Siegel モジュラー多様体

越川　皓永 *

概要

Siegel モジュラー多様体は, 主偏極付アーベル多様体のモジュライ空間である, という意味で古典的なモジュラー曲線[*1]の自然な一般化である．一方で, Siegel モジュラー多様体は高次元志村多様体の最も基本的な例ともみなせる．この記事の目的は, Siegel モジュラー多様体を通して, 志村多様体の一般論への手がかりをできるだけ与えるというものである．

1　Siegel モジュラー多様体の定義

モジュラー曲線が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_1^+$ という形だったことを思い出す．ここで $\mathfrak{H}_1^+$ は上半平面であり, 虚部が正の複素数からなる．

Siegel [Sie35, Sie39] は上半平面の高次元版上のモジュラー形式を研究した．正の整数 g を固定する．

定義 1.1　次数 (または種数) g の Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_g^+$, 下半空間 $\mathfrak{H}_g^-$ および双空間 $\mathfrak{H}_g^\pm$ を

$$\mathfrak{H}_g^+ = \left\{\tau \in \mathrm{M}_g(\mathbb{C}) \mid \tau\text{: 対称, 虚部が正定値}\right\}, \quad \mathfrak{H}_g^- = -\mathfrak{H}_g^+, \quad \mathfrak{H}_g^\pm = \mathfrak{H}_g^+ \sqcup \mathfrak{H}_g^-$$

で定める．ここで $\mathrm{M}_g(\mathbb{C})$ は複素数係数の g 次正方行列の集合を表す．

これらの空間は次元 $\frac{g(g+1)}{2}$ の複素多様体である．Siegel 上半空間には斜交群 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ が正則に作用している．まず, この群の定義を述べておく．サイズ g の単位

* 京都大学数理解析研究所　e-mail: teruhisa@kurims.kyoto-u.ac.jp

*1 楕円曲線は自然な主偏極を持つ．

行列を I_g と書き, $2g$ 次正方行列 J を

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

で定める. $2g$ 次正方行列を 4 つの g 次正方行列で表している. (以下, 同様の記法を断りなく用いる.)

定義 1.2 環 R に対し, 斜交群 $\mathrm{Sp}_{2g}(R)$ を

$$\mathrm{Sp}_{2g}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2g}(R) \;\middle|\; {}^t\!\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = J \right\}$$

で定義する. ここで, $\mathrm{GL}_{2g}(R)$ は $2g$ 次可逆行列の集合を, t は転置行列を表す.

$\mathbb{Z}^{2g}$ 上の交代双線形形式を $\big(\langle e_i, e_j\rangle\big)_{1\le i,j\le 2g} = J$ で定めると, Sp_{2g} は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を保つ行列全体のなす群といえる.

斜交群は $\mathbb{Z}$ 上の連結群スキームであり, さらに分裂単連結半単純群となる. (この用語の定義は説明しない.)

命題 1.3 斜交群 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ の $\mathfrak{H}_g^+$ への推移的な左からの作用が次で定まる:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}.$$

証明 作用が定まることは, 命題 2.3 を用いて注意 2.5 で確認することにする.

推移的であることは,

$$\begin{pmatrix} I_g & B \\ 0 & I_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g & {}^tB \\ 0 & I_g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$$

という形の元の作用を考えれば分かる. (後者の点 $\sqrt{-1}\cdot I_g$ への作用を考えると純虚な元がすべて得られ, 前者の作用をさらに考えるとすべての元が得られる. 正定値対称実行列は A^tA の形に必ず書けることに注意せよ.) □

注意 1.4 Siegel 上半空間の点 $\sqrt{-1}\cdot I_g$ を考え, その固定化群を計算すると, 埋め込み

$$\mathrm{U}_g(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}); \quad A + B\sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

によりユニタリ群 $\mathrm{U}_g(\mathbb{R})$ と同型になる. (これは $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群になっている.) ユニタリ群の中心 $\mathrm{U}_1(\mathbb{R})$ の像の $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ での中心化群はユニタリ群全

体となる．したがって，$\mathfrak{H}_g^+$ の点と準同型 $h\colon \mathrm{U}_1(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$(上の写像の $\mathrm{U}_1(\mathbb{R})$ への制限) の共役類の元とが一対一に対応することが分かる．

定義 1.5 商 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ を Siegel モジュラー多様体*2という．

商を取っている $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ の作用は真性不連続であるが自由ではないので，割った空間は複素解析空間とみなす．あるいは，割る群を有限指数で小さくすることで自由な作用が得られるので，複素多様体を有限群の作用で割った空間として考えてもよい．(よく知られているように $g = 1$ のときは複素多様体ともみなせるが，$g \geq 2$ のときは特異点が存在する*3.)

後のため，一般斜交群 GSp を導入する．これは $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定数倍のずれを許して保つ群である．(一般斜交群は general symplectic group の訳である．symplectic similitude group や conformal symplectic group*4という呼び名もある.)

定義 1.6 一般斜交群を次で定義する:

$$\mathrm{GSp}_{2g}(R) = \{\gamma \in \mathrm{GL}_{2g}(R) \mid R^\times \text{ の元 } c(\gamma) \text{ が唯一つ存在し } {}^t\gamma J \gamma = c(\gamma) \cdot J\}.$$

準同型 $\nu\colon \mathrm{GSp}_{2g}(R) \to R^\times; \gamma \mapsto c(\gamma)$ を考えると，核は $\mathrm{Sp}_{2g}(R)$ である．さらに ν は任意の R に対し全射である．(これは $\nu\colon \mathrm{GSp}_{2g} \to \mathbb{G}_\mathrm{m}$ が代数群の射として全射であることよりも強い主張である.) 実際，

$$\gamma = \begin{pmatrix} r \cdot I_g & 0 \\ 0 & I_g \end{pmatrix}$$

に対し，$c(\gamma) = r$ である．

前と同様の式で，$\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ が $\mathfrak{H}_g^\pm$ に左から作用することが確かめられる．この作用が推移的であることも直ぐに分かる．(以下の命題 1.8 を参照.)

注意 1.7 実数を対角行列とみなすと，$\mathbb{R}^\times \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ で c は二乗写像となり，特に c の制限は全射でない．点 $\sqrt{-1} \cdot I_g$ の固定化群は $\mathbb{R}^\times\, \mathrm{U}_g(\mathbb{R})$ となる．この固定化群は $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ の中心を法としてコンパクトな部分群だがそのようなものの中で極大ではない．(極大なものに c を制限すると全射になる.)

*2 昔の文献では $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ は Siegel モジュラー群と呼ばれている．

*3 粗モジュライスキームの特異点については $g = 2$ は井草 [Igu60]，$g \geq 3$ では Oort [Oor77] を参照されたい．

*4 CSp と書かれる．なお，GSp は Gp とも書かれる．

さらに前の類似として, この固定化群は $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^\times \mathrm{U}_1(\mathbb{R})$ の像の $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ での中心化群と一致することが分かる. また, この準同型 $h\colon \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ は自然に $\mathbb{R}$ 代数の準同型 $h\colon \mathbb{C} \to \mathrm{M}_{2g}(\mathbb{R})$ へと延びる. (これは $\mathbb{R}^{2g}$ に複素ベクトル空間の構造を与えることになることに注意せよ.) つまり, $\mathfrak{H}_g^\pm$ の点と, $h\colon \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ の共役類の元と, $h\colon \mathbb{C} \to \mathrm{M}_{2g}(\mathbb{R})$ の $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ の共役作用に関する軌道の元とがそれぞれ一対一に対応している.

命題 1.8 商 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^\pm$ は Siegel モジュラー多様体と自然に同型になる.

証明 行列 $\begin{pmatrix} -I_g & 0 \\ 0 & I_g \end{pmatrix} \in \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ を考える. この行列の位数は 2 であり, $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ は集合として $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ と $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} -I_g & 0 \\ 0 & I_g \end{pmatrix}$ の直和になる. また $\mathfrak{H}_g^+$ と $\mathfrak{H}_g^-$ が $\begin{pmatrix} -I_g & 0 \\ 0 & I_g \end{pmatrix}$ の作用で移りあうことに注意すれば, 主張が従う. □

2 モジュライ解釈 1

2.1 周期写像

まず, 石塚氏の記事から次の定理を思い出す.

