 3, 501–554.

[Art89a] ———, *The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97** (1989), no. 2, 257–290.

[Art89b] ———, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Astérisque (1989), no. 171-172, 13–71, Orbites unipotentes et représentations, II.

[Art04] ———, *Automorphic representations of* GSp(4), Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, pp. 65–81.

[Art05] ———, *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–263.

[Art13] ———, *The endoscopic classification of representations: Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[BBDG18] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, and O. Gabber, *Faisceaux pervers*, Astérisque (2018), no. 100, iv+180.

[BC83] A. Borel and W. Casselman, *L^2-cohomology of locally symmetric manifolds of finite volume*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 3, 625–647.

[Bor79] A. Borel, *Automorphic L-functions*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 27–61.

[Car86] H. Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 3, 409–468.

[Car12] A. Caraiani, *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 12, 2311–2413.

[Cas79] W. Casselman, *The Hasse-Weil ζ-function of some moduli varieties of dimension greater than one*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 141–163.

[CD85] L. Clozel and P. Delorme, *Pseudo-coefficients et cohomologie des groupes de Lie réductifs réels*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300** (1985), no. 12, 385–387.

[CG15] P.-S. Chan and W. T. Gan, *The local Langlands conjecture for* GSp(4) *III: Stability and twisted endoscopy*, J. Number Theory **146** (2015), 69–133.

[CH13] G. Chenevier and M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations, II*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 53–73.

[Clo90] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 77–159.

[Del80] P. Deligne, *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1980), no. 52, 137–252.

[FC90] G. Faltings and C.-L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Fuj97] K. Fujiwara, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. **127** (1997), no. 3, 489–533.

[GGP12] W. T. Gan, B. H. Gross, and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Astérisque (2012), no. 346, 1–109, Sur les conjectures de Gross et Prasad. I.

[Gon10] K. Gongopadhyay, *On the conjugacy classes in the orthogonal and symplectic groups over algebraically closed fields*, Expo. Math. **28** (2010), no. 4, 351–356.

[GT11a] W. T. Gan and S. Takeda, *The local Langlands conjecture for* GSp(4), Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 3, 1841–1882.

[GT11b] ______, *Theta correspondences for* GSp(4), Represent. Theory **15** (2011), 670–718.

[Hal93] T. C. Hales, *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, Representation theory of groups and algebras, Contemp. Math., vol. 145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 109–134.

[Hal95] ______, *On the fundamental lemma for standard endoscopy: reduction to unit elements*, Canad. J. Math. **47** (1995), no. 5, 974–994.

[HH20] T. Haines and M. Harris (eds.), *Shimura Varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2020.

[HLTT16] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor, and J. Thorne, *On the rigid cohomology of certain Shimura varieties*, Res. Math. Sci. **3** (2016), Paper No. 37, 308.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[Iha67] Y. Ihara, *Hecke Polynomials as congruence ζ functions in elliptic modular case*, Ann. of Math. (2) **85** (1967), 267–295.

[Iha68a] ______, *The congruence monodromy problems*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 107–121.

[Iha68b] ______, *On congruence monodromy problems. Vol. 1*, Lecture Notes, No. 1, Department of Mathematics, University of Tokyo, Tokyo, 1968.

[Iha69] ______, *On congruence monodromy problems. Vol. 2*, Lecture Notes, No. 2, Department of Mathematics, University of Tokyo, Tokyo, 1969.

[JS81] H. Jacquet and J. A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic forms. II*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 4, 777–815.

[Kis17] M. Kisin, *Mod p points on Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 3, 819–914.

[Kot82] R. E. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke

Math. J. **49** (1982), no. 4, 785–806.

[Kot83] ______, *Sign changes in harmonic analysis on reductive groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), no. 1, 289–297.

[Kot84a] ______, *Shimura varieties and twisted orbital integrals*, Math. Ann. **269** (1984), no. 3, 287–300.

[Kot84b] ______, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 3, 611–650.

[Kot85] ______, *Isocrystals with additional structure*, Compositio Math. **56** (1985), no. 2, 201–220.

[Kot86] ______, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), no. 3, 365–399.

[Kot88] ______, *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 3, 629–646.

[Kot90] ______, *Shimura varieties and λ-adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 161–209.

[Kot92] ______, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 373–444.

[Kot97] ______, *Isocrystals with additional structure. II*, Compositio Math. **109** (1997), no. 3, 255–339.

[KS99] R. E. Kottwitz and D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque (1999), no. 255, vi+190.

[KW01] R. Kiehl and R. Weissauer, *Weil conjectures, perverse sheaves and l'adic Fourier transform*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 42, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Lan76] R. P. Langlands, *Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum*, Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974), 1976, pp. 401–418.

[Lan77] ______, *Shimura varieties and the Selberg trace formula*, Canadian J.

Math. **29** (1977), no. 6, 1292–1299.

[Lan79] ———, *On the zeta functions of some simple Shimura varieties*, Canadian J. Math. **31** (1979), no. 6, 1121–1216.

[Lan13] K.-W. Lan, *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, London Mathematical Society Monographs, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, 2013.

[Lau97] G. Laumon, *Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour* $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbf{Q}}$, Compositio Math. **105** (1997), no. 3, 267–359.

[Lee] D. U. Lee, *Galois gerbs and Lefschetz number formula for Shimura varieties of Hodge type*, arXiv:1801.03057.

[LMW18] B. Lemaire, C. Moeglin, and J.-L. Waldspurger, *Le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue: réduction aux éléments unités*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **51** (2018), no. 2, 281–369.

