プレサマースクール

伊藤哲史 述,　　　三枝洋一 記

1　はじめに

このサマースクールで扱う志村多様体とは，代数体（すなわち，$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体）上の代数多様体[*1]であって，その $\mathbb{C}$ 値点が $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群 G を用いて

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/KK_\infty$$

という形に書けるもののことである．ここで，$\mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環を表す（アデール環については 2 節を参照）．また，K は $G(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群であり（$\mathbb{A}_f$ は $\mathbb{Q}$ の有限アデール環を表す），K_∞ は $G(\mathbb{R})$ の中心を法としてコンパクトな閉部分群である．この両側剰余は，

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/KK_\infty = \coprod_i \Gamma_i\backslash X$$

と書き直すことができる．ここで，$X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ は $G(\mathbb{R})$ が推移的に作用する複素多様体であり，Hermite 対称領域の有限直和となるものである（Hermite 対称領域については [阿部] 参照）．また，Γ_i は $G(\mathbb{Q})$ の数論的部分群である（[大島, 1 節] 参照）．上記の志村多様体は $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ などと書かれる．

本稿においては，$G = \mathrm{GL}_1$ および $G = \mathrm{GL}_2$ の場合に，志村多様体 $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ がどのようになるかを解説し，サマースクールで扱われる，より複雑な志村多様体に対する「予防接種」を行うことを目標とする．$G = \mathrm{GL}_1$ の場合，$\mathrm{Sh}_K(G,X)$ は類体論と深く関係する．また，$G = \mathrm{GL}_2$ の場合，$\mathrm{Sh}_K(G,X)$ はモジュラー曲線および虚数乗法論と深く関係する．そのため，2 節で，記号の固定も兼ねて，まず局所体および

*1 本稿における代数多様体とは，体上分離有限型かつ幾何学的被約であるものを指すことにする．志村多様体は一般に幾何学的連結にならないため，幾何学的連結性は仮定しない．

代数体に対する類体論を復習する．その後 3 節で $G = \mathrm{GL}_1$ の場合を扱い，4 節で $G = \mathrm{GL}_2$ の場合を考察する．最後に 5 節では，より一般の場合の展望について簡単にコメントを行う．

2 類体論の復習

体 F に対し，その代数閉包 $\overline{F}$ を固定する．$\overline{F}$ の中での F の分離閉包を F^{sep} と書き，$\Gamma_F = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする．これは副有限群である．

2.1 局所体の場合

F を局所体とする．すなわち，F は $\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p((t))$（$p$ は素数）, $\mathbb{R}$ いずれかの有限次拡大体である．F が $\mathbb{Q}_p$ または $\mathbb{F}_p((t))$ の有限次拡大であるとき非アルキメデス的であるといい，F が $\mathbb{R}$ の有限次拡大であるときアルキメデス的であるという．以下では，F の **Weil 群**と呼ばれる局所コンパクト群 W_F を定義し，それを用いて局所類体論の主張を述べる．

■非アルキメデス局所体の場合　まず，F が非アルキメデス的である場合を考える．F の整数環を $\mathcal{O}_F$ と書き，$\mathcal{O}_F$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_F$ と書く．F の剰余体 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F$ は有限体である．その標数を p と書き，元の個数を q と書く．q は p の累乗である．このとき，自然な全射 $\varphi\colon \Gamma_F \twoheadrightarrow \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ が存在することが知られている．$\mathrm{Frob}_q \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ を $\overline{\mathbb{F}}_q \to \overline{\mathbb{F}}_q;\ x \mapsto x^q$ の逆写像として定め，**幾何学的 Frobenius 元**と呼ぶ．$\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ は Frob_q で位相的に生成され，以下の同型がある：

$$\Gamma_{\mathbb{F}_q} \cong \widehat{\mathbb{Z}};\ \mathrm{Frob}_q \leftrightarrow 1.$$

ここで，$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の副有限完備化を表す．中国剰余定理より，$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p\,:\,\text{素数}} \mathbb{Z}_p$ である．

定義 2.1　(1) $I_F = \mathrm{Ker}\,\varphi$ を F の**惰性群**と呼ぶ．これは Γ_F の閉部分群であるから，副有限群である．