定理 2.1 $\mathbb{C}$ 上の主偏極付アーベル多様体の圏から型 $(-1,0),(0,-1)$ の主偏極付 Hodge 構造の圏への充満忠実関手が

$$(A, \phi_{\mathcal{L}}) \longrightarrow (\Lambda = H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), H^{-1,0} = \mathrm{Lie}\, A, -2\pi i E_{\mathcal{L}})$$

で定まる. ここで, $E_{\mathcal{L}}$ は Riemann 形式 (ここでは Λ 上の交代形式) であり, (定数倍すると)Hodge 構造の主偏極を定める. この関手の本質的像は, $H_{\mathbb{Z}}$ が自由 $\mathbb{Z}$ 加群という条件で定まる充満部分圏である.

さらに, 次の Frobenius の補題 [Fro79] に注意する.

補題 2.2 自己双対な格子 $(\Lambda, E_{\mathcal{L}})$ は標準的な格子 $(\mathbb{Z}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に同型である. ここで格子とは有限生成自由加群とその上の双線形形式の組のことである.

証明 一般に集合 $\{E_{\mathcal{L}}(\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda\}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルであり, Λ が自己双対であることから, 今の場合 $\mathbb{Z}$ に等しい.

よって, $E_{\mathcal{L}}(e,f)=1$ となる $e,f\in\Lambda$ および, 直交分解 $\Lambda=(\mathbb{Z}e+\mathbb{Z}f)\oplus(\mathbb{Z}e+\mathbb{Z}f)^{\perp}$ が存在する. この直交補空間は $E_{\mathcal{L}}$ の制限に関して自己双対である. これを繰り返せば, 所望の同型が得られる. □

補題により, 同型 $(\Lambda,E_{\mathcal{L}})\xrightarrow{\cong}(\mathbb{Z}^{2g},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を取る. (同型はこの向きで取ることにする.) すると, $(\mathbb{Z}^{2g},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上に型 $(-1,0),(0,-1)$ の主偏極付 Hodge 構造が定まる. つまり, Hodge 分解 $\mathbb{C}^{2g}=H^{-1,0}\oplus H^{0,-1}$ であって, それの定める Hodge 構造が $\langle\cdot,\cdot\rangle$ によって主偏極を持つ. ここで Siegel 上半空間が現れる.

命題 2.3　$\mathfrak{H}_g^+$ の各点は $(\mathbb{Z}^{2g},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上の型 $(-1,0),(0,-1)$ の主偏極付 Hodge 構造と対応する.

証明　まず, $H^{-1,0}$ の $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての基底を選ぶ. すると, 合成

$$\mathbb{R}^{2g}=\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}^{2g}\xrightarrow{\cong}H^{-1,0}\xrightarrow{\cong}\mathbb{C}^g$$

により, $\mathbb{C}$ 係数の $g\times 2g$ 行列 $\Omega=\begin{pmatrix}\Omega_1 & \Omega_2\end{pmatrix}$ が定まる.

双対空間で考えると, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が偏極であるという条件は

$$\begin{pmatrix}\Omega_1 & \Omega_2\\ \overline{\Omega_1} & \overline{\Omega_2}\end{pmatrix}\cdot J\cdot {}^t\begin{pmatrix}\Omega_1 & \Omega_2\\ \overline{\Omega_1} & \overline{\Omega_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\cdot(\text{正定値})\\ -\sqrt{-1}\cdot(\text{正定値}) & 0\end{pmatrix}$$

と言い換えられる.

これは二条件

$$\Omega_1\cdot{}^t\Omega_2-\Omega_2\cdot{}^t\Omega_1=0,\quad \Omega_1\cdot{}^t\overline{\Omega}_2-\Omega_2\cdot{}^t\overline{\Omega}_1\text{ が正定値}$$

と同値である.

特に 2 つ目の条件から, Ω_2 が可逆であることが分かり, $\Omega_2^{-1}\cdot\Omega_1$ を考えることができる. また, Ω_2 を用いて $H^{-1,0}$ の基底を取り換えれば, $\begin{pmatrix}\Omega_2^{-1}\cdot\Omega_1 & I_g\end{pmatrix}$ が上で述べた Ω に対する二条件を満たすことが分かる. そして, この二条件は $\Omega_2^{-1}\cdot\Omega_1$ が $\mathfrak{H}_g^+$ に属することと同値となり, Hodge 構造から $\mathfrak{H}_g^+$ の点を得ることができる. また, その構成から得られた写像は全単射である. □

例 2.4　点 $\sqrt{-1}\cdot I_g$ に対応する Hodge 分解は

$$H^{-1,0}=(\mathbb{C}^g)^{J=\sqrt{-1}},\quad H^{0,-1}=(\mathbb{C}^g)^{J=-\sqrt{-1}}.$$

注意 2.5 Siegel 上半平面には $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ が作用していたが, $(\mathbb{Z}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上の型 $(-1,0),(0,-1)$ の主偏極付 Hodge 構造の集合にも $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ が自然に左から作用している. つまり, $\gamma \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ に対し, 同型 $\gamma\colon (\mathbb{R}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ で左辺の Hodge 構造を右辺に移すというものである.

証明で構成した全単射は両辺の $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ の作用をそのまま保つのではなく, 片側の γ の作用がもう一方の ${}^t\gamma^{-1}$ の作用と対応している. （この対応をみることで, $\mathfrak{H}_g^+$ への $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ への作用が定義できていることが証明できる.）写像 $\gamma \mapsto {}^t\gamma^{-1}$ は斜交群の定義から J の共役と等しい. つまり, 構成した全単射を J の $\mathfrak{H}_g^+$ への作用で捻ると $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ の作用を保つようになる.

他には例えば, 双対である型 $(1,0),(0,1)$ の主偏極付 Hodge 構造を代わりに考えることにすると (つまりホモロジーでなくコホモロジーを考えることになる), 作用が ${}^t\gamma^{-1}$ で捻られるため, 作用のずれはなくなる. あるいは, Siegel 上半平面への左作用の代わりに右作用を考えることで転置のずれをなくすということもできる.

注意 2.6 阿部氏の記事で説明されるように Hodge 分解 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{2g} = H^{-1,0}\oplus H^{0,-1}$ を与えることは, $\mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の表現を与えることと等価である. ただし, この対応は完全に自然ではなく, 正規化を決める必要がある. ここでは [Del79, Mil05] に従うので, 今の場合は対応する準同型 $\mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$ 代数の準同型 $\mathbb{C} \to \mathrm{M}_{2g}(\mathbb{R})$ に自然に延びる. つまり $\mathbb{R}^{2g}$ に複素構造が入る. 逆に, 複素構造から Hodge 分解も定まる. 複素構造の集合にも $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ が自然に左から作用していて, 上の対応は $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ の作用を保つ.

さて, $\mathfrak{H}_g^+$ は $\mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{R})$ あるいは $\mathbb{C} \to \mathrm{M}_{2g}(\mathbb{R})$ の $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ の作用に関する軌道であった. 証明で構成した対応は $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ の作用は J の共役のずれを除いて保っていたので, 命題 2.3 で考えている Hodge 構造 (あるいは複素構造) の集合も $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ の作用の軌道になっている. つまり, 作用が可移的と分かる.

同型 $(\Lambda, E_{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ の下で, 証明中に現れた Ω の各成分はアーベル多様体 A の 1 次微分形式をサイクルで積分したものであるから, いわゆる周期となる. それゆえ, Ω は周期行列, 得られた写像は周期写像と呼ばれる.

同型 $(\Lambda, E_{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ の取り方はちょうど $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ の作用の分だけあるので, 次の系が得られる. ($\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ は J の共役で閉じているので上で注意した作用のずれは影響しない.)

系 2.7 $\mathbb{C}$ 上の主偏極付アーベル多様体の同型類を $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ と書けば, 周期写像は全単射 $\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ を導く.

2.2 主偏極付アーベル多様体のモジュライ

周期写像により, Siegel モジュラー多様体は $\mathbb{C}$ 上の主偏極付アーベル多様体の同型類を分類している. 一方, アーベル多様体の同型類を分類するという問題を代数幾何の枠内で考えることができる.

定義 2.8 スキームの圏から集合の圏への反変関手 $\mathcal{A}_g$ を

$$S \longmapsto \mathcal{A}_g(S) = (S \text{ 上の相対 } g \text{ 次元の主偏極付アーベルスキームの同型類の集合})$$

で定める.

このとき, 次の意味で $\mathcal{A}_g$ からスキームが定まる.

定義 2.9 F を環の圏から集合の圏への関手とする. スキーム S と F から S への関手としての射の組が, そのような組のうち普遍的 (そのような組のなす圏で終対象) であり, かつ写像 $F(k) \to S(k)$ が任意の代数閉体 k に対し全単射であるとき, S を F の粗モジュライスキームという.

事実 2.10 $\mathcal{A}_g$ は $\mathbb{Z}$ 上準射影的かつ平坦な粗モジュライスキームを持つ. 特に, $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ は代数多様体の構造を持つ.

