志村多様体と K3 曲面：Tate 予想への応用

松本雄也 *

概要

有限体上の滑らかな射影的代数多様体の Tate 予想とは，その多様体上のサイクルの存在に関する予想である．最近 Madapusi Pera [MP15] により，有限体上の任意の K3 曲面（ただし標数 2 を除く）について Tate 予想が成立することが，直交群の志村多様体の整モデルの構成の帰結として証明された．（標数 2 についてはその後 Kim–Madapusi Pera [KMP16] および伊藤–伊藤–越川 [IIK18] により示された．）

本稿では，Tate 予想および K3 曲面について解説したのち，この証明を解説する．

1 Tate 予想

Tate 予想にもいろいろある（注 1.3 を参照）が，まず 1.1 節で有限体上のアーベル多様体の自己同型に関する Tate 予想について述べ，その後 1.2 節で有限体上の多様体のサイクルに関する Tate 予想について述べる．

1.1 有限体上のアーベル多様体に対する Tate 予想

k を有限体とし，A を k 上のアーベル多様体とする．標数 p と異なる素数 l に対し，$T_l(A) := \varprojlim_m A[l^m](\overline{k})$ を A の l 進 Tate 加群とよぶ．これは階数 $2\dim A$ の自由 $\mathbb{Z}_l$ 加群で，自然に絶対ガロア群 Γ_k が作用する．

定理 1.1（Tate 予想／ Tate の定理 [Tat66]**）** 自然な射 $\mathrm{Hom}_k(A,B)\otimes\mathbb{Z}_l \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_k}(T_l(A),T_l(B))$ は全単射である．

* 東京理科大学理工学部数学科　e-mail: `matsumoto.yuya.m@gmail.com`

予想が提唱された経緯については注 1.3 で述べる．

$H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_l)$ は $T_l(A)$ の双対に自然に同型なので，$H^1_{\text{ét}}$ の方で述べられることもある．また，$\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l$ した形で述べられることもある（同値であることは簡単に分かる）．

後のいろいろな証明で類似を指摘したいので，証明を簡単に紹介しておく．

証明 単射性（任意の体 k に対して成り立つ）は比較的容易であり，例えば [Mum70, Section 19, Theorem 3] を参照せよ．

全射性を示す．$V_l(A) := T_l(A) \otimes \mathbb{Q}_l$ とおく．（$A \times B$ を考えることにより，）$A = B$ と仮定してよい．つまり

$$\mathrm{End}_k(A) \otimes \mathbb{Q}_l \to \mathrm{End}_{\Gamma_k}(V_l(A)) \tag{1.1}$$

が全射であることを示せばよい．全射であることを 1 つの $l \neq p$ で示し，また右辺の次元が l によらないことを示せば十分である．

Γ_k の作用で $\mathbb{Q}_l$ 上生成される $\mathrm{End}(V_l(A))$ の部分代数を F_l とおくと，これは $\mathrm{End}_k(A) \otimes \mathbb{Q}$ の中でフロベニウス射が生成する部分代数 F に $\otimes\mathbb{Q}_l$ したものである．$\mathrm{End}_k(A) \otimes \mathbb{Q}$ が semisimple なので，F も semisimple であり，l をうまくとることにより F_l が $\mathbb{Q}_l$ いくつかの直積であるようにとれる（この条件をどう使うかの説明は省略する）．このほか，「k 上のアーベル多様体 B（の k 同型類）で，次数 d^2 の偏極をもち，A との間に次数 l ベキの同種写像があるもの」の有限性（k が有限体なので，モジュライ空間の k 値点を考えると従う）も用いることで，そのような l についての全射性が従う．

Γ_k の $\mathrm{End}(V_l(A))$ への作用が semisimple なので，式 (1.1) の右辺の次元はフロベニウスの固有多項式のみから計算でき，この固有多項式が l によらないので，次元も l によらない． □

$p > 2$ で k が $\mathbb{F}_p$ 上有限生成な体の場合にも成り立つことを Zarhin [Zar76]，森 [Mor78] が示している（森は $p = 2$ も示したが未出版らしい（[MB85, Chapters 11-12]））．

一方 k が $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体な場合にも成り立つことを Faltings [Fal83], [FW84, VI.3 節] が示した．こちらの方がだいぶ難しい．

1.2 有限体上の代数多様体に対する Tate 予想

k を有限体とし，X を k 上の滑らかな射影的代数多様体とする．余次元 i のサイクルのなす加群を $Z^i(X)$ とおく．自然な射 $Z^i(X) \to H^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_l)(i)$ の像は明らかに Γ_k 不変部分 $H^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_l)(i)^{\Gamma_k}$ に入る．

予想 1.2（Tate 予想） $Z^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l \to H^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)(i)^{\Gamma_k}$ は全射である．

注意 1.3 Tate 予想とは，広くは，Tate が 1964 年の Woods Hole 研究集会で述べた一連の予想をさす：定理 1.1（当時はまだ予想），予想 1.2 およびこの射の核の記述，Γ_k の $H_{\text{ét}}$ への作用が半単純か，ゼータ関数の極との関連など．講演の内容は [Tat64],[Tat65][*1]を参照せよ．またこれらの予想の発端のひとつとして，1962 年の Tate の ICM 講演 [Tat63, Section 4] で挙げられた，大域体上の楕円曲線の Shafarevich–Tate 群の l-part の有限性予想およびそれと同値[*2]ないくつかの予想がある．Tate のサーベイ [Tat94] および Milne のサーベイ [Mil07],[Mil14, Section 4] も参照せよ．

本稿では定理 1.1 と予想 1.2 のみを扱う．また，l 進ではなくクリスタリンコホモロジーを用いる定式化もあるが，本稿では省略する．

定理 1.1 と予想 1.2 との関係を述べる．A, B に対する定理 1.1 を $H(A, B)$ と書き，X, i に対する予想 1.2 を $T^i(X)$ と書くことにする．

命題 1.4 (1) $H(A, \check{A})$ が成り立てば $T^1(A)$ が成り立つ．ここで $\check{A}$ は双対アーベル多様体である．

(2) $T^1(X), T^1(Y), H(A, B)$ が成り立つことと $T^1(X \times Y)$ が成り立つことは同値．ここで $A = \mathrm{Alb}(X)$ で $B = \mathrm{Pic}^0(Y)$．

証明 以下 $H^j_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)$ のことを $H^j(X)$ と略記する．

(2) 分解 $Z^1(X \times Y) = Z^1(X) \times Z^1(Y) \times DC(X, Y)$（$DC$ は divisorial correspondence のなす加群）および分解 $H^2(X \times Y) = H^2(X) \times H^2(Y) \times (H^1(X) \otimes H^1(Y))$ を用いる．右辺の第 1,2 項の間の射が $T^1(X), T^1(Y)$ の射に，第 3 項の間の射が A, B

[*1] Milne いわく，[Tat64] は informal mimeographed proceedings で，加筆されたものが [Tat65] として出版された．

[*2] 同値性の証明には当時未解決だった Weil 予想を用いたりするのだが．

に対する $H(A,B)$ の射に一致することをみればよい.

(1) 次の図式を用いる.

$$\begin{tikzcd} Z^1(A)\otimes\mathbb{Q}_l \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & DC(A,A)\otimes\mathbb{Q}_l \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] \\ H^2(A)(1) \arrow[r, shift left, "\alpha"] & H^1(A)\otimes H^1(A)(1) \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

ここで $\alpha=\mu^*-\mathrm{pr}_1^*-\mathrm{pr}_2^*$, $\beta=\Delta^*$ であり, $\Delta\colon A\to A\times A$ は対角射で $\mu\colon A\times A\to A$ は加法である. すると $\alpha\gamma=\gamma\alpha$, $\beta\gamma=\gamma\beta$, $\beta\alpha=4-1-1=2$ が成り立ち, 左側が右側の直和因子であることが分かるので, 主張が従う. □

定理 1.1 と命題 1.4 より, 曲線いくつかとアーベル多様体いくつかの直積に対して T^1 が成り立つことが分かる. この他いくつかの例について T^1 が知られている ([Tat94, Section 5] を参照). K3 曲面については 2.3 節で述べる.

以上では k を有限体としたが, より一般に素体上有限生成な体でも同様の予想を考えられる.[*3]

Tate 予想と Hodge 予想との関連について述べる.

滑らかな複素射影代数多様体 X と整数 i に対し, サイクル類の定める射 $Z^i(X)\to H^{2i}(X,\mathbb{C})$ の像は明らかに $H^{2i}(X,\mathbb{Z})\cap H^{i,i}$ に含まれるが, $Z^i(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\to H^{2i}(X,\mathbb{Q})\cap H^{i,i}$ が全射であるというのが Hodge 予想である. コホモロジー類のうちどれが代数的サイクルから来るかを予言するという意味で, 少なくとも表面的には Tate 予想と類似する. $i=1$ の場合, つまり因子に対する Hodge 予想は, より強く $\mathbb{Z}$ 係数の形で証明されている (Lefschetz の $(1,1)$ 定理に他ならない). $i>1$ で知られている例はほとんどない.

表面的類似に留まらず以下のような関連がある ([Del82][*4]や [Mil07, Sections 6–10] を参照). X を標数 0 の体 k 上の多様体とし, k は $\mathbb{C}$ に埋め込める (i.e. 濃度が $\mathbb{C}$ の濃度以下である) とする. X について Tate 予想が正しいとすると, $X_{\overline{k}}$ の absolute Hodge 類はすべて代数的であることが分かる.「Hodge 類はすべて absolute Hodge である」という Deligne の予想があり, この予想と Tate 予想から Hodge 予想が従

[*3] 講演時に, 有限生成でない体上の多様体についてはどうかという質問がありましたが, そのような多様体も実際には有限生成な部分体上定義されるので, そちらで考えればよいかと思います.

[*4] Milne の endnote のついたバージョンが Milne のウェブサイトにある.

う．Deligne の予想はアーベル多様体については正しいことが知られている．この他にも関連があるが本稿ではこれ以上立ち入らない．

2 K3 曲面

2.1 K3 曲面の基本

K3 曲面の基本的な事実を復習する．詳細は成書（例えば Barth–Hulek–Peters–van de Ven [BHPV04]，Huybrechts [Huy16]，金銅 [金銅 15] など）を参照いただきたい．

定義 2.1（K3 曲面の定義） 体 F 上の固有かつ滑らかな曲面 X が **K3 曲面**であるとは，$\bigwedge^2 \Omega^1_X \cong \mathcal{O}_X$ かつ $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ であること．

注意 2.2

- 1 つめの条件 $\bigwedge^2 \Omega^1_X \cong \mathcal{O}_X$ を満たす曲面 X は K3 曲面とアーベル曲面（と，標数 2 や 3 におけるいくつかの例外的な場合）のみである．アーベル曲面は 2 つめの条件を満たさない．
- $F = \mathbb{C}$ の場合，複素多様体（代数的と限らない）の範疇で K3 曲面を扱うことも重要だが，本稿では専ら代数的なもののみを扱う．なお，複素 K3 曲面のモジュライ空間（20 次元）のうち代数的なものは余次元 1 の閉部分空間可算無限個の合併をなす．以下とくに断らない限り代数的と仮定する．
- K3 曲面に有理二重点（ADE 型特異点）を許す文脈もあるが，本稿ではそうしない．

例 2.3 K3 曲面の例を挙げる．

- $\mathbb{P}^3$ に含まれる滑らかな 4 次曲面は K3 曲面になる．
- $\mathbb{P}^4$ の 2 次超曲面と 3 次超曲面の交わり，および $\mathbb{P}^5$ の 2 次超曲面 3 つの交わりは，滑らかな曲面ならば K3 曲面である．完全交差の形に書ける K3 曲面は以上の 3 種類しかない（重み付き射影空間の完全交差も含めればもう少しある）．
- $\mathbb{P}^2$ の滑らかな 6 次曲線で分岐する 2 重被覆は K3 曲面になる．
- アーベル多様体と関連の深い例として次の Kummer 曲面がある．A をアーベル曲面とし，標数は 2 ではないとする．有限群 $\{\pm 1\}$ は A に作用し，16 個の固定点をもつ（$= A$ の 2 分点）．商 $A/\{\pm 1\}$ は（A_1 型の）特異点を 16 個もつ

が，それの最小特異点解消は K3 曲面になる（$\mathbb{C}$ 上に限らない任意標数（$\neq 2$）での証明は例えば [Băd01, Theorem 10.6] や [Huy16, Example 1.3(iii)] を参照）．これを $\mathrm{Km}\,A$ と書き，このように得られる K3 曲面を Kummer 曲面とよぶ．

命題 2.4（K3 曲面の Hodge 数） $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega_X^p)$ の値は，$h^{0,0} = 1$, $h^{2,0} = h^{0,2} = 1$, $h^{1,1} = 20$, $h^{2,2} = 1$, 他は 0.