(2) $\langle \mathrm{Frob}_q \rangle \subset \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ を Frob_q で生成される $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ の部分群とし，$W_F = \varphi^{-1}(\langle \mathrm{Frob}_q \rangle)$ とおく．W_F には，I_F を開部分群とするような位相群の構造が一意的に定まる．$\varphi(\sigma) = \mathrm{Frob}_q$ となる $\sigma \in W_F$ を一つ固定すると（このような σ を

Frobenius 持ち上げと呼ぶ)，$W_F = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} \sigma^i I_F$ が成り立つ．特に，W_F は局所コンパクト群である．W_F を F の **Weil 群**と呼ぶ．

非アルキメデス局所体に対する局所類体論の主張は以下の通りである．

定理 2.2（非アルキメデス局所体の局所類体論） F を非アルキメデス局所体とする．$W_F^{\mathrm{ab}} = W_F/\overline{[W_F, W_F]}$ を W_F のアーベル化とする（$\overline{[W_F, W_F]}$ は W_F の交換子群の閉包である)．このとき，位相群の同型

$$\mathrm{Art}_F\colon F^\times \xrightarrow{\cong} W_F^{\mathrm{ab}}$$

であって，F の素元を Frobenius 持ち上げ（の W_F^{ab} における像）にうつすものが存在する．

同型 Art_F を一意的に特徴付けるためには，他にもいろいろな性質を要請する必要があるが，ここでは深入りしない．

例 2.3 $F = \mathbb{Q}_p$ の場合を考える．各整数 $n \geq 1$ に対し 1 の原始 p^n 乗根 $\zeta_{p^n} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ をとり，$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ とおく．このとき，$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ は $\mathbb{Q}_p$ の Galois 拡大であり，自然な同型 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}_p^\times$ がある．この同型は以下の条件で特徴付けられる：$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ の像を $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ とすると，$\sigma(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^a$．合成 $\Gamma_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}_p^\times$ を χ_p と書く．

一方，全射 $\varphi\colon \Gamma_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow \Gamma_{\mathbb{F}_p} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ が存在するのであった．χ_p および φ から誘導される準同型 $W_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\chi_p\times\varphi} \mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z} \xrightarrow[\cong]{(a,n)\mapsto ap^n} \mathbb{Q}_p^\times$ は同型であり，その逆写像が $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}$ に一致する．

最後に，絶対値の正規化について述べておく．F の絶対値 $|{-}|_F\colon F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は，F の素元を q^{-1} にうつすように正規化するものとする．

■アルキメデス局所体の場合 次に F がアルキメデス局所体の場合を考える．

定義 2.4 (1) 実数体 $\mathbb{R}$ の **Weil 群** $W_{\mathbb{R}}$ を以下で定める：集合としては $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \sqcup j\mathbb{C}^\times$，演算は $j^2 = -1$, $jzj^{-1} = \overline{z}$ $(z \in \mathbb{C}^\times)$ となるようにする．$W_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \Gamma_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{C}^\times$ による非分裂な拡大である．$W_{\mathbb{R}}$ には自然に位相が入り，局所コンパクト群となる．

(2) 複素数体 $\mathbb{C}$ の **Weil 群** $W_{\mathbb{C}}$ を $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ で定める．$W_{\mathbb{C}}$ も局所コンパクト群

である．

$F=\mathbb{R},\mathbb{C}$ いずれの場合も，自然な連続準同型 $W_F \to \Gamma_F$ が定まっていることに注意しておく．局所類体論の主張は以下の通りである：

定理 2.5（アルキメデス局所体の局所類体論） F をアルキメデス局所体とし，W_F^{ab} をその Weil 群のアーベル化とする．このとき，位相群の同型 $\mathrm{Art}_F\colon F^\times \xrightarrow{\cong} W_F^{\mathrm{ab}}$ が存在する．

証明 $F=\mathbb{C}$ の場合は $W_{\mathbb{C}}^{\mathrm{ab}}=\mathbb{C}^\times$ なので $\mathrm{Art}_{\mathbb{C}}=\mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$ とおく．