この事実は Mumford [Mum65] が最初に示した. 清水氏の記事も参照されたい. ただし, GIT の観点からより理想的な証明はその後に得られている. GIT の本 [MFK94] の Appendix 4C, p.216 を参照せよ.

$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ が $\mathbb{C}$ 上の準射影的代数多様体になることはそれ以前にも知られていた. これは Baily [Bai58], Cartan [Car58], 佐武 [Sat56] らによるコンパクト化を用いた議論である. ($\mathbb{Z}$ 上でも Faltings-Chai [FC90] が彼らの構成したコンパクト化を用いた証明を与えている.)

大島氏の記事にあるように, 代数多様体の構造は一意[*5]であることを注意しておく.

[*5] 正確にはこの主張が文字通りに正しいか筆者は知らない. 少なくとも, $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ そのものではなく, Γ を $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ の十分小さい有限指数部分群として, $\Gamma\backslash\mathfrak{H}_g^+$ を考えれば正しい.

また, $\mathbb{Q}$ 上の構造については Baily [Bai62] や志村 [Shi66, Shi98] による研究もある.

3 アデールを用いた記述と一般斜交群への移行

Deligne [Del71, Del79] による志村多様体の枠組みでは, アデールや（半単純と限らない）簡約代数群が用いられる. ここでも, それらの視点から, Siegel モジュラー多様体を解釈し直すことにする.

まず, アデールで解釈するための基本的な命題を用意する. 有限アデールの環を $\mathbb{A}_f$ と書く.

命題 3.1 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{A}_f) = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})\,\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$.

これは強近似定理の非常に特別な場合とみなせる. 志村多様体の理論で用いられる強近似定理は次の場合である:

定理 3.2（強近似定理） G を $\mathbb{Q}$ 上の単連結半単純代数群とし, $\mathbb{R}$ 値点がコンパクトとなる $\mathbb{Q}$ 上の因子がないとする. このとき, $G(\mathbb{Q})$ は $G(\mathbb{A}_f)$ で稠密[*6]である.

加法群に対しても, 強近似定理は成立する. つまり, $\mathbb{Q}$ は有限アデールの環 $\mathbb{A}_f$ で稠密である. これは簡単に確認できる.

開部分群 $\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$ による剰余類を考えているので, 強近似定理から命題が従う. 一方, 命題を仮定した上で, Sp_{2g} に対する強近似定理は, $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ がすべての N に対して全射であることと同値である. ($\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ が $\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$ で稠密であることとも同値である. なお Sp_{2g} が $\mathbb{Z}$ 上滑らかであるため, $\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ は全射である.) この全射性が最初に明示的に示されたのは [NS64] のようである.

一方, 斜交群に対して強近似定理そのものを最初に示しているのは志村 [Shi63] と思われる. 志村は格子を用いている. 実際, 上の命題は自己双対な格子を用いることで簡単に証明できる:

命題 3.1 の証明 定義から $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ は標準的な格子 $(\mathbb{Z}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ の自己同型である. 一方, Frobenius の補題により, すべての自己双対な格子が標準的な格子に同型であることから, $\mathbb{Q}^{2g}$ の自己双対な格子の集合が $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})/\,\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ と書ける. 同様に

[*6] アデール値点の位相については `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/adelictop.pdf` を参照せよ.

$(\mathbb{A}_f^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 内の自己双対な $\widehat{\mathbb{Z}}$ 格子を考えるとその集合は $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$ と書ける.

一方, 自己双対な格子を係数拡大することで自己双対な $\widehat{\mathbb{Z}}$ 格子が得られるが, これが全単射であることが示せる. これは, アデールに対する強近似定理の帰結である. 逆写像は $\mathbb{Q}^{2g}$ との共通部分をとることで得られる.

これらにより, 自然な全単射 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})/\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$ が得られる. □

強近似定理の証明[*7]も紹介しておく. ここでは Platonov [Pla69] の方針を説明する. 基本的には非アルキメデス局所体 F 上の階数 1 以上の単連結半単純代数群 G に対する Kneser-Tits 予想 [Tit64] に帰着するというものである. この予想の定式化の一つは $G(F)$ がべき単元で（抽象的な群として）生成されるというものである. 放物型部分群のべき単根基を用いた言い換えもできる. Platonov は Kneser-Tits 予想を証明することで強近似定理を証明している. (ただし, Platonov の証明にはいくつか間違いがあるようなので, [PR94] や [Pra77] をみられたい. Kneser-Tits 予想に関しては土方 [Hij75] に別証明[*8]が書かれている.)

Kneser-Tits 予想について簡単な注意をしておく. 階数が 0 であれば, べき単元は単位元のみになってしまう. したがって, 階数 1 以上という仮定は必要である. 単連結という仮定も PGL_2 を考えれば必要と分かる. 色々な群に対して, Kneser-Tits 予想は実は難しくない. 例えば, 分裂型（あるいは準分裂型）のときは Chevalley (と Steinberg) の理論により従う. 実際, SL_2(と準分裂型の SU_3[*9]) に帰着することで証明できる. また, 斜交群に対しては直接証明できる古典的な事実である.

強近似定理の証明　簡単のため, $G = \mathrm{Sp}_2 = \mathrm{SL}_2$ の場合のみ考えることにする. この場合, Kneser-Tits 予想は $\mathrm{SL}_2(F)$ が上三角行列と下三角行列で生成されることを意味する.

証明すべきは $G(\mathbb{Q})$ が $G(\mathbb{A}_f)$ で稠密であることである. これには閉包が全体であることをいえばよい. 閉包は閉部分群であることに注意する. アデールに対する強近似定理から, 1 つの素点で上三角（または下三角）で他の素点で単位行列となってい

[*7] 最初に一般的な場合でのアプローチを見つけたのは Kneser [Kne66] である. Hasse 原理を使う必要があるが, それは現在では完全に証明されている.

[*8] 土方によると Tits もさらに別証明を得ていたそうである.

[*9] 例えば `http://www.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/SU3.pdf` をみよ.

るような $G(\mathbb{A}_f)$ の元はすべて閉包に含まれる．各素数 p に対して, 上三角行列と下三角行列が $G(\mathbb{Q}_p)$ を生成することから, 閉包は $G(\mathbb{Q}_p)$ を含む．このような閉部分群は全体のみである[*10]. □

Siegel モジュラー多様体の話に戻る．次の系が直ちに得られる．$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})$ の作用は対角的とする．

系 3.3 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+ \cong \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})\backslash\big(\mathfrak{H}_g^+ \times \big(\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})\big)\big)$.

証明 写像は単位元 e を用いて, $[\tau] \mapsto [\tau, e\,\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})]$ で定める． □

ところで, $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^\pm$ が $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+$ と同型であった． 強近似定理自体は GSp_{2g} に対しては成立しないが, ν の（強い意味での）全射性と $\mathbb{A}_f^\times = \mathbb{Q}^\times\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ を用いると前の命題 3.1 は GSp に対しても成立する．

命題 3.4 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f) = \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})\,\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$.

したがって, 前と同様の議論を行うことで次が得られる．

系 3.5 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g^+ \cong \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})\backslash\big(\mathfrak{H}_g^\pm \times \big(\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})\big)\big)$.

4 モジュライ解釈 2

この節では, 前節の結果を背景に, アデールと GSp_{2g} を用いたモジュライ解釈を説明する．また, レベル構造も含めて考えることにする．モジュライ解釈 1 では同型類を考えていたが, 今度は同種類を考えるという違いもある．

前と同様に $\mathbb{C}$ 値点の場合から考えることにし, A を $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体とする．

$\mathbb{Q}$ 係数の偏極 (いわゆる $\mathbb{Q}$ 偏極) とは, $\mathrm{Hom}(A,\widehat{A})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の元 λ で偏極の正の有理数倍となるものであった．このとき, V_fA 上の (Tate 捻り $\mathbb{A}_f(1)$ に値を持つ）交代形式 e_λ が Weil ペアリングにより定まる．ただし, V_fA は $\mathbb{A}_f$ 係数の Tate 加群である．

レベル構造の定義は以下のようになる．同型

$$\eta\colon (\mathbb{A}_f^{2g}, \mathbb{A}_f, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (V_fA, \mathbb{A}_f(1), e_\lambda)$$

[*10] この証明は `http://math.stanford.edu/~conrad/248BPage/handouts/strongapprox.pdf` も参考にした．

の集合に $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)$ が右から作用している．ただし，同型の両辺の 3 つ組の真ん中は交代形式の終域であり，同型は終域を同一視したとき，交代形式が一致するという意味である．コンパクト開部分群 $K \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)$ が与えられたとき，軌道 ηK がレベル構造である．

3 つ組 $(A, \lambda, \eta K)$ 全体のなす集合に同種射により同値関係が入る． つまり，$(A', \lambda', \eta' K)$ をもう 1 つの 3 つ組として，$A \to A'$ を同種射とする．これは同型 $V_f A \xrightarrow{\cong} V_f A'$ を誘導するが，この同型により λ が λ' の有理数倍に対応するとする．すると，Tate 捻りの自己同型 $\mathbb{Q}(1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}(1)$ が唯一つ存在し，この同型を用いて e_λ の終域と $e_{\lambda'}$ の終域を同一視すると，2 つのペアリングが一致するようにできる．この同一視で $\eta' K$ が ηK と $V_f A \xrightarrow{\cong} V_f A'$ の合成であるという条件をさらに足す．このような条件を満たす同種射は同値関係をなす．その同値類の集合を $\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ と表すことにする．

命題 4.1 $\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}) \backslash \big(\mathfrak{H}_g^{\pm} \times \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/K\big)$.