証明 標数 0 の場合，$h^{1,1}$ 以外は定義と Serre 双対性と $h^{p,q} = h^{q,p}$ とから従う．正標数の場合は $h^{p,q} = h^{q,p}$ が使えないので（K3 曲面の場合は結果的には正しいが），$H^0(X, \Omega^1) = 0$ を別途示す必要がある．これは Rudakov–Shafarevich [RS76, Theorem 7] や Nygaard [Nyg79, Corollary 3.5] により示されている．

$h^{1,1}$ については，Hirzebruch–Riemann–Roch の定理（の特殊な場合である Noether の公式）より $\sum(-1)^{i+j}h^{i,j} = 12\chi(\mathcal{O}_X) - K_X^2 = 24$ となることから従う． □

またこのことから，複素 K3 曲面が普遍変形空間をもちその次元が（$h^{1,1} =$）20 であることが分かる．

命題 2.5（K3 曲面の Betti 数） 0 次から 4 次までの Betti 数は順に $1, 0, 22, 0, 1$（他は 0）となる．

正確に言うと，$\mathbb{C}$ 上の場合の Betti コホモロジー，標数 $\neq l$ の（閉体上の）場合の l 進コホモロジー，標数 p の（閉体上の）場合のクリスタリンコホモロジーは，上述の階数の自由加群である．

証明 $\mathbb{Q}$ 係数 Betti コホモロジーについては前命題から直ちに従うが，整係数で示すには torsion に関する議論が必要になる．

Betti：[BHPV04, Proposition VIII.3.3] 参照．

l 進：標数 0 なら，$\mathbb{C}$ 上の場合に帰着した上で Betti との比較定理を用いる．正標数なら，次命題と smooth base change theorem で標数 0 に帰着する．

クリスタリン：[Del81, Proposition 1.1] 参照． □

命題 2.6（標数 0 への持ち上げ） X を正標数の代数閉体 k 上の K3 曲面とし，L を ample な線束とする．このとき，k の Witt 環 $W = W(k)$ 上有限な DVR T 上へ X が持ち上がる：つまり，各ファイバーが K3 曲面である T 上固有滑らかなスキーム $\mathcal{X}$ およびその上の ample な線束 $\mathcal{L}$ であって X, L の延長であるものが存在する．

証明　Deligne [Del81, Corollaire 1.8]. □

さらに，Ogus [Ogu79] の結果と Tate 予想を用いると $T = W(k)$ ととれることが分かるが，詳細は省略する．

もう少し強く，Picard 群の階数 10 以下の部分群を与えたときに，その部分群を込めての持ち上げが存在することが知られている（[LO15, Proposition A.1]）．Picard 群全体を込めての持ち上げがあれば便利だが，これは一般には存在しない（Picard 数の上限（命題 2.9）を見比べると分かる）．

次に K3 曲面の定める格子について述べる．$\mathbb{Z}$ 値対称双線形形式の入った有限階数自由 $\mathbb{Z}$ 加群のことを**格子 lattice** とよぶ．例を挙げる：

- $e^2 = f^2 = 0$ かつ $ef = 1$ なる 2 元 e, f で生成される階数 2 の格子 U．双曲平面とよばれる．
- E_8 型ルート系に対応する階数 8 の格子 E_8．これは正定値である．

また，上の定義で $\mathbb{Z}$ を一般の可換環 R で置き換えたものを R 上の格子とよぶことにする（あまり一般的な言い方ではない．quadratic space とする方がよいかもしれない．あと自由ではなく射影的にするべきかもしれないが，本稿では $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_l, \mathbb{Q}$ の場合しか出てこないのであまり気にしない．）．

命題 2.7（K3 曲面の H^2）　X を（代数的と限らない）複素 K3 曲面とする．$H^2(X,\mathbb{Z})$ には対称双線形形式が $H^2(X,\mathbb{Z}) \times H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H^4(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ により定まっている．$H^2(X,\mathbb{Z})$ は格子として $U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ に同型である．ここで $E_8(-1)$ は E_8 の双線形形式の値を -1 倍にしたものである．とくに，$H^2(X,\mathbb{Z})$ の符号は $(+3, -19)$ である．

一般の体 k 上の K3 曲面 X に対する $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_l)$ は，$\mathbb{Z}_l$ 上の格子として，上に述べた格子に $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_l$ したものと同型である．

証明　非退化，unimodular（双線形形式を行列表示したとき行列式が ± 1 であること），偶（任意の元 x に対し $x^2 \in 2\mathbb{Z}$ であること），かつ不定値な格子の同型類は符号のみから決定されることが知られている．よって $H^2(X,\mathbb{Z})$ と $U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ の両者でこれらの性質を確認し符号を計算すればよい．後者については容易である．前者については，unimodular は双対性から，偶なことは Stiefel–Whitney 類に関する Wu の公式から従い，符号が $(+3, -19)$ であることは Hirzebruch 指数定理から計算

できる． □

この格子 $U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ を本稿では L_{K3} と書くことにする．

X, Y を（代数的と限らない）複素 K3 曲面とする．$f\colon X \to Y$ が同型射ならば，Betti コホモロジーの射 $f^*\colon H^2(Y,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z})$ は等長同型（つまり，$\mathbb{Z}$ 加群の同型でありさらに双線形形式を保つ）であり，さらに Hodge 構造を保つ．これは当たり前だが，これの逆が次の意味で成り立つ．

命題 2.8（K3 曲面の Torelli 型定理） X, Y を（代数的と限らない）複素 K3 曲面とする．Hodge 構造を保つ等長同型 $\phi\colon H^2(Y,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z})$ が存在するならば，複素多様体の同型射 $f\colon X \to Y$ が存在する．

さらに，ϕ が Kähler cone を保つならば，$\phi = f^*$ となるように f をとれる．

ϕ が Kähler cone を保つと限らない場合，X 上の滑らかな有理曲線 $C_1, \ldots, C_m$ が存在して，$r_{C_m} \circ \cdots \circ r_{C_1} \circ \phi$ またはその -1 倍は Kähler cone を保つ．ここで r_C はコホモロジー類 $[C] \in H^2(X,\mathbb{Z})$ による鏡映（等長写像 $r_C(x) = x + (x \cdot [C])[C]$）を表す．

曲線に関する Torelli の定理（標語的に言うと，曲線がそのヤコビアン多様体で決まる，すなわち H^1 で決まるというもの）との類似から Torelli 型定理とよばれる．

この Torelli 型定理の歴史について軽くふれる．まず Pjateckii-Shapiro–Shafarevich [PSS71] が代数的 K3 曲面の（偏極つき）Torelli 型定理（命題 2.18）を証明し，Burns–Rapoport [BR75] が Kähler な K3 曲面の場合に Torelli 型定理を証明した．（射影的ならば Kähler だが一般に逆は成り立たない．2 次元なので代数的と射影的は同値である．）その後，この Kähler な K3 曲面に対する Torelli 型定理を用いて，すべての複素 K3 曲面が Kähler であることが Siu [Siu83] により示された．（この辺りは [BBD85] や [金銅 15, 第 0 章] に詳しい．）

Tate 予想（$i = 1$）について考えたいので，因子がどれだけあるかを見ておく．

命題 2.9（K3 曲面の Picard 数） K3 曲面の因子について，線形同値と代数的同値は一致する．したがって K3 曲面 X の Picard 群（因子の線形同値類のなす群）$\mathrm{Pic}(X)$ は Néron–Severi 群（代数的同値類のなす群）$\mathrm{NS}(X) = \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$ と同一視できる．$\mathrm{Pic}(X)$ は torsion-free である．標数 0 の代数閉体上の Picard 数（Néron–Severi 群のランク）ρ としてありうる値は $1, 2, \ldots, 20$ であり，正標数の代

数閉体上の Picard 数としてありうる値は $1, 2, \ldots, 20, 22$ である．

証明　標数 0 のとき $\rho \leq h^{1,1} = 20$ なることと，正標数のとき $\rho \leq b_2 = 22$ なることは明らか．他は省略する．□

なお，任意の閉体上で上記の値がすべて実現されるわけではない．例えば，標数 p の有限体上の K3 曲面に対し Tate 予想が成り立てば，$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の K3 曲面の Picard 数は必ず偶数になることがすぐに分かる．

基礎体を拡大すると一般に Picard 群は大きくなるが，次の関係がある（この命題は K3 曲面に限らない）．

命題 2.10　X を k 上の滑らかな射影的代数多様体とする．k'/k を Galois 拡大とし，その Galois 群を Γ とおくと，$\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{Pic}(X_{k'})^{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}$ は同型である．k が有限体ならば $\otimes\mathbb{Q}$ するまでもなく同型である．

証明　Hochschild–Serre スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, H^q_{\text{ét}}(X_{k'}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$$

から，完全列

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_{k'})^{\Gamma} \to H^2(\Gamma, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \to H^2(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$$

を得るが，$H^2(\Gamma, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ が torsion なのでよい．k が有限体の場合については，$H^2(\Gamma, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = 0$ となるのでよい．□

ちなみに，k が有限体でなくても，X が k 有理点をもつ場合には，その有理点の誘導する射が上記完全列の一番右の射の左逆となるので，$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_{k'})^{\Gamma}$ が同型となる．

Tate 予想（$i = 1$）の射 $Z^1(X) \to H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_l)(1)$ は $\mathrm{Pic}(X)$ を経由するので，次の系を得る．これはしばしば断りなく用いる．

系 2.11　X を前命題の通りとし，k'/k を有限次 Galois 拡大とすると，$T^1(X_{k'})$ が成立すれば $T^1(X)$ も成立する．

そこでこれ以降は幾何的 Picard 数（基礎体を代数閉包で置き換えたときの Picard 数）のことを単に Picard 数とよぶことにする．

2.2 偏極つき K3 曲面のモジュライ空間

定義 2.12 (偏極) K3 曲面 X 上の線束 (の線形同値類[*5]) ξ が big かつ nef であるとき, ξ を X の**準偏極 quasi-polarization** という. より強く ξ が ample であるとき, **偏極 polarization** という. 交点数 ξ^2 を ξ の次数という（これは正の偶数である). ξ が（NS(X) で）他の元の非自明な整数倍にならないとき原始的 primitive であるという. 組 (X, ξ) のことを（準）偏極つき K3 曲面ということがある.

以下では（準）偏極は原始的なもののみを考える.