[Loo88] E. Looijenga, *L^2-cohomology of locally symmetric varieties*, Compositio Math. **67** (1988), no. 1, 3–20.

[LS87] R. P. Langlands and D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 219–271.

[LW17] B. Lemaire and J.-L. Waldspurger, *Le lemme fondamental pour l'endoscopie tordue: le cas où le groupe endoscopique elliptique non ramifié est un tore*, Representation theory, number theory, and invariant theory, Progr. Math., vol. 323, Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, pp. 399–468.

[Man63] Yu. I. Manin, *Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic*, Uspehi Mat. Nauk **18** (1963), no. 6 (114), 3–90.

[Mil05] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 265–378.

[Mœg11] C. Mœglin, *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques*, On certain L-functions, Clay Math. Proc., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 333–374.

[Mœg17] ———, *Paquets d'Arthur spéciaux unipotents aux places archimédi-*

ennes et correspondance de Howe, Representation theory, number theory, and invariant theory, Progr. Math., vol. 323, Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, pp. 469–502.

[Mor10] S. Morel, *On the cohomology of certain noncompact Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 173, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010, With an appendix by Robert Kottwitz.

[Mor11] ———, *Cohomologie d'intersection des variétés modulaires de Siegel, suite*, Compos. Math. **147** (2011), no. 6, 1671–1740.

[MR] C. Moeglin and D. Renard, *Sur les paquets d'Arthur des groupes classiques réels*, arXiv:1703.07226, To appear in Journal of the European Mathematical Society.

[MR18] ———, *Sur les paquets d'Arthur aux places réelles, translation*, Geometric aspects of the trace formula, Simons Symp., Springer, Cham, 2018, pp. 299–320.

[Mum70] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.

[MW89] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), no. 4, 605–674.

[Ngô10] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2010), no. 111, 1–169.

[San81] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. Reine Angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[Sch] R. Schmidt, *Paramodular forms in CAP representations of GSp(4)*, `http://www.math.unt.edu/~schmidt/papers/CAP_paramodular.pdf`.

[Sch15] P. Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Ann. of Math. (2) **182** (2015), no. 3, 945–1066.

[Sch18] R. Schmidt, *Packet structure and paramodular forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 5, 3085–3112.

[She79] D. Shelstad, *Orbital integrals and a family of groups attached to a* *real reductive group*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), no. 1, 1–31.

[Shi10] S. W. Shin, *A stable trace formula for Igusa varieties*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), no. 4, 847–895.

[Shi11] ———, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 3, 1645–1741.

[SS90] L. Saper and M. Stern, *L_2-cohomology of arithmetic varieties*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 1, 1–69.

[SS13] P. Scholze and S. W. Shin, *On the cohomology of compact unitary group Shimura varieties at ramified split places*, J. Amer. Math. Soc. **26** (2013), no. 1, 261–294.

[Ste65] R. Steinberg, *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1965), no. 25, 49–80.

[Ste68] ———, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[Tat71] J. Tate, *Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda)*, Séminaire Bourbaki. Vol. 1968/69: Exposés 347–363, Lecture Notes in Math., vol. 175, Springer, Berlin, 1971, pp. Exp. No. 352, 95–110.

[Tay93] R. Taylor, *On the l-adic cohomology of Siegel threefolds*, Invent. Math. **114** (1993), no. 2, 289–310.

[VZ84] D. A. Vogan, Jr. and G. J. Zuckerman, *Unitary representations with nonzero cohomology*, Compositio Math. **53** (1984), no. 1, 51–90.

[Wal97] J.-L. Waldspurger, *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. **105** (1997), no. 2, 153–236.

[Wal06] ———, *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), no. 3, 423–525.

[Wal08] ———, *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Mem. Amer. Math. Soc. **194** (2008), no. 908, x+261.

[Wei09] R. Weissauer, *Endoscopy for* GSp(4) *and the cohomology of Siegel modular threefolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1968, Springer-

Verlag, Berlin, 2009.

[Xu17] B. Xu, *On Mœglin's Parametrization of Arthur Packets for p-adic Quasisplit $Sp(N)$ and $SO(N)$*, Canad. J. Math. **69** (2017), no. 4, 890–960.

[SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA7)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288, 340, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[プレ] 伊藤哲史（述）・三枝洋一（記），プレサマースクール，本報告集.

[石塚] 石塚裕大，Abel 多様体の基礎，本報告集.

[今井] 今井直毅，志村多様体入門，本報告集.

[大島] 大島芳樹，Hermite 対称領域の数論的商と保型形式，本報告集.

[越川] 越川皓永，Siegel モジュラー多様体，本報告集.

[佐藤] 佐藤幹夫，Weil 予想と Ramanujan 予想，佐藤幹夫の数学［増補版］，日本評論社，2014.

[清水] 清水康司，志村多様体の整モデル，本報告集.

[津嶋] 津嶋貴弘，本田・テイト理論とモジュラー曲線のレフシェッツ数，本報告集.

[三枝 1] 三枝洋一，エタールコホモロジーと ℓ 進表現，第 17 回整数論サマースクール「ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集，2010.

[三枝 2] 三枝洋一，$\mathrm{GL}(n)$ の局所ラングランズ対応，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2013.

[三枝 3] 三枝洋一，志村多様体を用いた Galois 表現の構成，本報告集.

[三枝 4] 三枝洋一，Arthur 分類とその応用，`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/pdf/Arthur-classification.pdf`, RIMS 講究録別冊「代数的整数論とその周辺 2016」より出版予定.

[SS2010] 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集，2010.