証明 前の構成と同様にして $\mathfrak{H}_g^{\pm}$ が現れる．今回は同型

$$(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda, \mathbb{Q}(1), e_\lambda) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Q}^{2g}, \mathbb{Q}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

を選ぶことになる．交代形式の終域の同一視をしているため，$\mathbb{Q}^{2g}$ 上に定まる Hodge 構造が $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を偏極に持たないときがあり，そのとき $-\langle \cdot, \cdot \rangle$ が偏極になる．そのため，$\mathfrak{H}_g^{+}$ でなく $\mathfrak{H}_g^{\pm}$ が現れる．

次に有限アデールの部分の構成を説明する．次の合成

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}_f^{2g}, \mathbb{A}_f, \langle \cdot, \cdot \rangle) &\xrightarrow{\cong} (V_f A, \mathbb{A}_f(1), e_\lambda) \\ &\cong \mathbb{A}_f \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda, \mathbb{Q}(1), e_\lambda) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{A}_f^{2g}, \mathbb{A}_f, \langle \cdot, \cdot \rangle)\end{aligned}$$

を考える．一つ目の同型はレベル構造 ηK，二つ目の同型は Tate 加群と特異ホモロジーの比較同型で，最後の同型は上で選んだ同型

$$(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda, \mathbb{Q}(1), e_\lambda) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Q}^{2g}, \mathbb{Q}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

の係数拡大である．レベル構造が K の軌道であるので，この合成は $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/K$ の元を定める．

同型 $(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda, \mathbb{Q}(1), e_\lambda) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Q}^{2g}, \mathbb{Q}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の選び方が $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})$ だけあるので，それで割ることで所望の同型が得られる． □

注意 4.2 $K=\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$ とする．主偏極付アーベル多様体 $(A,\mathcal{L})$ が与えられたとき, Frobenius の補題により選んだ同型 $(\Lambda, E_{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}^{2g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ の逆写像を係数拡大して, Tate 加群に移ると $\eta\colon (\widehat{\mathbb{Z}}^{2g}, \widehat{\mathbb{Z}}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (T_f A, \widehat{\mathbb{Z}}(1), e_\lambda)$ が定まる．(ここで $T_f A$ は $\widehat{\mathbb{Z}}$ 係数の Tate 加群.) この同型の選び方は K だけあるから, これはちょうどレベル構造とみなせる．したがって, 自然な写像 $\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ が定まる．この写像は 2 つの全単射

$$\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})\backslash\big(\mathfrak{H}_g^{\pm} \times \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/K\big),$$
$$\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})\backslash\big(\mathfrak{H}_g^{\pm} \times \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)/K\big)$$

と整合的であるから, $\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ は全単射である．

これは, 同種類の中からレベル構造によって決まる主偏極付アーベル多様体の同型類を選ぶことができるということをいっている．つまり, 同型 η による $\widehat{\mathbb{Z}}^{2g}$ の像が $V_f A$ の自己双対な $\widehat{\mathbb{Z}}$ 格子を定め, これが同型類を決める．強近似定理の前に述べた命題 3.1 の証明も参照していただきたい．

注意 4.3 集合として $\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ は自然に $\Gamma\backslash\mathfrak{H}_g^{+}$($\Gamma$ は $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ の指数有限部分群) という形の集合の直和であることが示せる．これにより, 複素解析空間とみなす．一般に $\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ は連結ではないことを注意しておく．

レベル構造はより一般のスキーム S に対しても定義できる．これには普通 S を局所ネータースキームと仮定する．さらに連結成分ごとに考えることで S は連結としてよい．これらの仮定を置くのは, エタール基本群を考える上で便利だからである*11.

アーベルスキームを考える上で, 上の仮定をしてもよいのはアーベルスキームが底スキーム上有限表示型になるからである．また, これから考えるレベル構造は正標数で問題が生じることもあるので S は $\mathbb{Q}$ 上のスキームであるという仮定もする．

上の仮定を満たす S に対し, 幾何的点 $\overline{s}$ を取る．エタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(S,\overline{s})$ が定まる．さらに S 上の $\mathbb{Q}$ 係数の偏極付アーベルスキーム (A,λ) をとると, Tate 加群 $V_f A_{\overline{s}}$ に $\pi_1^{\text{ét}}(S,\overline{s})$ が左から作用している．

コンパクト開部分群 $K \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)$ が与えられたとき, レベル構造は $\eta\colon (\mathbb{A}_f^{2g}, \mathbb{A}_f, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (V_f A_{\overline{s}}, \mathbb{A}_f(1)_{\overline{s}}, e_\lambda)$ の K 軌道であって, $\pi_1^{\text{ét}}(S,\overline{s})$ の作用で閉

*11 SGA 1 では連結な局所ネータースキームに対して基本群が定義されているが, 局所ネーターという条件は必要ではない．しかし, 連結でないスキームの連結成分を考える際には, 連結成分が開集合になるよう, 局所ネーター性を課した方が分かりやすい．

じているものである. (ただし, $\pi_1^{\text{ét}}(S,\overline{s})$ は $\mathbb{A}_f(1)$ にも作用していることに注意せよ.) 適切な意味で, レベル構造は $\overline{s}$ の取り方によらないことがいえる. 3 つ組 $(A,\lambda,\eta K)$ の集合に同値関係が同種射を用いて定まる. 同値類の集合を $\mathcal{A}_{g,K}(S)$ で表す.

$\mathbb{Q}$ 上のネータースキームの圏から集合の圏への反変関手 $\mathcal{A}_{g,K}$ を $S\mapsto\mathcal{A}_{g,K}(S)$ を定める. この場合も粗モジュライスキームは存在する.

事実 4.4 $\mathcal{A}_{g,K}$ は $\mathbb{Q}$ 上準射影的な粗モジュライスキームを持つ.

レベル構造を決める群 K を少し小さくすれば, より精密な主張が得られる.

定義 4.5 関手 F がスキーム S で表現される時, S を F の精モジュライスキームという.

主合同部分群を $K(N)=\mathrm{Ker}\big(\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})\to\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\big)$ で定義する.

事実 4.6 N が 3 以上の時, $\mathcal{A}_{g,K(N)}$ は $\mathbb{Q}$ 上準射影的な精モジュライスキームを持つ.

これは $\mathcal{A}_{g,K(N)}$ 上に普遍的アーベルスキームの同種類が存在することを意味する. この事実の証明も清水氏の記事を参照していただきたい.

注意 4.7 主合同部分群 $K(N)$ に対しては, 主偏極付アーベル多様体 (またはアーベルスキーム)A を用いれば, レベル構造は $A[N]$ を用いて書ける. すなわち, S を $\mathbb{Q}$ 上の連結ネータースキームとして, 同型

$$((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g},\mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\langle\cdot,\cdot\rangle)\xrightarrow{\cong}(A[N](S),\mu_N(S),e_\lambda)$$

のことである. この定式化を使うと, $\mathcal{A}_{g,K(N)}$ 上普遍的アーベルスキームの同種類でなく同型類が考えられる. 事実 4.6 の証明も同型類の定式化の方で証明することになる.

この言い換えを確かめよう. まず 3 つ組 $(A,\lambda,\eta K(N))$ の同種類が, 主偏極付アーベル多様体 $(A,\mathcal{L})$ と同型 η: $(\widehat{\mathbb{Z}}^{2g},\widehat{\mathbb{Z}},\langle\cdot,\cdot\rangle)\xrightarrow{\cong}(T_fA_{\overline{s}},\widehat{\mathbb{Z}}(1),e_\lambda)$ の $K(N)$ 軌道で $\pi_1^{\text{ét}}(S,\overline{s})$ 不変なものの組と対応することはすでに分かっている.