例 2.13 例 2.3 の最初の 3 項目で挙げた例で $\mathcal{O}(1)$ の引き戻しはそれぞれ次数 $4, 6, 8, 2$ の偏極である. 逆に, 次数 $4, 6, 8, 2$ の偏極つき K3 曲面のほとんどはそこで挙げた形である.

任意の正の偶数 $2d$ に対しその次数の偏極つき K3 曲面が存在するが省略する.

定義 2.14（モジュライ空間） M_{2d}°, M_{2d} で次数 $2d$ の（原始的な）偏極つき K3 曲面, 準偏極つき K3 曲面のモジュライ空間をそれぞれ表わす. これらは $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上の Deligne–Mumford スタックである（スキームにはならない）が詳細は省略する. 変形理論から, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上の相対次元が 19 であることが分かる. 自然な射 $M_{2d}^{\circ} \to M_{2d}$ は開埋め込みである.

今後必要となる M_{2d} の性質をまとめる（[MP15, Theorem 3.8, Corollary 3.9] 参照).

命題 2.15（M_{2d} の性質） $M_{2d,\mathbb{Q}}$ および $M_{2d,\mathbb{F}_p}$ は 19 次元である.

$M_{2d} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ の smooth locus を M_{2d}^{sm} とおくと, M_{2d}^{sm} はファイバーごとに稠密である. また, $M_{2d,\mathbb{Z}[1/2]}$ は非 smooth な点を含めて正則かつ locally healthy（3.3 節参照）である.

ファイバーごとの特異点については次のようになる. $M_{2d,\mathbb{Q}}$ は滑らかである. $M_{2d,\mathbb{F}_p}$ の特異点は高々 0 次元である. $p > 2$ のとき, $M_{2d,\mathbb{F}_p}$ に特異点が存在するならば $\operatorname{ord}_p(d) = 1$ である.

[*5] なお命題 2.9 で述べたように K3 曲面では線形同値は代数的同値と一致する.

「$\mathrm{ord}_p(d)=1$ である」と「正則 locally healthy である」以外は [Ogu79, Section 2] による．locally healthy は [Ogu79] の記述と Vasiu–Zink の判定法から従う（$p=2$ ではこの証明は使えない）．$\mathrm{ord}_p(d)=1$ と正則は [MP16, Proposition 5.21] で示されている（$p=2$ ではこの証明は使えない）．

(X,ξ) が $M_{2d,\mathbb{F}_p}$ の特異点ならば X は superspecial という性質をもつことが従う．（これは supersingular（後述）よりも特殊な性質である．詳細は省略する．）

定義 2.16（primitive part of H^2） $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{k}},\mathbb{Z}_l)$ の中での $\langle\xi\rangle$ の直交補空間を $PH^2_{\text{ét}}((X_{\overline{k}},\xi),\mathbb{Z}_l)$ で表し primitive part とよぶ．他のコホモロジーについても同様．

命題 2.17（K3 曲面の PH^2） (X,ξ) を $\mathbb{C}$ 上の次数 $2d$ の準偏極つき K3 曲面とすると，$H^2(X,\mathbb{Z})$ から L_{K3} への等長同型であって ξ を $e+df$ に写すものが存在する．ここで e,f は L_{K3} の 1 つめの直和成分 U の基底で $e^2=f^2=0, ef=1$ なるものである（ひとつ固定しておく）．とくに，$PH^2((X,\xi),\mathbb{Z})$ は格子として $\langle e-df\rangle\oplus U^{\oplus 2}\oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ に同型である (U の中で $\langle e+df\rangle$ の直交補空間が $\langle e-df\rangle$ である)．とくに，符号は $(+2,-19)$ である．

この格子 $\langle e-df\rangle\oplus U^{\oplus 2}\oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ を本稿では L_{2d} と書くことにする．

H^2 と同様，$PH^2((X,\xi),\mathbb{Z})$ も Hodge 構造になる．なお，[MP15] では双線形形式が本稿の -1 倍になっているので注意されたい．

命題 2.18（偏極つき K3 曲面の Torelli 型定理） $(X,\xi),(X',\xi')$ を $\mathbb{C}$ 上の偏極つき K3 曲面とする．$H^2(X,\mathbb{Z})$ から $H^2(X',\mathbb{Z})$ への Hodge 構造としての等長同型で ξ を ξ' へ写すものは，同型射 $X'\to X$（であって ξ の引き戻しが ξ' なるもの）から誘導される．

2.3 有限体上の K3 曲面の Tate 予想：歴史

本稿で紹介する Madapusi Pera [MP15] の証明はそれ以前の部分的結果を用いないので，この節の内容はこの後の節には必要ない．

歴史の説明のために，height を定義する．正標数の完全体 k 上の K3 曲面 X に対し[*6]，その形式 Brauer 群 $\widehat{\mathrm{Br}}(X)$（定義は省略）の 1 次元形式群としての height を

[*6] k が完全でないとき何が起きるかはよく知りません．

X の **height** とよび $h(X)$ または h と書く．$h(X)$ は $\{1, 2, \ldots, 10\} \cup \{\infty\}$ の元である．$i = 0, \ldots, 10$ に対して，height が $> i$ なる準偏極つき K3 曲面のモジュライ空間の次元は $19 - i$ である．

height は $H^2_{\mathrm{crys}}(X/W(k))$ の slope を用いて特徴づけられる（具体的には，$h < \infty$ ならば slope は $1 - 1/h, 1, 1 + 1/h$ であり，$h = \infty$ ならば slope はすべて 1 である）．また，$h < \infty$ ならば $\rho \leq 22 - 2h$ が成り立つ．

$h = \infty$ な K3 曲面を supersingular であるという．なお，塩田の意味の supersingular（幾何的 Picard 数が 22）と区別するために $h = \infty$ の方は Artin-supersingular ということもある．直前に述べたことから，塩田-supersingular ならば Artin-supersingular であり，その逆が（supersingular K3 曲面に対する）Tate 予想に他ならない．

以下の方法の多くが用いている久賀・佐武構成は，K3 曲面にアーベル多様体を対応させるものであり，4 節で詳述する．

- Artin–Swinnerton-Dyer [ASD73, Theorem 5.2]：有限体上の，セクションつき楕円 K3 曲面の場合（つまり，$f\colon X \to \mathbb{P}^1$ と $s\colon \mathbb{P}^1 \to X$ であって $fs = 1$ かつ f の一般ファイバーが楕円曲線であるものが存在する場合）に証明．標数は任意．
  方針：反例となる $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l(1))$ の元が存在したとすると，そこから $H^2(\mathbb{P}^1, A[l^n])$ の元が作れて（A は f が定める $\mathbb{P}^1$ 上の「楕円曲線」），そこから A の等質空間 X_n であって次数が相異なるものが作れるが，一方でそのような等質空間が有限個しかないことが示せて矛盾する．
- Artin [Art74, Theorem 1.7]：supersingular な楕円 K3 曲面（前項と違い，セクションの存在を仮定しない）[*7]の場合に証明．方針：対応するセクションつき楕円曲面（これも K3 曲面になる）を考え，これも supersingular になることおよび Picard 数が一致することを示し，あとは前項と同様．
- Rudakov–Zink–Shafarevich [RZS82, Theorem 4]：標数 ≥ 5 で，次数 2 の準偏極をもつ supersingular な K3 曲面の場合に証明．
  方針：次数 2 の準偏極は，generic に $2:1$ な射 $X \to \mathbb{P}^2$ または楕円曲面構造 $X \to \mathbb{P}^1$ を与える．後者の場合は既に前項で示されている．前者のうち例外

[*7] ちなみに，$\rho \geq 5$ なる K3 曲面は楕円曲面構造をもつ．というのは，階数 5 以上の不定値格子は 0 を表現し，K3 曲面上の自己交点数 0 の因子は楕円曲面構造を誘導するからである．

曲線をもつ場合も楕円曲面構造が入るのでよい．例外曲線をもたない場合，つまり X が $\mathbb{P}^2$ の滑らかな二重被覆な場合を考える．この X を含む次数 2 の supersingular K3 曲面の一次元族を考えると，滑らかな二重被覆のモジュライはアフィンなので，そのモジュライの外へ退化するが，退化先も滑らかな supersingular K3 曲面であることを示す（すると，前述の議論より退化先では予想が成り立つ）．supersingular な K3 曲面の族において（幾何的）Picard 数が局所定数であること（Artin [Art74, Theorem 1.1]）[*8]から従う．

- Nygaard [Nyg83]：有限体上で $h = 1$（このことを ordinary ともいう）の場合に証明．標数は任意．標数 0 への canonical lifting（これは $h = 1$ のときにのみ存在する）を用いる．これの説明は省略するが，ポイントは，X の canonical lifting $X_{\mathbb{C}}$ の久賀・佐武アーベル多様体 $A_{\mathbb{C}}$ はその還元 A_0 の canonical lifting になっていて，とくに $\mathrm{End}^0(A_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}^0(A_0)$ が同型になっていることである（$\mathrm{End}^0(A)$ は $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を表す）．A_0 のフロベニウスに対応する $A_{\mathbb{C}}$ の自己同型を σ_A と書き，「σ_A による共役」という自己同型が埋め込み $PH^2(X_{\mathbb{C}})(1) \cong \bigwedge^{20} PH^2(X_{\mathbb{C}})(1) \hookrightarrow C^+(PH^2(X_{\mathbb{C}})(1)) \cong \mathrm{End}^0_{C^+} H^1(A_{\mathbb{C}})$ を介して $PH^2(X_{\mathbb{C}})(1)$ に定める自己同型を $\sigma_{X_{\mathbb{C}}}$ と書くと，これは X のフロベニウスが $PH^2(X)(1)$ に定める自己同型に対応する（以下エタールコホモロジーの係数 $\mathbb{Q}_l$ は省略し，$\mathrm{End}^0(A)$ などへの $\otimes\mathbb{Q}_l$ も省略する）．なお Clifford 代数 $C^+(\dots)$ については 4.1 節を参照せよ．

  さて，$\mathrm{NS}(X) \to PH^2(X)^{\sigma}$ が全射であることを示したい．$\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}}) \to PH^2(X_{\mathbb{C}})^{\sigma_{X_{\mathbb{C}}}}$ が全射であることを示せばよい．Lefschetz (1,1) 定理があるので，終域の元が Hodge であることを示せばよい．$(\mathrm{End}^0_{C^+} H^1(A_{\mathbb{C}}))^{\sigma_A}$ がそうであることを示せばよい．$(\mathrm{End}^0 H^1(A_{\mathbb{C}}))^{\sigma_A}$ がそうであることを示せばよい．アーベル多様体に対する Tate 予想から，$\mathrm{End}^0(A_0) \to (\mathrm{End}^0 H^1(A_0))^{\sigma}$ は全射であり，これと $\mathrm{End}^0(A_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}^0(A_0)$ の全射性（canonical lifting）と $(\mathrm{End}^0 H^1(A_{\mathbb{C}}))^{\sigma_A} \to (\mathrm{End}^0 H^1(A_0))^{\sigma}$ の単射性より $\mathrm{End}^0(A_{\mathbb{C}}) \to (\mathrm{End}^0 H^1(A_{\mathbb{C}}))^{\sigma_A}$ も全射であり，とくに $(\mathrm{End}^0 H^1(A_{\mathbb{C}}))^{\sigma_A}$ の元は Hodge である．
- Nygaard–Ogus [NO85]：有限体上で $p \geq 5$ で $h < \infty$ の場合に証明．前項で用