$F=\mathbb{R}$ の場合には，全射準同型 $W_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^\times$ が $z\mapsto |z|$ $(z\in\mathbb{C}^\times)$, $j\mapsto -1$ によって定まる．これの核は $\mathbb{C}^1=\{z\in\mathbb{C}^\times \mid |z|=1\}$ である．$z\in\mathbb{C}^1$ は $z=e^{i\theta}$ $(\theta\in\mathbb{R})$ と書けるので，$z'=e^{-i\theta/2}$ とおけば $jz'j^{-1}z'^{-1}=z$ となって $z\in[W_{\mathbb{R}},W_{\mathbb{R}}]$ であることが分かる．よって，上の全射準同型は同型 $W_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^\times$ を誘導する．これの逆写像を $\mathrm{Art}_{\mathbb{R}}$ とすればよい． □

非アルキメデスの場合と同様，絶対値の正規化について述べておこう．$\mathbb{R}$ の絶対値 $|{-}|_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ は通常のものとし，$\mathbb{C}$ の絶対値 $|{-}|_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ は $z\mapsto |z|^2$ と定めるものとする．

2.2 代数体の場合

ここでは F を代数体，すなわち $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする．F の素点 v に対し，F の v における完備化を F_v で表す．これは標数 0 の局所体である．体の埋め込み $\overline{F}\hookrightarrow\overline{F}_v$ を固定すると，単射準同型 $\Gamma_{F_v}\hookrightarrow\Gamma_F$ が定まる．この単射準同型の Γ_F 共役類は埋め込み $\overline{F}\hookrightarrow\overline{F}_v$ に依存せず，v のみから定まる．特に，アーベル化に誘導される準同型 $\Gamma_{F_v}^{\mathrm{ab}}\to\Gamma_F^{\mathrm{ab}}$ は v のみから定まる．

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_F &= \prod_{v\,:\,F\text{ の素点}}{}' F_v \\ &= \Bigl\{(x_v)_v\in\prod_v F_v \Bigm| \text{ほとんど全ての有限素点 } v \text{ に対し } x_v\in\mathcal{O}_{F_v}\Bigr\}\end{aligned}$$

を F の**アデール環**とする．$\mathbb{A}_F$ の位相の入れ方を思い出しておこう．定義より，$\mathbb{A}_F=\bigcup_S(\prod_{v\in S}F_v\times\prod_{v\notin S}\mathcal{O}_{F_v})$ である．ただし，S は F の素点の有限集合で無限素点を全て含むもの全体を動く．$\prod_{v\in S}F_v\times\prod_{v\notin S}\mathcal{O}_{F_v}$ には直積位相を考え，

$\mathbb{A}_F = \bigcup_S(\prod_{v\in S} F_v \times \prod_{v\notin S}\mathcal{O}_{F_v})$ には帰納極限位相を入れる．この位相によって $\mathbb{A}_F$ は局所コンパクト位相環となる．F は $\mathbb{A}_F$ の離散部分群であり，$\mathbb{A}_F/F$ はコンパクトであることが知られている．$\mathbb{A}_{F,f} = \prod'_{v\nmid\infty} F_v$ を有限アデール環と呼ぶ．また，$F_\infty = \prod_{v|\infty} F_v$ とおく．$\mathbb{A}_F = \mathbb{A}_{F,f}\times F_\infty$ および $\mathbb{A}_{F,f}\cong\widehat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}} F$ が成り立つ．$\mathbb{A}_{F,f}$ の位相も同様に定めることができる．

$\mathbb{A}_F$ の乗法群 $\mathbb{A}_F^\times$ を F の**イデール群**と呼ぶ．$\mathbb{A}_F^\times \hookrightarrow \mathbb{A}_F\times\mathbb{A}_F;\ x\mapsto(x,x^{-1})$ による $\mathbb{A}_F\times\mathbb{A}_F$ からの誘導位相によって，$\mathbb{A}_F^\times$ は局所コンパクト群となる．この位相は $\mathbb{A}_F^\times\hookrightarrow\mathbb{A}_F$ による $\mathbb{A}_F$ からの誘導位相とは異なることに注意．$n\geq 2$ に対しても同様に，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\hookrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{A}_F)\times\mathrm{M}_n(\mathbb{A}_F);\ g\mapsto(g,g^{-1})$ による $\mathrm{M}_n(\mathbb{A}_F)\times\mathrm{M}_n(\mathbb{A}_F)$ からの誘導位相によって $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ に位相を定めることができ（行列環 $\mathrm{M}_n(\mathbb{A}_F)$ には $\mathbb{A}_F^{n^2}$ と同一視して直積位相を入れる），$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ は局所コンパクト群となる．この位相は 4 節で用いられる．$\mathbb{A}_{F,f}^\times$ や $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{F,f})$ の位相も同様に定める．