この $K(N)$ 軌道から同型 $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g},\mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\langle\cdot,\cdot\rangle)\xrightarrow{\cong}(A_{\overline{s}}[N],\mu_{N,\overline{s}},e_\lambda)$ が得られ, $\pi_1^{\text{ét}}(S,\overline{s})$ 不変である. 今, S は $\mathbb{Q}$ 上のスキームであるので, $A[N]$ は S 上有限エタールである. したがって, 同型 $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g},\mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\langle\cdot,\cdot\rangle)\xrightarrow{\cong}(A[N](S),\mu_N(S),e_\lambda)$

が定まる.

逆に, 同型 $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (A[N](S), \mu_N(S), e_\lambda)$ が与えられたとすれば, $\pi_1^{\text{ét}}(S,\overline{s})$ 不変な同型 $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (A_{\overline{s}}[N], \mu_{N,\overline{s}}, e_\lambda)$ が得られる. この同型の持ち上げ $\eta\colon (\widehat{\mathbb{Z}}^{2g}, \widehat{\mathbb{Z}}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (T_f A_{\overline{s}}, \widehat{\mathbb{Z}}(1)_{\overline{s}}, e_\lambda)$ が存在するとすれば, 持ち上げのなす集合は $\pi_1^{\text{ét}}(S,\overline{s})$ 不変な $K(N)$ 軌道になる. 最後に, 持ち上げの存在を確かめる. 同型 $(\widehat{\mathbb{Z}}^{2g}, \widehat{\mathbb{Z}}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (T_f A_{\overline{s}}, \widehat{\mathbb{Z}}(1)_{\overline{s}}, e_\lambda)$ が存在するので 1 つ取る. (Frobenius の補題を参照.) これは与えられた同型の持ち上げにはなっていないかもしれないが, そのずれは $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の元で表せる. 強近似定理より $\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ が全射であるので, 同型を取り直せば所望の持ち上げが得られる.

5 虚数乗法論の帰結

絶対 Galois 群 $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}})$ が $\mathcal{A}_{g,K}(\overline{\mathbb{Q}})(\subset \mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C}))$ に作用している. このうちアーベル多様体が虚数乗法を持つ部分について, 絶対 Galois 群の作用を (部分的に) 記述することができ, これは志村多様体の正準モデルの特徴付けとして解釈されることになる.

この記述はいわゆる虚数乗法論を用いることで可能となる. アーベル多様体に対する虚数乗法論*12については志村と谷山の本 [ST57, ST61, Shi98] や Milne のノート [Mil06, Mil07] の他, 最近出版された Chai-Conrad-Oort の本 [CCO14] の中でまとめられているのが参考になる.

5.1 CM アーベル多様体

定義 5.1 総実体 L^+ の総虚 2 次拡大 L を CM 体という. CM 体の有限直積を CM 代数と呼ぶ.

CM 体 L には複素共役が定まる. つまり, L の自己同型であって, 任意の埋め込み $L \to \mathbb{C}$ に対して, 複素共役と同一視できるものが存在する. 実際, $L \supset L^+$ の Galois

*12 志村, 谷山, Weil によって同時期に創始された. (それ以前については, [ST57] の第 1 章に説明されている.) 1955 年に東京と日光で開催された国際会議の記録は大変興味深い: http://mathsoc.jp/pamph/history/Nikko1955/ および http://www.jmilne.org/math/Documents/TokyoNikko1955.pdf

群の非自明な元がそのようなものである．CM 体は複素共役が定まるような体で, 総実体[*13] でないものとしても特徴づけられる．直積をとることで, CM 代数 L にも複素共役が定まる．CM 代数 L に対しても, 複素共役で固定される部分を L^+ と書く．

アーベル多様体を考える上で, CM 体が自然に現れるのは例えば次の例から分かる．

例 5.2　$\mathbb{C}$ 上の g 次元単純アーベル多様体 A に対し, $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ 上の次数 $2g$ の体とする．このとき, $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は CM 体 L である．さらに, 任意の偏極 $\mathcal{L}$ に対し, Rosati 対合は L の複素共役を定める．

一般には, $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に含まれる次数 $2g$ の体は CM 体と限らない．例えば, A が虚数乗法を持つ楕円曲線 E の直積とすると, $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は $M_2(\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q})$ であり虚 2 次体 $\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の 2 次拡大をすべて含む．代わりに, 次が成立する．

命題 5.3　$\mathbb{C}$ 上の g 次元アーベル多様体 A に対し, $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が代数体の直積 P であって $\dim_{\mathbb{Q}} P = 2g$ となるものを含むとする．このとき, $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は CM 代数 L であって $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2g$ となるものを含む．

証明　単純アーベル多様体 A' の場合には, 仮定から $\mathrm{End}(A') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ 上の次数 $2 \dim A'$ の体であることが示せるため, 上の例よりよい．直積 $A = (A')^m$ に対しては, A' が同じ仮定を満たすことが示せ, CM 体上の次数 m の CM 代数[*14]を構成する問題に帰着さる．これは難しくない．一般の場合もこの直積の場合に帰着できる．　□

さて, $\mathbb{C}$ 上の g 次元アーベル多様体 A と CM 代数 L を $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2g$ と取り, 埋め込み $i \colon L \to \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が与えられたとする．単位元での接空間 $\mathrm{Lie}\, A$ には L が作用している．$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Lie}\, A = g$ であることに注意して, いくつかの定義を導入する．

定義 5.4　L を CM 代数で $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2g$ なるものとする．集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(L, \mathbb{C})$ の g 元部分集合 Φ とその複素共役 $\overline{\Phi}$ が $\Phi \sqcup \overline{\Phi} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(L, \mathbb{C})$ を満たすとき, (L, Φ) を CM 型[*15]という．

直和 $t_{\Phi,\mathbb{C}} = \bigoplus_{\Phi} \mathbb{C}$ には L が次のように作用している: Φ の元は射影 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} L \to \mathbb{C}$ に対応し, この成分にはこの射影と埋め込み $L \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ の合成で作用する．

[*13] 総実体も含めて CM 体と呼ぶ人もいる．この場合, 総実体でないものは虚 CM 体と呼ぶ．

[*14] 実はこの場合は L は CM 体で取れる．

[*15] Φ を CM 型といい, (L, Φ) を CM 対といったほうが正確かもしれない．

定義 5.5 k を $\mathbb{C}$ の部分体とし, A を k 上の g 次元アーベル多様体とする. 埋め込み $i\colon L \to \mathrm{End}_k(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が与えられていて, $\mathbb{C}$ 上の L 加群 $\mathbb{C} \otimes_k \mathrm{Lie}\, A$ が $t_{\Phi,\mathbb{C}}$ に同型であるとき, (A, i) を k 上の CM 型 (L, Φ) の CM アーベル多様体と呼ぶ.

例 5.6 石塚氏の記事にあるように, 任意の CM 型に対し, $\mathbb{C}$ 上の CM アーベル多様体を具体的に構成できる.

CM アーベル多様体に関して次は基本的事実である. 以下, $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{C}$ での代数閉包を $\overline{\mathbb{Q}}$ と書くことにする.

定理 5.7 $(A, i\colon L \to \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ を $\mathbb{C}$ 上の CM アーベル多様体とすると, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の CM アーベル多様体 $(A', i'\colon L \to \mathrm{End}(A') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ と擬同種射 $A \to A'_{\mathbb{C}}$ であって, i と i' と整合的なものが存在する. (このような擬同種射を L 同種射と呼ぶ.) さらに, このような (A', i') は L 同種射によるずれを除いて一意であり, CM 型 (L, Φ) のみによって決まる.

なお, (A, i) の自己擬同種射であって, L 同種なものの集合は L に等しい. これはよく知られているように $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元で L と可換なものが L の元のみだからである.

上の定理により CM アーベル多様体の L 同種類は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されているので, ある代数体上定義される. 次に, この定義体が満たすべき条件について述べる.

絶対 Galois 群 $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \mathbb{C})$ に左から作用している.

定義 5.8 CM 型 (L, Φ) のリフレックス体 E[*16]を, $\mathbb{C}$ の部分体であって, $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ に対し, $\sigma \in \Gamma_E = \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ が $\sigma\Phi = \Phi$ と同値になるものとして定義する.

いくつかの定義の言い換えがある. 例えば, E は $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(a)$ $(a \in L)$ で生成される $\mathbb{C}$ の部分体である. これは指標の独立性 (Dedekind) より従う. これより, E には複素共役が定義できる. 再び指標の独立性により, この複素共役は恒等写像でないから, リフレックス体は CM 体であると分かる.