[*8] Picard 数が jump しないというのは一見奇妙だが，Tate 予想を仮定すれば，supersingular ならば Picard 数は必ず 22（最大値）なのであまり不思議はない．なお Picard 群自体は大きくなることがあり，この大きさで supersingular K3 曲面を分類できる（Artin 不変量 $\in \{1, \dots, 10\}$）．

いた canonical lifting を弱めた概念である quasi-canonical lifting を用いる．前項と同様に，$PH^2(X_{\mathbb{C}})(1)$ の適切な部分空間に $\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})$ が全射することに帰着させる．
（supersingular の場合は，（Tate 予想を仮定すれば，Picard 数の関係で）$\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{NS}(X)$ が同型（全射）になりえないので，この方針ではうまくいかなそうである．4 節の最後の記述も参照せよ．）

かくして，$p \geq 5$ では，supersingular（で楕円でもなく次数 2 でもないもの）の場合を除いては 1980 年代に既に解決されていた．なお前述のように supersingular な K3 曲面のモジュライ空間は 9 次元であり，一方代数的 K3 曲面は 19 次元あるので，ほとんどの K3 曲面に対して解決されていたともいえる．

残った supersingular の場合は最近になって数人により独立に異なる方法で解決された．Benoist のサーベイ [Ben15] も参照せよ（ただし，[Cha13] の Erratum，[Cha16]，[KMP16] が出る前に書かれたものである）．

- Maulik [Mau14]（arXiv 2012 年 3 月）：$p > 2d + 4$ を満たす次数 $2d$ の偏極が存在するという仮定の下で，supersingular な場合に証明．
  方針を述べる．前述のように supersingular な K3 曲面のモジュライ空間上で（幾何的）Picard 数が局所定数であり（Artin [Art74, Theorem 1.1]），楕円 K3 曲面については Tate 予想が成り立つ（Artin–Swinnerton-Dyer：上記）ことから，supersingular な K3 曲面のモジュライ空間の各連結成分に楕円 K3 曲面が存在することをいえばよい．
  このために，Hodge 束（の正整数倍）に線形同値で，楕円 K3 曲面に対応する部分空間[*9]上に台をもつ因子をモジュライ空間上に構成し（これには保型形式に関する Borcherds の結果を用いる），また Hodge 束が正標数側でも ample になることを証明する（このために久賀・佐武写像が quasi-finite になることを示す）．一方で supersingular な（準偏極つき）K3 曲面のモジュライ空間の各連結成分が完備曲線を含むことを示すのだが，このために半安定還元を証明する必要があり，ここで $p > 2d + 4$ という仮定を用いる．ここ以外では p は $2d$ を割らないという仮定で十分である．
- Charles [Cha13]（arXiv 2012 年 6 月）：$p \geq 5$ で supersingular な場合に証

[*9] 余次元 1 の閉部分空間可算無限個の合併になる．

明．手法は前項の Maulik のものに近い．

複素 K3 曲面のある種の一般化である irreducible holomorphic symplectic 多様体（以下 IHS とよぶ）というものがある．例として K3 曲面 X の n 点の Hilbert スキーム $X^{[n]}$ がある[*10]．まず IHS の正標数還元（これも以下 IHS とよぶ）であって，次元が p より小さく，p と素な次数の偏極をもつものに対して，（因子に対する）Tate 予想を証明する．その上で，K3 曲面 X の Tate 予想を $X^{[2]}$ に関するそれに帰着するのだが，このときに $X^{[2]}$ の偏極で次数が p と素なものを構成できるので，X の偏極の次数に関する仮定を回避できる ($p \geq 5$ で十分になる)．

(X, L) を次数が p と素な偏極つき IHS とする．height 有限のときは [NO85] と全く同様にできるので，以下 supersingular と仮定する．(X, L) の普遍変形の代数化 $\mathcal{X} \to T$ をとる．T 上の久賀・佐武写像 $\kappa \colon T \to \mathcal{A}_{g,d',n}$（Maulik が示したように quasi-finite である，ここで偏極の次数が p と素であることを用いる）の像の閉包の正規化として部分コンパクト化 $T \subset \overline{T}$ を定める．（この $\overline{T}$ が [Mau14] におけるモジュライ空間内の完備曲線の役割を果たす．）したがって久賀・佐武写像は $\overline{T}$ 上の有限射 $\overline{\kappa}$ に延長される．$\overline{T}$ 上には IHS の族は（おそらく）伸びないが，T_k 上の IHS の H^2_{crys} の定める K3 クリスタルは $\overline{T}_k$ 上に伸びるというのがポイントである (Kisin [Kis10] の結果，ここでも偏極の次数が p と素であるという仮定を用いる，なお K3 クリスタルの定義は [Ogu79] を参照)．

アーベル多様体のモジュライの中で supersingular 部分が射影的であることから，その逆像も射影的である．これを $\overline{T}$ の “supersingular 部分” とよぶことにする．（これは T 上では IHS が通常の意味で supersingular である部分と一致する．）Maulik でも用いられた Borcherds の結果を何度も用いて，$\overline{T}$ の supersingular 部分の各連結成分に Picard 数（正確には，K3 クリスタルの代数的部分の次元）が高い点が存在することを示し，また Picard 数が局所定数であることを示すことで，Tate 予想が従う．

(Benoist のサーベイ [Ben15] での説明は証明の終盤の方針が異なっている．

[*10] K3 曲面 X 上の固定された不変量をもつ連接層のモジュライ空間も（ある条件下で）IHS になり，これは $X^{[n]}$ と変形同値である．これと，アーベル曲面 A の $n+1$ 点の Hilbert スキーム $A^{[n+1]}$ の「和が 0」なる部分空間（$n = 1$ のときこれは Kummer 曲面である）とが IHS の典型的な例で，これらと変形同値でない例は少ししか知られていない（O’Grady の 6 次元と 10 次元の例のみ？）．

論文著者とサーベイ著者の議論を経てサーベイが書かれてから，Erratum が出るまでの間に改良が行われたということだろうか.）

- Madapusi Pera [MP15]（arXiv 2013 年 1 月）：$p \geq 3$ の場合に，height によらない証明．標数正の有限生成体の場合もカバーする．直交群の志村多様体の整正準モデル（Kisin [Kis10] の結果の一般化）を介して，久賀・佐武アーベル多様体の special endomorphism に関する Tate 予想に帰着する．本稿で詳細を述べる．

  Kim–Madapusi Pera [KMP16]（arXiv 2015 年 12 月）により $p = 2$ の場合にも整正準モデルが構成され，ここから Tate 予想の $p = 2$ の場合も従った．（Tate 予想を示す部分は，整正準モデルの特徴づけがやや異なるための調整を除いては $p \geq 3$ とほぼ同様）．
- Charles [Cha16]（arXiv 2014 年 7 月）：有限体上で，(1) $p \geq 5$，または (2) Picard 数が 2 以上，の場合に証明（後者は $p = 2$ でもよい！）．height には依存しない．

  [Tat66] や [ASD73] と似た方針である（作るものは異なるが）．すなわち，X に対する Tate 予想の反例となる元があると仮定し，そこからある性質を満たす可算無限個の k 上の K3 曲面 X_n を作り，一方でその性質を満たす k 上の K3 曲面が有限個しか存在しないことを示す．性質はややこしいのでここでは述べない．X_n は X 上の（固定された不変量をもつ，安定な，twisted な）連接層のモジュライ空間として構成される．有限性は，そのような K3 曲面 Y の（今度は twisted でない）連接層のモジュライ空間として 4 次元 IHS を作り，IHS（の双有理同値類）に関する有限性を用いて $\mathrm{NS}(Y_{\overline{k}})$ の有限性を示し，すると Y は固定された次元の射影空間に固定された値以下の次数で埋め込めることが分かり従う．IHS の有限性には久賀・佐武写像（の準有限性）を用いる．なお Picard 数が 2 以上の場合の証明は（IHS を経由せずに有限性を示すことができるため）K3 曲面のモジュライ空間や久賀・佐武を必要としないというのが特徴である．ところで，Tate 予想が正しければ，（幾何的）Picard 数が偶数（とくに 2 以上）になることが直ちに従うが，Tate 予想を用いずにこれを示す方法はおそらく知られていない．

  ちなみに K3 曲面の有限性と Tate 予想との関連については，$p \geq 5$ のとき，$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の任意の K3 曲面に対する Tate 予想が成り立つことと，各 $\mathbb{F}_{p^r}$ 上で K3 曲面の同型類が有限個しかないことが同値であることが知られていた（[LMS14]）．

supersingular な場合が最近解決されたことの背景には，（標数 0 と限らない）K3 曲面の久賀・佐武写像に対する理解が進んだこと（Rizov [Riz10] など）があるのかもしれない．

なお正標数から離れるが，代数体上の K3 曲面の Tate 予想については André [And96, Theorem 1.6.1] により解決されている．久賀・佐武アーベル多様体 A に対する Tate 予想を適用すると $\mathrm{End}(A)$ の元の線形結合で書けて，Betti で見ると $\mathrm{End}(A)$ の元は Hodge 類なので，Lefschetz (1,1) を適用すればよい．

3 直交群 $\mathrm{SO}(2,n)$ の志村多様体と K3 曲面の周期写像

3.1 $\mathrm{SO}(2,n)$ の志村多様体

L を符号 $(+2,-n)$，$n \geq 1$，なる非退化な格子とし，$\mathrm{SO}(L_{\mathbb{Q}})$ および $\mathrm{GSpin}(L_{\mathbb{Q}})$ の志村多様体を考える（GSpin の定義は 4 節参照）．

その前にいくつか概念を導入しておく．格子 L に対し，その $\mathbb{Z}$ 加群としての双対 $\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z})$ を $\check{L}$ と書く．加群の射 $L \to \check{L}$ が双線形形式から定まる．L が非退化であることとこの射が単射であることが同値である．そのとき $\check{L}/L$ は有限群であり，これを $\mathrm{disc}(L)$ と書く．L への群作用は $\mathrm{disc}(L)$ への作用を誘導する．

$G_L = \mathrm{SO}(L_{\mathbb{Q}})$ とし，

$$X_L = \{\text{ 有向正定値 2 次元部分空間 } \subset L_{\mathbb{R}}\}$$

とおく．この X_L は集合

$$\{\omega \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid \omega \cdot \omega = 0,\ \omega \cdot \bar{\omega} > 0\}$$

と自然に同一視できる（$W \subset L_{\mathbb{R}}$ に対し，W の正規直交基底 e_1, e_2 を向きに合うようにより，$\langle e_1 + ie_2 \rangle$ を対応させる）．2 つめの表示からも分かるように，X_L に複素構造が入る．また X_L は $\mathrm{SO}(2,n)/(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n))$ とも書ける．X_L は 2 つの連結成分からなる．(G_L, X_L) は志村データになる．$\mathrm{Sh}(L) = \mathrm{Sh}(G_L, X_L)$ とおく．

レベルとして，$G_L(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト部分群

$$K_L = \{g \in \mathrm{SO}(L)(\hat{\mathbb{Z}}) \mid g \text{ は } \mathrm{disc}(L) \text{ に自明に作用する }\}$$

をとる．これを discriminant kernel とよぶ．L が双曲平面 U を含むならば $\mathrm{Sh}_{K_L}(\mathbb{C}) = G_L(\mathbb{Q})\backslash(X_L \times G_L(\mathbb{A}_f)/K_L)$ は strong approximation により $\Gamma_L\backslash X_L$

に同型になり，連結である．ここで

$$\Gamma_L = \{g \in \mathrm{SO}(L)(\mathbb{Z}) \mid g \text{ は } \mathrm{disc}(L) \text{ に自明に作用する }\}$$