また, Galois 降下により $t_{\Phi,\mathbb{C}}$ が E 上定義される. つまり, E 上の L 加群 t_Φ であって, $t_{\Phi,\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \otimes_E t_\Phi$ となるものが (同型を除いて唯一つ) 存在する. 逆に, リフレックス体はこのような体のうち最小なものとしても定義できる. (A, i) を CM 型が (L, Φ)

[*16] 昔は双対体とも呼ばれていた.

の k 上の CM アーベル多様体とする．L 加群 $\mathrm{Lie}\,A$ は k 上定義されているので, k はリフレックス体 E を含まなければならない．(ただし, CM アーベル多様体の L 同種類が E 上常に定義されるとは限らない.)

5.2 虚数乗法論

ここでは虚数乗法論の基本定理といえるものを紹介する．これは, CM アーベル多様体 (A, i) への Γ_E の作用を記述するものである．

偏極[*17]を含めた方が精密であるため, そして後で Siegel モジュラー多様体を考えるということもあり, ここでは偏極も込めて理論を展開する．

部分体 $k \subset \mathbb{C}$ 上の CM アーベル多様体 $(A, i\colon L \to \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ を考える．双対アーベル多様体 $\widehat{A}$ には $l \mapsto \widehat{i(\bar{l})}$ で虚数乗法が定まり, CM アーベル多様体となる．双対アーベル多様体の CM 型は (A, i) と同じである．

$\mathbb{Q}$ 係数の偏極が $\lambda\colon A \to \widehat{A}$ が L 同種射であるとき, L 線形であるという．これは, λ から定まる Rosati 対合が L の複素共役に対応していることと同値である．

命題 5.9 CM アーベル多様体は L 線形な $\mathbb{Q}$ 係数の偏極を持つ．このような偏極は $(L^+)^\times$ を除いて一意である．

以下では, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の CM アーベル多様体と L 線形な $\mathbb{Q}$ 係数の偏極の 3 つ組 (A, i, λ) を考える．CM 型を (L, Φ) とし, リフレックス体 $E(\subset k)$ の絶対 Galois 群の元 σ をとる．

底変換により得られるアーベル多様体 ${}^\sigma A$ には自然に虚数乗法

$$ {}^\sigma i\colon L \to \mathrm{End}({}^\sigma A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} $$

および L 線形な $\mathbb{Q}$ 係数の偏極 ${}^\sigma\lambda$ が定まる．CM アーベル多様体 $({}^\sigma A, {}^\sigma i)$ の CM 型は $(L, \sigma\Phi) = (L, \Phi)$ であるので, 定理 5.7 より L 同種射 $\varphi_\sigma\colon {}^\sigma A \to A$ が存在する．このような L 同種射は $L^\times$ による作用を除いて一意であった．

偏極 λ と ${}^\sigma\lambda$ は L 同種射 φ_σ により保たれるとは限らないが, φ_σ を適切にとると, Weil ペアリング e_λ と $e_{({}^\sigma\lambda)}$ が有理数倍を除いて一致することが証明できる．このような φ_σ はノルム $L \to L^+$ による $\mathbb{Q}^\times$ の逆像の作用を除いて一意である．$\mathbb{Q}$ 上の

[*17] ちなみに代数多様体の偏極は Weil が虚数乗法論の論文 [Wei56] で導入している．

トーラス T をノルム $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{L}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\to\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{L^+}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ による $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の逆像で定義すれば, φ_σ は $T(\mathbb{Q})$ による作用を除いて一意ということになる.

一方 σ は L 線形な同型 $V_fA\xrightarrow{\cong}V_f({}^{\sigma}A)$ を誘導し, e_λ と $e_{({}^{\sigma}\lambda)}$ は定数倍 ($\mathbb{A}_f^\times$ の元) を除いて一致する. したがって, 合成

$$V_fA\xrightarrow{\sigma}V_f({}^{\sigma}A)\xrightarrow{V_f(\varphi_\sigma)}V_fA$$

は L 線形で Weil ペアリング e_λ を定数倍を除いて保つ.

ここで φ_σ の取り方は $T(\mathbb{Q})$ だけあったことに注意すると, これは $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)$ の元を定める. さらに, 次が示せる:

命題 5.10 写像 $\Gamma_E\to T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f);\sigma\mapsto[V_f(\varphi_\sigma)\circ\sigma]$ は連続準同型である.

ただし, 気を付けなければならないのは $L^\times\backslash\mathbb{A}_{L,f}^\times$ はハウスドルフと限らないことである. (Milne [Mil05] の出版版はこの点を見逃しているが, [Mil06, Mil07] ではこれが問題にならない議論に修正されている.)

例 5.11 CM 体 L が $L^+\neq\mathbb{Q}$ を満たすとき, $L^\times\backslash\mathbb{A}_{L,f}^\times$ はハウスドルフでない.

実際, 閉集合 $L^{+,\times}\backslash\mathbb{A}_{L^+,f}^\times$ はハウスドルフでない: 有限生成アーベル群である単数群 $O_{L^+}^\times$ は, 位数無限の元を含むので, 副有限群 $(O_{L^+}\otimes_{\mathbb{Z}}\widehat{\mathbb{Z}})^\times$ 内で閉集合でなく, その商はハウスドルフにならない.

補題 5.12 位相空間 $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)$ はハウスドルフである.

証明 ここでは [CCO14] の A.2.4.2 Lemma の証明に従う. 主張より強く, $T(\mathbb{Q})$ が $T(\mathbb{A}_f)$ で離散的であることを示す.

トーラス T は $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ を含むが, $\mathbb{Q}^\times$ が $\mathbb{A}_f^\times$ で離散的であるので, $\overline{T}=T/\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ とおいて $\overline{T}(\mathbb{Q})$ が $\overline{T}(\mathbb{A}_f)$ で離散的であることを示せばよい.

ここで $\overline{T}(\mathbb{Q})$ が $\overline{T}(\mathbb{A})$ で離散的であることに注意すると, $\overline{T}(\mathbb{R})$ がコンパクトであることを示せばよいと分かる. また, Hilbert の定理 90 より, $\overline{T}(\mathbb{R})\cong T(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ である.

トーラス T の定義より, $T(\mathbb{R})$ はノルム

$$(L\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times=\prod_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(L^+,\mathbb{R})}\mathbb{C}^\times\to(L^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times=\prod_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(L^+,\mathbb{R})}\mathbb{R}^\times$$

での対角集合 $\mathbb{R}^\times$ の逆像である．よって, $T(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ は

$$(\prod_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(L^+,\mathbb{R})} \mathbb{C}^\times)/\{\pm 1\}$$

のすべての成分で絶対値が 1 であるような元の像からなる部分群であり, コンパクトである． □

位相的アーベル化 Γ_E^{ab} は定義よりハウスドルフなので,

系 5.13　連続準同型 $\Gamma_E \to L^\times\backslash\mathbb{A}_{L,f}^\times; \sigma \mapsto [V_f(\varphi_\sigma)\circ\sigma]$ は Γ_E^{ab} を経由する．

虚数乗法論では, この準同型を類体論を用いて記述する．まず,

$$\mathrm{Art}_E\colon \mathbb{A}_{E,f}^\times = (\mathbb{A}_f \otimes_{\mathbb{Q}} E)^\times \to \Gamma_E^{\mathrm{ab}}$$

を Artin 相互写像とする．ここでは幾何的 Frobenius 元の持ち上げが素元と対応するようにする．この準同型 Art_E は E が CM 体であるから全射である．

上の写像を記述するため, σ の Γ_E^{ab} での像の $\mathbb{A}_{E,f}^\times$ への持ち上げ s を取り, 準同型 $\Gamma_E^{\mathrm{ab}} \to L^\times\backslash\mathbb{A}_{L,f}^\times$ と Art_E との合成を考える．これを CM 型を用いて記述するためにリフレックスノルムを定義する．

定義 5.14　(L,Φ) を CM 型とする．リフレックス体 E 上の L 加群 t_Φ から, 準同型 $N_\Phi\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^L \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ が定まる．これをリフレックスノルムという．

例えば $\mathbb{Q}$ 値点を考えると, L は体の直積であるから, E の t_Φ への L 上の作用の行列式を取ることで $E^\times \to L^\times$ が定まる．同様にしてリフレックスノルムが代数群の射として定まる．特に有限アデール値点を考えると, $\mathbb{A}_{E,f}^\times \to \mathbb{A}_{L,f}^\times$ を得る．

また, リフレックスノルムとノルム $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^L \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{L^+} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の合成はノルム $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^E \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ に等しいことが示せるので, リフレックスノルムはトーラス T を経由することも注意しておく．

次がこの節の主定理である．

定理 5.15　合成 $\mathbb{A}_{E,f}^\times \to \Gamma_E^{\mathrm{ab}} \to L^\times\backslash\mathbb{A}_{L,f}^\times$ による $s \in \mathbb{A}_{E,f}^\times$ の像は, $N_\Phi(s)$ の類と一致する．

これはいわゆる志村谷山公式[*18]から従うが, 直ちに従うというわけでもない．ここ

[*18] この公式は谷山 [Tan56] によって主張されたが, 証明にギャップがあり, 志村が修正したそうであ

では説明しないので, 詳細は [CCO14] の Appendix A や Milne [Mil07] を見ていただきたい. 志村谷山公式の証明自体は現在では色々あり, 例えば Milne [Mil06] で紹介されている.