でありこれも discriminant kernel とよぶ．

本稿では主に L が後述の L_{2d} の場合を扱うことになる．このとき L は U を含み，また $\mathrm{disc}(L)$ は $\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}$ に同型である．

K_L の十分小さいコンパクト開部分群 K に対し，$\mathrm{Sh}_K(L)$ は滑らか準射影的なスキームになり，また $\mathbb{Q}$ 上の正準モデル $\mathrm{Sh}_K(L)_{\mathbb{Q}}$ をもつ．

また，直交群 $\mathrm{SO}(L_{\mathbb{Q}})$ の代わりに $\mathrm{GSpin}(L_{\mathbb{Q}})$ についても同様の構成ができる．これを $\widetilde{\mathrm{Sh}}(L) = \mathrm{Sh}(\mathrm{GSpin}(L_{\mathbb{Q}}), X_L)$ と書く．

3.2 偏極つき K3 曲面の周期写像

もともとは，複素多様体（例えば曲線やアーベル多様体や K3 曲面）に対し，その Hodge 構造のことを周期とよび[*11]，これにより定まる多様体のモジュライ空間から周期領域への写像のことを周期写像とよぶのだった．K3 曲面の場合には，周期領域を志村多様体の $\mathbb{C}$ 値点の集合とみなすことができ，この解釈を用いて周期写像を $\mathbb{C}$ 上から $\mathbb{Q}$ 上に降下させ，さらに $\mathbb{Z}$ 上に伸ばすことができる．

本小節では周期写像 $\iota_{\mathbb{Q}}\colon \widetilde{M}_{2d,\mathbb{Q}} \to \mathrm{Sh}_{K_{L_{2d}}}(L_{2d})_{\mathbb{Q}}$ を構成する（$\widetilde{M}_{2d}$ は M_{2d} のある 2 重被覆）．次小節でこの射を $\mathbb{Z}$ 上に延長する．

まず $\mathbb{C}$ 値点の場合をみる．

$(X,\xi) \in M_{2d}(\mathbb{C})$ が与えられたとし，これに対し $\mathrm{Sh}_{K_{L_{2d}}}(L_{2d})(\mathbb{C}) = \Gamma_{L_{2d}}\backslash X_{L_{2d}}$ の点を対応させることを考える．等長同型 $\phi\colon H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L_{\mathrm{K3}}$ であって ξ を $e+df$ に写すものをとる．ϕ は等長同型 $\phi\colon PH^2((X,\xi),\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L_{2d}$ を誘導する．左辺 $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ の部分空間 $W = (H^{2,0} \oplus H^{0,2}) \cap PH^2((X,\xi),\mathbb{R})$ の像 $\phi_{\mathbb{R}}(W)$ は $L_{2d} \otimes \mathbb{R}$ の有向正定値 2 次元部分空間なので（向きは W の Hodge 構造から誘導される），$\phi_{\mathbb{R}}(W)$ は $X_{L_{2d}}$ の点を定める．（$\mathbb{P}((L_{2d})_{\mathbb{C}})$ の部分空間としての $X_{L_{2d}}$ の表示では，$\phi_{\mathbb{C}}(H^{2,0})$ を対応させる．）ϕ のとり方の自由度は，$e+df$ を固定する元からなる $\mathrm{O}(L_{\mathrm{K3}})$ の部分群の分だけある．ここで O ではなく SO だったならばこの部分群は

[*11] ちなみになぜ「周期 (period)」という名前かというと，古典的である楕円曲線の場合に，$H^1(X,\Omega^1)$ の基底 ω と $H_1(X,\mathbb{Z})$ の基底 γ_1,γ_2 をとると Hodge 構造は $(\int_{\gamma_i}\omega)$（の同値類）で定まるが，この 2 数は対応する二重周期関数（楕円関数）の周期の基底に他ならない．ということだと思います．

$\Gamma_{L_{2d}}$ に一致することに注意する．そこで 2 重被覆 $\widetilde{M}_{2d,\mathbb{C}} \to M_{2d,\mathbb{C}}$ を，等長同型 $\beta\colon \det PH^2((X,\xi),\mathbb{Z}) \to \det L_{2d}$ をパラメトライズするものとしてとる[*12]．そして ϕ を $\det(\phi|_{PH^2})$ が β に一致するようにとることにすると，ϕ の自由度は $e+df$ を固定する元からなる $\mathrm{SO}(L_{\mathrm{K3}})$ の部分群，すなわち $\Gamma_{L_{2d}}$ の分だけあることになり，めでたく $\Gamma_{L_{2d}}\backslash X_{L_{2d}}$ の点が定まった．

この構成は $\mathbb{C}$ 値点しか見ていないが，適切に書き直すことで，$\mathbb{C}$ 上の周期写像 $\iota_{\mathbb{C}}\colon \widetilde{M}_{2d,\mathbb{C}} \to \mathrm{Sh}_{K_{L_{2d}}}(L_{2d})_{\mathbb{C}}$ が得られる．

（終域の定義で SO ではなく O の方を用いて，$M_{2d,\mathbb{C}}$ 上で周期写像を定義する方法もまた一般的である．）

$\iota_{\mathbb{C}}$ の $\widetilde{M}^{\circ}_{2d,\mathbb{C}}$ への制限は開埋め込みでありとくに単射であるが全射ではない．開埋め込みなのは偏極つき Torelli 型定理（命題 2.18）ほぼそのままである．一方，$\iota_{\mathbb{C}}$ 自身は単射ではないがエタールであり全射である．

次にこれを $\mathbb{Q}$ 上の射 $\iota_{\mathbb{Q}}\colon \widetilde{M}_{2d,\mathbb{Q}} \to \mathrm{Sh}_{K_{L_{2d}}}(L_{2d})_{\mathbb{Q}}$ に降下させたいわけだが，[MP15, Corollary 5.4] にあるように，$\iota_{\mathbb{C}}$ が任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ と交換することを各点での Hodge 構造で確かめればよい．あるいは，Rizov [Riz10, Theorem 3.9.1] のように CM 点を用いて確かめる方法がある．

ただし $\widetilde{M}_{2d,\mathbb{Q}} \to M_{2d,\mathbb{Q}}$ の定義においては Betti 実現は使えないので，代わりに l 進実現を用いる：l が可逆な各点 (X,ξ) に $PH^2_{\text{ét}}((X_{\overline{k}},\xi),\mathbb{Z}_l)$ を対応させる l 進層を $\mathbb{P}^2_l$ と書くことにして，$\det \mathbb{P}^2_l$ から定数層 $\underline{\det L_{2d} \otimes \mathbb{Z}_l}$ への等長同型をパラメトライズする 2 重被覆として定義する（どの l でも同じになること，また $\mathbb{C}$ 上では Betti でやるのと同じになることが確かめられる）．$\widetilde{M}_{2d} \to M_{2d}$ も同様に定義する．

さて $\mathbb{Q}$ 上で周期写像ができたわけだが，これを $\mathbb{Z}$ 上まで延長したい．そのためには，（モジュライの方はもともと $\mathbb{Z}$ 上定義されているが）志村多様体の方の整モデルを構成する必要がある．

3.3 $\mathrm{SO}(2,n)$ の志村多様体の整正準モデル

とりあえず $p>2$ とする（$p=2$ の場合は後述する）．

[MP16] では L_{2d} に限らず，符号 $(+2,-n)$ をもつもう少し一般の格子に対する志村多様体の整正準モデルを扱っている（しかもそれが K3 曲面の Tate 予想の証明の

[*12] 正確に書くと，$M_{2d,\mathbb{C}}$ の各点で $PH^2((X,\xi),\mathbb{Z})$ を与える局所系を $\mathbb{P}^2_{\mathrm{B}}$ とおき，$\det \mathbb{P}^2_{\mathrm{B}}$ から定数局所系 $\underline{\det L_{2d}}$ への等長同型をパラメトライズする 2 重被覆を考える．

ために必要である）が，簡単のため $L = L_{2d}$ について記述する．以下正準モデルの記号から $\mathbb{Q}$ を省略する．

discriminant kernel K_L の p 部分を $K_{L,p}$ と書く．p の外のレベルについて極限をとった $\mathrm{Sh}_{K_{L,p}} = \varprojlim_{K^p} \mathrm{Sh}_{K_{L,p}K^p}(L)$ の**整正準モデル**を考える．ここで整正準モデルとは，$G_L(\mathbb{A}_f^p)$ 作用つきの良い $\mathbb{Z}_{(p)}$ スキーム $\mathcal{S}$ で，生成ファイバー $\mathcal{S} \otimes \mathbb{Q}$ は $\mathrm{Sh}_{K_{L,p}}$ と作用込みで同型になり，さらに extension property を満たすものである．extension property とは，良い $\mathbb{Z}_{(p)}$ スキーム T に対して $\mathrm{Hom}(T, \mathcal{S}) \to \mathrm{Hom}(T \otimes \mathbb{Q}, \mathrm{Sh}_{K_{L,p}})$ が全単射になるという性質である．ここで "良い" スキームとして何を採用するかが場合により異なる．

p が $2d$ を割らない場合（一般に L が p で自己双対，つまり $L \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が非退化な場合）は，$\mathrm{GSpin}(L)(\mathbb{A}_f)$ が hyperspecial な極大コンパクト部分群をもつので，Kisin の結果（[Kis10, Theorem 2.3.8]，[清水] 参照）から，$\mathrm{GSpin}(L_{\mathbb{Q}})$ の志村多様体 $\widetilde{\mathrm{Sh}}(L)$ の整正準モデル $\widetilde{\mathcal{S}}_p(L)$ の存在が従う（ここでは "良い" スキームとして正則かつ $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上 formally smooth なものを採用している）．その有限エタール商として $\mathrm{SO}(L_{\mathbb{Q}})$ の志村多様体 $\mathrm{Sh}(L)$ の整正準モデル $\mathcal{S}_p(L)$ を構成できる．

p が $2d$ を割る場合にはこれをそのまま適用することができないので，次の Madapusi Pera [MP16] の方法を用いる：L を符号 $(+2, -n')$ かつ p で自己双対な格子 L' に埋め込んで，Kisin の方法で得られる $\mathrm{GSpin}(L'_{\mathbb{Q}})$ (resp. $\mathrm{SO}(L'_{\mathbb{Q}})$) の整正準モデルの適切な部分スキームの中で $\widetilde{\mathrm{Sh}}(L)$ (resp. $\mathrm{Sh}(L)$) の Zariski 閉包をとって $\mathrm{GSpin}(L_{\mathbb{Q}})$ (resp. $\mathrm{SO}(L_{\mathbb{Q}})$) の志村多様体の整正準モデル $\widetilde{\mathcal{S}}_p(L)$ (resp. $\mathcal{S}_p(L)$) を得る．すると有限エタール射 $\widetilde{\mathcal{S}}_p(L) \to \mathcal{S}_p(L)$ を得る．これらは L' のとり方によらない．

ただし $\mathrm{ord}_p(d) = 1$ のときには extension property の定義が Kisin の場合と異なり，"良い" スキームとして正則 locally healthy スキームを採用する[*13]．なぜこのようにするかというと，M_{2d} 上に周期写像を与えたいのだが，T に formally smooth を要請したのでは M_{2d}^{sm} までしか伸びない（$\mathrm{ord}_p(d) = 1$ のとき $M_{2d} \setminus M_{2d}^{\mathrm{sm}}$ が空でないかもしれない）からである．

p の外でのレベル K^p に対し $\mathcal{S}_K(L)_{(p)} := \mathcal{S}_p(L)/K^p$ としこれを $\mathrm{Sh}_K(L)$ の整正