注意 5.16 上で紹介した虚数乗法論の基本定理といえるものから, CM アーベル多様体について色々な結果が導ける. これについては例えば [CCO14] の 2.5 節と Appendix A にまとめられている.

また, 志村 [Shi98] は (A, i, λ) の定義体についても色々な結果を得ている. 特に, この 3 つ組の L 同種類は field of moduli と呼ばれる E 上すべての素点で不分岐な有限拡大において定義される. これも [CCO14] の Appendix A に解説がある.

さらに, $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ がリフレックス体を固定しない場合にも Galois 作用を記述することはできる. これは Langlands [Lan79] と Deligne [DMOS82] による[*19]. また, Tate の未発表の結果が [Mil07] で紹介されている.

5.3 Siegel モジュラー多様体と虚数乗法論

3 つ組 $(A, \lambda, \eta K)$ であって, A が CM アーベル多様体 $(A, i\colon L \to \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ をなし, λ が L 線形であるという状況を考える. 定理 5.7 より, A の L 同種類は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されているから, $[(A, \lambda, \eta K)] \in \mathcal{A}_{g,K}(\overline{\mathbb{Q}})$ となる. ($\mathbb{Q}$ 係数の偏極とレベル構造は自動的に $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義される.)

CM 型を (L, Φ) とし, E をリフレックス体とする. ここでは $\sigma \in \Gamma_E$ の $[(A, \lambda, \eta K)]$ への作用を記述する.

前節のように $[\sigma] \in \Gamma_E^{\mathrm{ab}}$ の $\mathbb{A}_{E,f}^{\times}$ での持ち上げ s を取る. リフレックスノルム $N_{\Phi}(s)$ は $T(\mathbb{A}_f) \subset \mathbb{A}_{L,f}^{\times}$ の元であった. (T は前節で定義した $\mathbb{Q}$ 上のトーラス.) このことと $\mathbb{Q}$ 係数の偏極 λ は L 線形であることを合わせると,

$$V_f\bigl(i_{\mathbb{A}_f}(N_{\Phi}(s))\bigr)\colon V_f A \to V_f A$$

は Weil ペアリング e_{λ} を定数倍を除いて保つことになる. したがって, $N_{\Phi}(s)$ は同型

$$(\mathbb{A}_f^{2g}, \mathbb{A}_f, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (V_f A, \mathbb{A}_f(1), e_{\lambda})$$

る. これは [Tan57] の p.365 と [Hon68] の p.89 に説明がある.

*19 Fargues による解説も参考になる: `http://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/Motifs_abeliens.pdf`

の集合に左から作用していて, $N_\Phi(s)\eta K$ が定まる. これは s に依存しているが, $N_\Phi(s)$ は $T(\mathbb{Q})$ の作用を除けば一意である. この $T(\mathbb{Q})$ の作用は e_λ を有理数倍を除いて保つような L 同種射で定まっているから, 同値類 $[(A, \lambda, N_\Phi(s)\eta K)]$ が定義される.

次は前節の主定理の系である.

系 5.17 $\sigma \cdot [(A, \lambda, \eta K)] = [(A, \lambda, N_\Phi(s)\eta K)]$.

証明 定理 5.15 より, 合成

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}_f^{2g}, \mathbb{A}_f, \langle\cdot,\cdot\rangle) &\xrightarrow{\eta} (V_f A, \mathbb{A}_f(1), e_\lambda) \\ &\xrightarrow{\sigma} (V_f({}^\sigma A), \mathbb{A}_f(1), e_{({}^\sigma\lambda)}) \xrightarrow{\varphi_\sigma} (V_f A, \mathbb{A}_f(1), e_\lambda)\end{aligned}$$

は $N_\Phi(s)\eta$ と等しい.

これは 3 つ組 $({}^\sigma A, {}^\sigma\lambda, \sigma\eta K)$ が, L 同種射 φ_σ によって, $(A, \lambda, N_\Phi(s)\eta K)$ に等しいことを意味するので主張が従う. □

特に, $[(A, \lambda, \eta K)]$ は E^{ab} 上定義されることが分かる.

最後に, 志村多様体の枠組みに沿った言い換えをする. 今井氏の記事も参照されたい.

点 $[(A, \lambda, \eta K)] \in \mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ が与えられたとき, 型 $(-1, 0), (0, -1)$ の偏極付 Hodge 構造 $(H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), H^{-1,0} = \operatorname{Lie} A, e_\lambda)$ が定まっていた. さらに同型 $(H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \mathbb{Q}(1), e_\lambda) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Q}^{2g}, \mathbb{Q}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を選ぶと, これは準同型

$$x\colon \operatorname{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{GSp}_{2g,\mathbb{R}}$$

に対応していた.

ここで, x が GSp_{2g} の $\mathbb{Q}$ 上定義されるトーラス $T(x)$ を経由すると仮定する. (つまり, 志村多様体の点として特殊点あるいは CM 点ということである.) あるいは, Mumford-Tate 群 (または Hodge 群[*20]) が $\mathbb{Q}$ 上のトーラスであるといってもよい.

Mumford [Mum69] の次の補題がある.

補題 5.18 上の仮定の下で, A は虚数乗法を持つ. すなわち $i\colon L \to \operatorname{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ であって, (A, i) が CM アーベル多様体となるものが存在する.

[*20] そもそも Hodge 群は Mumford が [Mum69] で定義したものである.

証明 準同型 x の像の中心化群を $\mathrm{GL}_{2g,\mathbb{R}}$ 内で考える. これは $T(x)_{\mathbb{R}}$ を含み, さらに $T(x)$ を含むような $\mathbb{Q}$ 上定義される極大トーラスも含む. この極大トーラスは $\mathrm{GL}_{2g,\mathbb{R}}$ でも $\mathbb{Q}$ 上定義される極大トーラスであり, $\mathbb{Q}$ 上の次数 $2g$ の体の直積 P を用いて, $P^{\times}$ と書ける.

さて, $\mathrm{End}(H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))$ の元で x と可換なものは, Hodge 構造としての自己同型でもあるから, $\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の元と対応する. これから, 埋め込み $P \to \mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ が得られる. これに命題 5.3 を適用すればよい. □

さらに, 虚数乗法を取り換えると λ が L 線形であると仮定してよい. 実際, これはすべての Rosati 対合が $(\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})^{\times}$ の共役作用で移りあうことから従う. したがって, $(A,\lambda,\eta K)$ には前に説明した結果が使え, リフレックス体を固定するような Galois 作用はリフレックスノルムを用いて記述される. しかし, リフレックス体とリフレックスノルムが (x だけでなく)CM 型 (L,Φ) に依っているかもしれないので, この部分の処理をする.

まず, $\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の中心 $P(x)$ が CM 代数であることに注意する. トーラス $P(x)^{\times}$ は自然に $\mathrm{GL}(H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))$ へ埋め込まれ, $x\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to P(x)_{\mathbb{R}}^{\times}$ を誘導する. 余指標 $\mu(x)\colon \mathbb{C}^{\times} \to P(x)_{\mathbb{C}}^{\times}$ を, id に対応する埋め込み $\mathbb{C}^{\times} \to (\mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}})(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times}\times\mathbb{C}^{\times}$ との合成で定義する. 合成 $\mathbb{C}^{\times} \to P(x)_{\mathbb{C}}^{\times} \to L_{\mathbb{C}}^{\times}$ の定義体がリフレックス体に等しいことは簡単に分かるが, これは $\mu(x)$ の定義体 $E(x)$ と一致するから x のみに依る.

リフレックス体上の余指標 $\mu(x)\colon E(x)^{\times} \to (E(x)\otimes_{\mathbb{Q}} P(x))^{\times}$ はノルムと合成することで $r_x\colon E(x)^{\times} \to P(x)^{\times}$ に対応する.