[*13] Y が locally healthy とは，余次元 ≥ 2 の任意の点 y での完備局所環 $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ が quasi-healthy であること．局所環 $(R, \mathfrak{m})$ が quasi-healthy とは，正則で $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上忠実平坦であり，$\mathrm{Spec}\, R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ 上の任意のアーベルスキームが $\mathrm{Spec}\, R$ 上に延長できること．formally smooth ならば locally healthy である．（[MP16, Definition 2.12, Remark 2.13]）

準モデル[*14]とよぶ（$K = K_{L,p}K^p$）．商はスタックとしてとる．

各 $p \neq 2$ に対する $\mathcal{S}_{K_L}(L)_{(p)}$ を貼り合わせて得られる $\mathbb{Z}[1/2]$ 上のモデルを $\mathcal{S}(L)$ とおく．

$M_{2d,\mathbb{Z}_{(p)}}$ が locally healthy（$\mathrm{ord}_p(d) = 1$ のとき），smooth（それ以外のとき）なので，extension property から，$\iota_{\mathbb{Q}}\colon \widetilde{M}_{2d,\mathbb{Q}} \to \mathrm{Sh}(L)$ が $\iota\colon \widetilde{M}_{2d,\mathbb{Z}[1/2]} \to \mathcal{S}(L)$ に延長される．

定理 3.1（[MP15, Theorem 5.8]） この $\iota\colon \widetilde{M}_{2d,\mathbb{Z}[1/2]} \to \mathcal{S}(L)$ はエタールである．

もちろん標数 0 では既知なので，正標数の側が問題である．これの証明の肝となるのは久賀・佐武構成のクリスタリン実現との（整係数での！）整合性を主張する次の命題である．これは $\otimes\mathbb{Q}$ したクリスタリン実現についての結果 [Ogu84, Section 7] を改良するものである．

命題 3.2（[MP15, Proposition 5.11]） $M_{2d,\mathbb{Q}}$ 上の可積分接続付きベクトル束の等長同型 $\alpha_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}\colon \iota^*\mathbb{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}(-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2_{\mathrm{dR}}|_{M_{2d,\mathbb{Q}}}$ が，$\widetilde{M}_{2d}$ 上のそれの等長同型 $\alpha_{\mathrm{dR}}\colon \iota^*\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}(-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2_{\mathrm{dR}}$ に延長され，$\iota^*F^1\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}(-1)$ を $F^2\mathbb{P}^2_{\mathrm{dR}}$ に写す．

ここで $\mathbb{P}^2_{\mathrm{dR}}$ は M_{2d} 上の普遍対象の相対ドラームコホモロジーであり，$\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}$ は $\mathbb{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}$ の標準的な延長であり（構成は [MP16, Sections 4,7]），$\mathbb{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{L}_{\mathrm{B}}$ から定まる解析的ベクトル束の標準的な代数化 $\mathbb{L}_{\mathrm{dR},\mathbb{C}}$ の $\mathbb{Q}$ への標準的な降下であり，$\mathbb{L}_{\mathrm{B}}$ は $\mathrm{Sh}_{K_L}(L)(\mathbb{C}) = \Gamma_L\backslash X_L$ 上で $\Gamma_L \curvearrowright L$ の定める局所系である．$F^2\mathbb{P}^2_{\mathrm{dR}}$ と $F^1\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}$ は（$\mathbb{C}$ 上では）それぞれ $H^{2,0} \subset PH^2((X,\xi),\mathbb{C})$ と $\omega \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ に対応する 1 次元 isotropic 部分空間である．

これを用いて点 $s \in \widetilde{M}_{2d}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 上で ι が誘導する接空間の射を記述すると，

$$\{\mathbb{P}^2_{\mathrm{dR},s} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p[\varepsilon] \text{ の 1 次元 isotropic 部分空間で } F^2\mathbb{P}^2_{\mathrm{dR},s} \text{ を持ち上げるもの}\}$$

上の恒等写像になることが分かり，定理 3.1 が従う．

$p = 2$ の場合については，[KMP16, Section 4] で，正則 formally smooth スキームに対する extension property を課した整正準モデルが構成された．したがって周期写像 $\iota_{\mathbb{Q}}\colon \widetilde{M}_{2d,\mathbb{Q}} \to \mathrm{Sh}(L)$ が $\iota\colon \widetilde{M}^{\mathrm{sm}}_{2d,\mathbb{Z}_{(2)}} \to \mathcal{S}_{K_L}(L)_{(2)}$ に延長される．（$p > 2$ では，特異点がある（かもしれない）$\mathrm{ord}_p(d) = 1$ の場合に正則 locally healthy スキー

[*14] こちらのモデルが extension property を満たすのかはよく知らない．

ムに対する extension property を課した整正準モデルを用いることで周期写像を $M_{2d,\mathbb{Z}_{(p)}}$ 全体に伸ばしたが，ここではそうしていないことに注意する.）Tate 予想の証明でこの穴をどう回避するかは後述する.

なお伊藤–伊藤–越川 [IIK18, Remarks 6.9, 6.10] によると，[KMP16, Proposition A.12] による定理 3.1 および命題 3.2 の対応物の証明にはギャップがあり，Scholze [Sch13] と Bhatt–Morrow–Scholze [BMS18] の比較同型を用いてギャップを修正できる.

4 久賀・佐武構成

K3 曲面に対し，それと密接に関係するアーベル多様体を与えるのが久賀・佐武構成である.

4.1 Clifford 代数と Clifford 群

準備として，格子 V に対する Clifford 代数 $C(V)$ および Clifford 群 $\mathrm{GSpin}(V)$ を定義する.

R を可換環とし[*15]，$V = (V, q)$ を R 上の格子とする（すなわち，$v^2 \in R$ のことを $q(v)$ と書く）．V に対する Clifford 代数 $C(V)$ を，テンソル代数 $\bigoplus_{m \geq 0} V^{\otimes m}$ のイデアル $\langle v \otimes v - q(v) \mid v \in V \rangle$ による商として定義する．定義から容易に分かるように，$v, w \in V$ に対し $v \otimes w + w \otimes v = q(v + w) - q(v) - q(w)$ が成り立つ．このことから，$v_1, \ldots, v_n$ が V の基底であるとき $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}$（$m \geq 0$，$i_1 < \cdots < i_m$）が R 加群 $C(V)$ の基底をなすことが分かる．とくに，V が階数 n の自由加群ならば $C(V)$ は階数 2^n の自由加群になる．以下では $C(V)$ の元の演算において $\otimes$ を省略する．なお，$q = 0$ のとき $C(V)$ は外積代数に他ならない.

テンソル代数の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数構造（V の元を次数 1 とみる）は $C(V)$ に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数構造を誘導する．$C(V)$ の 0 次（偶数次）部分を $C^+(V)$ と書く.

群 $\mathrm{GSpin}(V) := \{g \in C^+(V)^* \mid gVg^{-1} = V\}$ を Clifford 群とよぶ．共役作用が射 $\mathrm{GSpin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$ を定める[*16]．R が標数 $\neq 2$ の体で q が非退化のときは，

[*15] どこかで 2 が 0 や 0 因子でないことを仮定しないといけないかもしれない.

[*16] GSpin を $C^+(V)^*$ でなく $C(V)^*$ の方で定義する流儀もあるようだが，本稿では $C^+(V)^*$ の方にしておく．$C(V)^*$ の方で定義する場合は共役作用の射の終域は $\mathrm{SO}(V)$ ではなく $\mathrm{O}(V)$ になる.

$1 \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{GSpin}(V) \to \mathrm{SO}(V) \to 1$ が完全となる（q が非退化より $\mathrm{O}(V)$ は鏡映で生成されること（Cartan–Dieudonné の定理），$v \in V$（$q(v) \neq 0$）による鏡映の -1 倍が $v \in C(V)^*$ による共役で与えられることなどから従う）．

$C(V)$ の反対合 $*$ を，$v_i \in V$ に対し $(v_1 \cdots v_n)^* = v_n \cdots v_1$ とすることで定める．すると $g \in \mathrm{GSpin}(V)$ に対しては $N(g) = gg^*$ はスカラーになる（Spin ノルム）．

4.2 久賀・佐武構成（$\mathbb{C}$ 値点で）

まず 1 つの Hodge 構造に対する久賀・佐武構成を見る．

復習として，階数有限の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 V の重さ n の Hodge 構造とは，Deligne トーラス $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の $V_{\mathbb{R}}$ への作用で $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{R}} \to \mathbb{S}\colon r \mapsto r^{-1}$ との合成が n 乗になるもののことであった．

V を，重さ 0 の Hodge 構造で，$h^{1,-1}, h^{0,0}, h^{-1,1}$ 以外が 0 で，$h^{1,-1} = h^{-1,1} = 1$ なるものとする．典型例として K3 曲面やアーベル曲面に対する $H^2(X,\mathbb{Z})(1)$ や $PH^2((X,\xi),\mathbb{Z})(1)$ などがある．

V 上の対称双線形形式 $-q$ が V の偏極であるとする．つまり，$q\colon V \times V \to \mathbb{Z}$ は Hodge 構造の射[*17]で，$V^{0,0} \cap V_{\mathbb{R}}$ 上負定値で $(V^{1,-1} \oplus V^{-1,1}) \cap V_{\mathbb{R}}$ 上正定値であるとする．Hodge 構造の射ということは，$\mathbb{S} \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$ の像は $\mathrm{SO}(V_{\mathbb{R}})$ に入る．典型例として，上記の $PH^2((X,\xi),\mathbb{Z})(1)$ に対しカップ積の定めるペアリング q がある．

命題 4.1 (1) $\mathbb{S} \to \mathrm{SO}(V_{\mathbb{R}})$ が $\rho\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GSpin}(V_{\mathbb{R}})$ にリフトする．

(2) 左乗算（共役ではなく！）の定める射 $\mathrm{GSpin}(V_{\mathbb{R}}) \to \mathrm{GL}(C(V_{\mathbb{R}}))$ と ρ を合成して得られる射 $\mathbb{S} \to \mathrm{GL}(C(V_{\mathbb{R}}))$ は，$C(V)$ に偏極可能な Hodge 構造を定める．この Hodge 構造が重さ 1 になるようなリフトが一意に存在する．

証明 リフトの構成と偏極の構成だけ述べる．$(V^{1,-1} \oplus V^{-1,1}) \cap V_{\mathbb{R}}$ の正規直交基底 e_1, e_2 を $e_1 + ie_2 \in V^{1,-1}$ となるようにとると $J = e_1 e_2$ は $J^2 = -1$ を満たす．$x + yi \in \mathbb{C}^* = \mathbb{S}(\mathbb{R})$ を $x - yJ \in \mathrm{GSpin}(V_{\mathbb{R}})(\mathbb{R})$ に写す[*18]．

偏極を定める．$q(f_i, f_i) > 0$，$q(f_1, f_2) = 0$ なる $f_1, f_2 \in V$ をとり，$\delta = f_1 f_2 \in C(V)^*$ とする．（すると $\delta^* = -\delta$ となる．）$\psi = \psi_\delta\colon C(V) \times C(V) \to R$ を $\psi(x,y) =$

[*17] 正確に言うと，q の誘導する射 $V \otimes V \to \mathbb{Z}$ が Hodge 構造の射．

[*18] 符号が間違っていたらすみません．$V^{p,q}$ に z が $z^{-p}\bar{z}^{-q}$ で作用するという [Mil05] の convention を使っています．

$\mathrm{tr}(x\delta y^*)$ により定める．必要なら符号を変えることで $\psi(x, \rho(i)\bar{y})$ が正定値になる．$g \in \mathrm{GSpin}(V)$ に対し $\psi(gx, gy) = N(g)\psi(x, y)$ が分かる． □