補題 5.19 合成 $E(x)^{\times} \xrightarrow{r_x} P(x)^{\times} \to L^{\times}$ はリフレックスノルムに等しい.

証明 リフレックスノルムは [CCO14] の 2.1.3.4. Proposition より, $\mu(x)$ とノルムの合成 $E(x)^{\times} \to (E(x)\otimes_{\mathbb{Q}} L)^{\times} \to L^{\times}$ に等しいのでよい. □

以上をまとめて, 次の結論を得る.

系 5.20 $\sigma\cdot[(A,\lambda,\eta K)] = [(A,\lambda,r_x(s)\eta K)]$.

これは $\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 $\mathcal{A}_{g,K}$ が [Mil05] の意味で志村多様体 $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g},\{h\})$

の正準モデルであることを意味している. ここで,

$$h\colon \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R}); \quad a+b\sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} a\cdot I_g & b\cdot I_g \\ -b\cdot I_g & a\cdot I_g \end{pmatrix}$$

とし, $\{h\}$ はその共役類である.

注意 5.21 以下で説明するように, $\mathcal{A}_{g,K}$ がどの志村多様体の正準モデルになっているかは正準モデルの定義に依る. 上での正準モデルの定義は [Mil05] に従っており, [Del71, Del79] の正準モデルの定義とはずれている. [Del71] では $\mathcal{A}_{g,K}$ が $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g}, \{h^{-1}\})$ の正準モデルとなる[*21]. [Del79] については下記を参照せよ. 志村データが与えられたとき, 正準モデルの定義に現れる式は, 次のものを選ぶことで決まる.

(1) Artin 相互写像.
(2) 余指標を $\mathrm{Res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の表現からどう定めるか.
(3) 上 2 つを決めた上で, さらに符号を変える操作をするか.

(3) は [Del71] および [Del79] で実際に符号を変える操作があるために言及している. ([Del71] では (3.9.1), [Del79] では p.269 にある $r_E(T,X)$ の定義.) さらに, [Del71] では志村多様体を定義する商の取り方がそもそも左右逆になっており, これも正準モデルの定義に影響する

残念ながら, [Del71], [Del79], [Mil05] ではこれらの選び方が完全には一致していないため, 混乱しやすくなっている. (1) と (2) については [Del71] が [Del79], [Mil05] の 2 つから異なる. また, [Mil05] では (3) の操作はしない. [Del71] の式は最終的には h^{-1} に対応するような式になっている. つまり $\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ を $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g}, \{h^{-1}\})$ と集合として同一視すると成立する式になる. これらについては, [Mil90] とそこに含まれている Deligne の返事もみられたい.

上のように Deligne が最初に定義をしたのは, [Del71] での Hodge 構造と $\mathrm{Res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の表現の対応からすれば, $\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ を $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g}, \{h^{-1}\})$ と同一視すべきだからだと思われる. しかし, [Del79] では Hodge 構造と $\mathrm{Res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の表現の対応を変えているため, [Del79] では $\mathcal{A}_{g,K}(\mathbb{C})$ を $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g}, \{h\})$ と同一視するのが自然である. ところが, この同一視では正準モデルの式が成立しない. さらにいえば, こ

[*21] ただし [Del71] では志村多様体の商の取り方が左右逆である. そのため, 紛らわしいが [Del71] と [Del79, Mil05] では $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}, \{h^{-1}\})$ の表すもの自体が正確には異なる.

の同一視は Hodge 構造の変動が正則になるような複素構造と整合的である一方で, $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g}, \{h^{-1}\})$ との安直な同一視を考えると複素構造と整合的でなくなる. ($\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g}, \{h^{-1}\})$ と $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g}, \{h\})$ の複素構造は共役の関係になる.) つまり, 少なくとも安直な同一視の下では, $\mathrm{Sh}_K(\mathrm{GSp}_{2g}, \{h^{-1}\})$ も [Del79] では正準モデルでない.

■謝辞　サマースクールの運営に携わった皆様, 原稿にコメントを下さった石塚裕大氏, 松本雄也氏, 今井直毅氏に御礼申し上げます.

参考文献

[Bai58] Walter L. Baily, Jr. Satake's compactification of V_n. *Amer. J. Math.*, Vol. 80, pp. 348–364, 1958.

[Bai62] Walter L. Baily, Jr. On the theory of θ-functions, the moduli of abelian varieties, and the moduli of curves. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 75, pp. 342–381, 1962.

[Car58] *Séminaire Henri Cartan; 10e année: 1957/1958. Fonctions Automorphes.* 2 vols. Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1958.

[CCO14] Ching-Li Chai, Brian Conrad, and Frans Oort. *Complex multiplication and lifting problems*, Vol. 195 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[Del71] Pierre Deligne. Travaux de Shimura. In *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389*, pp. 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244. Springer, Berlin, 1971.

[Del79] Pierre Deligne. Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pp. 247–289. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih.

Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, Vol. 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[FC90] Gerd Faltings and Ching-Li Chai. *Degeneration of abelian varieties*, Vol. 22 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. With an appendix by David Mumford.

[Fro79] G. Frobenius. Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 86, pp. 146–208, 1879.

[Hij75] Hiroaki Hijikata. On the structure of semi-simple algebraic groups over valuation fields. I. *Japan J. Math. (N.S.)*, Vol. 1, No. 2, pp. 225–300, 1975.

[Hon68] Taira Honda. Isogeny classes of abelian varieties over finite fields. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 20, pp. 83–95, 1968.

[Igu60] Jun-ichi Igusa. Arithmetic variety of moduli for genus two. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 72, pp. 612–649, 1960.

[Kne66] Martin Kneser. Strong approximation. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pp. 187–196. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Lan79] R. P. Langlands. Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pp. 205–246. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, Vol. 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[Mil90] J. S. Milne. Letter to Deligne, 1990. `http://www.jmilne.org/math/articles/1990b.pdf`.

[Mil05] J. S. Milne. Introduction to Shimura varieties. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Vol. 4 of *Clay Math. Proc.*, pp. 265–378. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Mil06] J. S. Milne. Complex multiplication, 2006. `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/CM.pdf`.

[Mil07] J. S. Milne. The fundamental theorem of complex multiplication, 2007. `http://www.jmilne.org/math/articles/2007c.pdf`.

[Mum65] David Mumford. *Geometric invariant theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Band 34. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965.

[Mum69] D. Mumford. A note of Shimura's paper "Discontinuous groups and abelian varieties". *Math. Ann.*, Vol. 181, pp. 345–351, 1969.

[NS64] M. Newman and J. R. Smart. Symplectic modulary groups. *Acta Arith*, Vol. 9, pp. 83–89, 1964.

[Oor77] Frans Oort. Singularities of coarse moduli schemes. In *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil, 29ème année (Paris, 1975–1976)*, Vol. 586 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 61–76. Springer, Berlin, 1977.

[Pla69] V. P. Platonov. The problem of strong approximation and the Kneser-Tits hypothesis for algebraic groups. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, Vol. 33, pp. 1211–1219, 1969.

[PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, Vol. 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[Pra77] Gopal Prasad. Strong approximation for semi-simple groups over function fields. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 105, No. 3, pp. 553–572, 1977.

[Sat56] Ichiro Satake. On the compactification of the Siegel space. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, Vol. 20, pp. 259–281, 1956.

[Shi63] Goro Shimura. Arithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 15, pp. 33–65, 1963.

[Shi66] Goro Shimura. Moduli and fibre systems of abelian varieties. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 83, pp. 294–338, 1966.

[Shi98] Goro Shimura. *Abelian varieties with complex multiplication and modular functions*, Vol. 46 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton

University Press, Princeton, NJ, 1998.

[Sie35] Carl Ludwig Siegel. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 36, No. 3, pp. 527–606, 1935.

[Sie39] Carl Ludwig Siegel. Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. *Math. Ann.*, Vol. 116, pp. 617–657, 1939.

[ST57] 志村五郎, 谷山豊. 近代的整数論. 共立出版, 東京, Japan, 1957.

[ST61] Goro Shimura and Yutaka Taniyama. *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, Vol. 6 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961.

[Tan56] Yutaka Taniyama. Jacobian varieties and number fields. In *Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko, 1955*, pp. 31–45. Science Council of Japan, Tokyo, 1956.

[Tan57] Yutaka Taniyama. L-functions of number fields and zeta functions of abelian varieties. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 9, pp. 330–366, 1957.

[Tit64] J. Tits. Algebraic and abstract simple groups. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 80, pp. 313–329, 1964.

[Wei56] André Weil. On the theory of complex multiplication. In *Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko, 1955*, pp. 9–22. Science Council of Japan, Tokyo, 1956.