定義 4.2 重さ 1 の Hodge 構造 $C(V)$ に対応するアーベル多様体を，V に対する**久賀・佐武アーベル多様体**とよぶ．V が K3 曲面 X から定まっている場合は，X の久賀・佐武アーベル多様体ともいう．

$C(V)$ は右乗算により Hodge 構造 $C(V)$ に作用するので，久賀・佐武アーベル多様体に対しては左から作用する．

注意 4.3 加群として $V \subset C(V)$ だが，部分 Hodge 構造ではない．

注意 4.4 実は $C(V)$ ではなくその偶数次部分 $C^+(V)$ を用いて定義する方が主流だが，ここでは [Cha13] や [MP15] の流儀に従った（[MP15] がこちらを採用しているのは定理 4.5(2) を自然に見せるためで，[Cha13] も同様）．$\mathbb{Q}$-Hodge 構造としては $C(V) = C^+(V)^{\oplus 2}$ であり，つまりアーベル多様体の方でいうと前者は後者 2 つの直積に同種なので，大差はない（応用上，久賀・佐武アーベル多様体は up to 同種で分かれば十分なことが多い）．なお容易に計算できるように，V に対する久賀・佐武アーベル多様体の次元は $2^{\mathrm{rank}\, V - 1}$ であり，C^+ を用いる場合はこの半分である．

4.3 久賀・佐武構成（族で）

元来の（[KS67] の）久賀・佐武構成はこのように超越的な（代数的には見えない）ものであり，代数体や正標数の体へそのまま適用することはできず，また単一の K3 曲面にのみ適用されるものであった．しかし既に [Del72] では $\mathbb{C}$ 上の族に対する構成が扱われており，また有限体上の K3 曲面に対しては，標数 0 の K3 曲面に持ち上げて標数 0 のアーベル多様体を作り，それを正標数に還元することで有限体上のアーベル多様体を得るという手法が用いられている（これを用いて K3 曲面に対する Weil 予想がアーベル多様体の場合に帰着されて示された）．

ここでは久賀・佐武構成を志村多様体の言葉で記述する．これにより混標数の K3 曲面の族に対しても久賀・佐武構成が適用できるようになる．

L を 3.1 節の格子とし，$V = L_{\mathbb{Q}}$ とおく．

$\mathrm{GSpin}(V)$ の表現 $C(V)$ を H と書く．$H_{\mathbb{C}}$ の Lagrangian 部分空間（つまり，次

元が $(1/2)\dim H$ なる isotropic 部分空間）であって $i\psi(x,\bar{y})$ の制限が定値になるものの集合を $X(\psi)$ とおく（ψ は命題 4.1 で定義したもの）．$(\mathrm{GSp}(H,\psi),X(\psi))$ は Siegel 型志村データであり，自然な射 $\mathrm{GSpin}(V)\to\mathrm{GSp}(H,\psi)$ が志村多様体の射を誘導する．

レベル $\widetilde{K}\subset\mathrm{GSpin}(L)(\hat{\mathbb{Z}})$ と $K\subset\mathrm{SO}(L)(\hat{\mathbb{Z}})$ を，$\widetilde{K}^p$ が十分小かつ $\widetilde{K}$ の像が K となるようとると，$\widetilde{\mathrm{Sh}}_{\widetilde{K}}(L)\to\mathrm{Sh}_K(L)$ は有限エタール Galois 被覆になる．Galois 群を $\widetilde{K}$ を用いて具体的に書けるが省略する．

$\mathrm{GSp}(H,\psi)$ の志村多様体上の普遍アーベルスキームを $\widetilde{\mathrm{Sh}}$ に引き戻すと，$\mathrm{Sh}_K(L)$ の点に対する久賀・佐武アーベル多様体は，その点の $\widetilde{\mathrm{Sh}}_{\widetilde{K}}(L)$ での逆像に乗っているアーベル多様体に他ならない．

このように言い直した上で整モデル上に延長し，周期写像と合成することにより，$\mathbb{Z}$ 上の任意のスキーム上の K3 曲面（ただし $p=2$ 上では M^{sm} に入っているものとする）に対し久賀・佐武構成が定義できるようになった．これをとくに正標数の体上の K3 曲面に対して適用すると次を得る．(3) が Tate 予想のためのキーとなる．

定理 4.5（[MP15, Theorem 5.17]） k を標数 $p>0$ の体とし，(X,ξ) を k 上の偏極つき K3 曲面とする．$p=2$ のときは，$(X,\xi)\in M^{\mathrm{sm}}_{2d}$ と仮定する．このとき有限次体拡大 k'/k が存在し，$C(L_{2d})$ 作用をもつ k' 上のアーベル多様体 A で次を満たすものが存在する．

(1) $\mathbb{Z}_l$ 加群として，

$$H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{k}},\mathbb{Z}_l)\xrightarrow{\sim}C(PH^2_{\text{ét}}((X_{\overline{k}},\xi),\mathbb{Z}_l(1)))$$

である．これはガロア表現としての同型ではない（注 4.3 と同様）．

(2) $C(PH^2_{\text{ét}}((X_{\overline{k}},\xi),\mathbb{Z}_l(1)))$ の (1) の右辺への左乗算作用を通じて，

$$PH^2_{\text{ét}}((X_{\overline{k}},\xi),\mathbb{Z}_l(1))\subset\mathrm{End}_{C(L_{2d})}(H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{k}},\mathbb{Z}_l))$$

はガロア表現としての埋め込みである．

また，ここまでの主張が H_{crys} についても同様に成立する．例えば，(2) の埋め込みに対応するのは，F 同変な埋め込み

$$PH^2_{\mathrm{crys}}(X_{k^p}/W(k^p))(1)\subset\mathrm{End}_{C(L_{2d})}(H^1_{\mathrm{crys}}(A_{k^p}/W(k^p)))$$

である（k^p は k の完全閉包）．

(3) $\mathrm{Pic}(X_{k'})$ の部分群 $\langle\xi\rangle^\perp$ と $L(A)$ の間に，各実現と整合的な同型射が存在する．

ここで $L(A)$ とは久賀・佐武アーベル多様体 A の **special endomorphism** のなす空間であり，$f \in \mathrm{End}(A)$ が **special** とは，（正標数のとき，）そのクリスタリン実現が PH^2_{crys} に入ることをいう（このとき任意の $l \neq p$ に対し l 進実現も $PH^2_{\text{ét}}$ に入ることが従う）．

証明 (1)–(2) は構成から従う．(3) のみが非自明である．

右辺の元 f をとる．3 つ組 (X, ξ, f) の変形空間は $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上平坦な成分をもつ（定理 3.1 を用いて，$\mathcal{S}(L_{2d})$ の方での平坦性に帰着する）．言い換えると，(X, ξ, f) の標数 0 の体 F への持ち上げ $(\widetilde{X}, \widetilde{\xi}, \widetilde{f})$ が存在する．対応する点を $\widetilde{s} \in \widetilde{M}_{2d}(F)$ とおく．$\widetilde{X}$ の久賀・佐武アーベル多様体 $A_{\widetilde{s}}$ の mod p 還元は A になる．同型

$$\langle\widetilde{\xi}\rangle^\perp \xrightarrow{\sim} AH(\mathbb{P}^2_{\widetilde{s}}) = AH(\mathbb{L}_{\widetilde{s}}) \xleftarrow{\sim} L(A_{\widetilde{s}})$$

がある[*19]．ここで AH は absolute Hodge サイクルを意味し（つまり，$AH(?) = ?_{\mathrm{B}} \cap F^0 ?_{\mathrm{dR}}$），また最右辺は special endomorphism の空間を表す．ここで標数 0 の久賀・佐武アーベル多様体の special endomorphism の定義は，一つのまたはすべての l に対する l 進実現または Betti 実現に関する同様の条件（どれでも同値である）で定める．最初の同型は Lefschetz (1,1) であり，最後の同型は $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体の準同型が Hodge 構造の射と対応するから従う．この同型で $\widetilde{f} \in L(A_{\widetilde{s}})$ に対応する元 $\widetilde{\eta} \in \langle\widetilde{\xi}\rangle^\perp$ の mod p 還元を $\eta \in \langle\xi\rangle^\perp$ とおくと，η と f の l 進およびクリスタリンの類が (2) の射で対応することが，標数 0 側で対応することから従う．

逆に左辺の元 η をとる．3 つ組 (X, ξ, η) の変形空間は $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上平坦な成分をもつ（[LO15, Proposition A.1]）．以下同様． □

(3) の証明の一つのポイントは，Nygaard（と Nygaard–Ogus）のやり方とは異なり，すべての因子を同時に標数 0 へ持ち上げようとはしないことである（実際，supersingular の場合 Picard 数は 22 になるはずなので，標数 0 に同時に持ち上げることは不可能である）．

[*19] [MP15] ではこの式中に「$\cap \mathrm{End}(A_{\widetilde{s}})$」があるが，何かの間違いだと思う．

5 special endomorphism の Tate 予想

$s \in \widetilde{\mathcal{S}}(L)(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を任意にとる．s は $\mathbb{F}_{p^r}$ 値点とする．以下 m は r の正の倍数を走る．

l が p と異なる素数のとき $r_l = \dim_{\mathbb{Q}_l} \varinjlim_m \mathbb{V}_{l,s}^{\mathrm{Frob}_m=1}$ とし，$l = p$ のとき $r_p = \dim_{\mathbb{Q}_p} \varinjlim_m (\mathbb{V}_{\mathrm{crys},s} \otimes \mathbb{Q}_{p^m})^{\mathrm{Frob}_m=1}$ とする．ここで $\mathbb{V}_? = \mathbb{L}_? \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ であり，$\mathbb{L}_l$ および $\mathbb{L}_{\mathrm{crys}}$ は 3.3 節で導入した $\mathbb{L}_{\mathrm{B}}$ や $\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}$ と整合するように定義されている（いずれも $\widetilde{\mathrm{Sh}}$ の普遍アーベルスキームの End H^1 の sub である）（[MP16, Sections 3,4,7]）．

$l = p$ の場合を含めて，r_l は l によらない（Kisin [Kis17, Corollary 2.3.2] から従うが，考えたい場合については K3 曲面の H^2 から来ていることからも従うはず）．この値を r とおく．

定理 5.1（[MP15, Theorem 6.4]） 自然な射 $L(A_s) \otimes \mathbb{Q}_l \to \varinjlim_m \mathbb{V}_{l,s}^{\mathrm{Frob}_m=1}$ $(l \neq p)$ および $L(A_s) \otimes \mathbb{Q}_p \to \varinjlim_m (\mathbb{V}_{\mathrm{crys},s} \otimes \mathbb{Q}_{p^m})^{\mathrm{Frob}_m=1}$ は同型である．言い換えると，$\mathrm{rank}\, L(A_s) = r$ である．

定理 4.5 と定理 5.1 から，有限体上の K3 曲面の Tate 予想がほとんど従う．残ったのは標数 2 で (X, ξ) が M^{sm} に入らない場合であり，この場合は次のようにして示せる．（$p \geq 3$ でも同じことができるので，Tate 予想を示すだけならば，extension property をとくに調整せず M^{sm} 上でのみ周期写像を定義するのでもよかったようだ．ところで [KMP16, Remark A.16] によると，逆に Tate 予想を用いて周期写像を M 全体に伸ばせることを示せるらしい．）

$(X, \xi) \notin M^{\mathrm{sm}}$ を含む quasi-polarized supersingular K3 曲面の非自明な族をとる．すると，M^{sm} の補集合は 0 次元であることから，その族の一般の元では Tate 予想が成り立つ（つまり Picard 数は 22 である）．supersingular な K3 曲面の族において Picard 数が局所定数であること（Artin [Art74, Theorem 1.1]）から，X の場合の Tate 予想が従う．

正標数の有限生成体上の K3 曲面の Tate 予想は，有限体の場合から簡単な議論で従う（参考：[Zar76]）．

定理 5.1 の証明の概略を述べる．

まず，L をより大きい格子 L'（符号 $(+2, -n')$）に埋め込むことで，L が p で自己双対でありかつ $L(A_s) \neq 0$ を満たす場合に帰着できる．（この議論のために L_{2d} に限定せずより一般の格子に対して整正準モデルを構成していた！）

r で割り切れる正整数 m に対し，$\mathrm{GSpin}(\mathbb{V}_{l,s})$ の中での Frob_m の commutant を $I_{l,m}$ と書く．$I_l = \varinjlim_m I_{l,m}$ とおく．なお，十分割り切れる m に対して（つまり，ある m_0 が存在して，m_0 で割り切れる任意の m に対して），$I_{l,m}$ は一定である．

一方，$\underline{\mathrm{Aut}}^\circ(A_s)$ を，$\mathrm{End}(A_s) \otimes \mathbb{Q}$ の単数のなす $\mathbb{Q}$ 上の代数群とする（つまり，$\mathbb{Q}$ スキーム T に対し $(\mathrm{End}(A_s) \otimes_{\mathbb{Z}} T)^*$ を対応させる）．l 進およびクリスタリンの実現が $\mathrm{GSpin}(\mathbb{V}_{?,s})$ に含まれる $\underline{\mathrm{Aut}}^\circ(A_s)$ の最大の閉部分群を I とおく．

次の命題がキーである．

命題 5.2（Kisin [Kis17, Corollary 2.1.7], **Madapusi Pera** [MP15, Proposition 6.10]**）** $l \neq p$ を，$\mathrm{SO}(\mathbb{V}_{l,s})$ が split であり，かつ Frob_m の固有多項式が $\mathbb{Q}_l$ で完全分解するような素数とする（そのような素数は正の密度をもつ，とくにそのような素数は存在する）．このとき自然な射 $I_{\mathbb{Q}_l} \to I_l$ は同型である．

I と I_l の定義で「$\mathrm{GSpin}(\mathbb{V}_{l,s})$ に入る」という条件を取り除くと，これはアーベル多様体 A の Tate 予想そのもの（を群で言い換えたもの）である．その意味でこの命題は「special endomorphism の Tate 予想」と捉えられる．（都合のいい l をとって証明するところおよび，結果的にはすべての l で成立する（[Kis17, Corollary 2.3.2]）ところも [Tat66] と似ている．）

この命題の証明は大変なのでここでは述べない．あらすじを表面的に述べると，まず命題を $I(\mathbb{Q})\backslash I_l(\mathbb{Q}_l)$ がコンパクトであることに帰着し，$I(\mathbb{Q})\backslash I_l(\mathbb{Q}_l)$ から $\widetilde{\mathcal{S}}_p(L)(\overline{\mathbb{F}}_p)$ への単射を構成し，すると $I(\mathbb{Q})\backslash I_l(\mathbb{Q}_l)$ が profinite であることが分かりとくにコンパクトである．

この命題を認めれば定理 5.1 の証明は簡単である．

定理 5.1 の証明　各射は単射で，右辺の次元 r_l が l によらないので，ひとつの $l \neq p$ で全射を示せばよい．$L(A_s) \otimes \mathbb{Q}_l \to \varinjlim_m \mathbb{V}_{l,s}^{\mathrm{Frob}_m = 1}$ は $I_{\mathbb{Q}_l}$ 表現の射であり，前命題のように l をとると I_l 表現の射になるが，右辺は既約 I_l 表現であることが分かり，左辺は $\neq 0$ なので，全射である．　□

■謝辞　サマースクールでの講演，および 2013 年に東大や京大で行ったセミナーでの質疑について参加者の皆さまに感謝いたします．また，有意義なコメントを送って下さった石塚裕大氏，伊藤哲史氏，越川皓永氏，三枝洋一氏に感謝いたします．

参考文献

[And96] Yves André, *On the Shafarevich and Tate conjectures for hyper-Kähler varieties*, Math. Ann. **305** (1996), no. 2, 205–248.

[ASD73] M. Artin and H. P. F. Swinnerton-Dyer, *The Shafarevich-Tate conjecture for pencils of elliptic curves on* $K3$ *surfaces*, Invent. Math. **20** (1973), 249–266.

[Art74] M. Artin, *Supersingular* $K3$ *surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 543–567 (1975).

[Băd01] Lucian Bădescu, *Algebraic surfaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001. Translated from the 1981 Romanian original by Vladimir Maşek and revised by the author.

[BHPV04] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[BBD85] Arnaud Beauville, Jean-Pierre Bourguignon, and Michel Demazure (eds.), *Géométrie des surfaces* $K3$*: modules et périodes*, Société Mathématique de France, Paris, 1985 (French). Papers from the seminar held in Palaiseau, October 1981–January 1982; Astérisque No. 126 (1985).

[Ben15] Olivier Benoist, *Construction de courbes sur les surfaces K3 (d'après Bogomolov-Hassett-Tschinkel, Charles, Li-Liedtke, Madapusi Pera, Maulik...)*, Astérisque **367–368** (2015), Exp. No. 1081, viii, 219–253 (French, with French summary).

[BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze, *Integral* p*-adic Hodge theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **128** (2018), 219–397.

[BR75] Dan Burns Jr. and Michael Rapoport, *On the Torelli problem for kählerian* $K-3$ *surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **8** (1975), no. 2, 235–273.

[Cha13] François Charles, *The Tate conjecture for $K3$ surfaces over finite fields*, Invent. Math. **194** (2013), no. 1, 119–145.

[Cha16] François Charles, *Birational boundedness for holomorphic symplectic varieties, Zarhin's trick for $K3$ surfaces, and the Tate conjecture*, Ann. of Math. (2) **184** (2016), no. 2, 487–526.

[Del72] Pierre Deligne, *La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$*, Invent. Math. **15** (1972), 206–226 (French).

[Del81] P. Deligne, *Relèvement des surfaces $K3$ en caractéristique nulle*, Algebraic surfaces (Orsay, 1976), Lecture Notes in Math., vol. 868, Springer, Berlin, 1981, pp. 58–79 (French). Prepared for publication by Luc Illusie.

[Del82] ———, *Hodge cycles on abelian varieties*, Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, Lecture Notes in Mathematics, vol. 900, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982, pp. 9–100.

[Fal83] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366 (German).

[FW84] Gerd Faltings and Gisbert Wüstholz (eds.), *Rational points*, Aspects of Mathematics, E6, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig; distributed by Heyden & Son, Inc., Philadelphia, PA, 1984. Papers from the seminar held at the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1983/1984.

[Huy16] Daniel Huybrechts, *Lectures on K3 Surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 158, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[IIK18] Kazuhiro Ito, Tetsushi Ito, and Teruhisa Koshikawa, *CM liftings of K3 surfaces over finite fields and their applications to the Tate conjecture* (2018), available at `https://arxiv.org/abs/1809.09604`.

[KMP16] Wansu Kim and Keerthi Madapusi Pera, *2-adic integral canonical models*, Forum Math. Sigma **4** (2016), e28, 34.

[Kis10] Mark Kisin, *Integral models for Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 4, 967–1012.

[Kis17] ———, mod p *points on Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 3, 819–914.

[金銅 15] 金銅 誠之, *K3* 曲面, 共立講座 数学の輝き, vol. 5, 共立出版, 2015.

[KS67] Michio Kuga and Ichirô Satake, *Abelian varieties attached to polarized* K_3*-surfaces*, Math. Ann. **169** (1967), 239–242.

[LMS14] Max Lieblich, Davesh Maulik, and Andrew Snowden, *Finiteness of K3 surfaces and the Tate conjecture*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 2, 285–308 (English, with English and French summaries).

[LO15] Max Lieblich and Martin Olsson, *Fourier-Mukai partners of K3 surfaces in positive characteristic*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **48** (2015), no. 5, 1001–1033 (English, with English and French summaries).

[MP16] Keerthi Madapusi Pera, *Integral canonical models for spin Shimura varieties*, Compos. Math. **152** (2016), no. 4, 769–824.

[MP15] ———, *The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic*, Invent. Math. **201** (2015), no. 2, 625–668.

[Mau14] Davesh Maulik, *Supersingular K3 surfaces for large primes*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 13, 2357–2425. With an appendix by Andrew Snowden.

[Mil05] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 265–378.

[Mil07] ———, *The Tate conjecture over finite fields (AIM talk)* (2007), available at `www.jmilne.org/math/`.

[Mil14] ———, *The work of John Tate*, The Abel Prize 2008–2012, Springer, Heidelberg, 2014, pp. 259–340.

[MB85] Laurent Moret-Bailly, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque **129** (1985), 266 (French, with English summary).

[Mor78] Shigefumi Mori, *On Tate conjecture concerning endomorphisms of abelian varieties*, Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, pp. 219–230.

[Mum70] David Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1970.

[Nyg79] Niels O. Nygaard, *A p-adic proof of the nonexistence of vector fields on $K3$ surfaces*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 515–528.

[Nyg83] N. O. Nygaard, *The Tate conjecture for ordinary $K3$ surfaces over finite fields*, Invent. Math. **74** (1983), no. 2, 213–237.

[NO85] Niels Nygaard and Arthur Ogus, *Tate's conjecture for $K3$ surfaces of finite height*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 3, 461–507.

[Ogu79] Arthur Ogus, *Supersingular $K3$ crystals*, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Astérisque, vol. 64, Soc. Math. France, Paris, 1979, pp. 3–86.

[Ogu84] ———, *F-isocrystals and de Rham cohomology. II. Convergent isocrystals*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 4, 765–850.

[PSS71] I. I. Pjateckii-Shapiro and I. R. Shafarevich, *Torelli's theorem for algebraic surfaces of type* K3, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 530–572 (Russian).

[Riz10] Jordan Rizov, *Kuga-Satake abelian varieties of K3 surfaces in mixed characteristic*, J. Reine Angew. Math. **648** (2010), 13–67.

[RS76] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (1976), no. 6, 1269–1307, 1439 (Russian).

[RZS82] A. N. Rudakov, T. Zink, and I. R. Shafarevich, *The influence of height on degenerations of algebraic surfaces of type $K3$*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 1, 117–134, 192 (Russian).

[Sch13] Peter Scholze, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77.

[Siu83] Y. T. Siu, *Every $K3$ surface is Kähler*, Invent. Math. **73** (1983), no. 1, 139–150.

[Tat63] John Tate, *Duality theorems in Galois cohomology over number* *fields*, Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, pp. 288–295.

[Tat64] ———, *Algebraic cohomology classes*, Lecture notes prepared in connection with the seminars held at the Summer Institute on Algebraic Geometry (Whitney Estate, Woods Hole, Massachusetts, 1964), 1964, available at `http://www.jmilne.org/math/Documents/`. Russian translation: Uspehi Mat. Nauk **20** (1965), no. 6 (126), 27–40.

[Tat65] ———, *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper & Row, New York, 1965, pp. 93–110.

[Tat66] ———, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), 134–144.

[Tat94] ———, *Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 71–83.

[Zar76] Ju. G. Zarhin, *Abelian varieties in characteristic p*, Mat. Zametki **19** (1976), no. 3, 393–400 (Russian). English translation: Math. Notes **19** (1976), no. 3–4, 240–244.