$|-|\colon \mathbb{A}_F^\times\to\mathbb{R}_{>0};\ (x_v)_v\mapsto\prod_v|x_v|_v$ を**イデールノルム**と呼ぶ．ここで，$|-|_v$ は $|-|_{F_v}$ の略記である．イデールノルムの核を $\mathbb{A}_F^1$ と書く．$F^\times\subset\mathbb{A}_F^\times$ は $\mathbb{A}_F^1$ に含まれる（積公式）．$F^\times$ は $\mathbb{A}_F^1$ の離散部分群であり，$\mathbb{A}_F^1/F^\times$ はコンパクトとなることが知られている．

大域類体論の主張は以下の通りである：

定理 2.6（大域類体論） (1) 連続準同型 $\mathrm{Art}_F\colon\mathbb{A}_F^\times\to\Gamma_F^{\mathrm{ab}}$ であって，以下の性質を満たすものが一意的に存在する．F の任意の素点 v に対し，次の図式は可換となる：

$$\begin{tikzcd}
F_v^\times \arrow[r, "\mathrm{Art}_{F_v}", "\cong"'] \arrow[d] & W_{F_v}^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "(*)"] & \Gamma_{F_v}^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\
\mathbb{A}_F^\times \arrow[rr, "\mathrm{Art}_F"] & & \Gamma_F^{\mathrm{ab}}.
\end{tikzcd}$$

ただし，$(*)$ は自然な連続準同型 $W_{F_v}\to\Gamma_{F_v}$ がアーベル化に誘導する準同型である．

(2) $F_\infty^\times$ における単位元の連結成分を $F_{\infty,>0}^\times$ で表す．さらに，部分群 $F^\times F_{\infty,>0}^\times\subset\mathbb{A}_F^\times$ の閉包を $\overline{F^\times F_{\infty,>0}^\times}$ で表す．このとき，Art_F は同型

$$\mathrm{Art}_F\colon\mathbb{A}_F^\times/\overline{F^\times F_{\infty,>0}^\times}\xrightarrow{\cong}\Gamma_F^{\mathrm{ab}}$$

を誘導する．

$\mathbb{A}_F^\times/\overline{F^\times F_{\infty,>0}^\times}$ は $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ の連結成分のなす群 $\pi_0(\mathbb{A}_F^\times/F^\times)$ に他ならないので，(2) の同型は $\mathrm{Art}_F\colon \pi_0(\mathbb{A}_F^\times/F^\times) \xrightarrow{\cong} \Gamma_F^{\mathrm{ab}}$ と書くこともできる．

例 2.7 $F = \mathbb{Q}$ とする．$\mathbb{Q}$ の最大アーベル拡大体 $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ は $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \bigcup_{n\geq 1}\mathbb{Q}(\zeta_n)$（$\zeta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ は 1 の原始 n 乗根）と一致することが知られている（Kronecker-Weber の定理）．例 2.3 と同様，自然な同型 $\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ がある．一方，積写像 $\mathbb{Q}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ は同型であることが容易に分かる．これより，同型

$$\alpha\colon \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}^\times \xrightarrow{\cong} \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$$

が定まる．これは $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}$ に一致する（この場合，$\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0}$ は $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ の閉部分群である）．

p を素数とし，n を p と互いに素な正整数とする．

$$\mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow[\cong]{\alpha} \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$$

による p の像を σ_p とおく．これがどのような元であるかを考えよう．可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_p^\times \arrow[r] \arrow[drr, "(*)"'] & \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0} \arrow[r, "\cong"] & \widehat{\mathbb{Z}}^\times \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\
& & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

に注目する．$p \in \mathbb{Q}_p^\times$ の $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ における像 $(1,\ldots,1,p,1,\ldots)$ は同型 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times \cong \mathbb{Q}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0}$ によって

$$\bigl(p, (p^{-1},\ldots,p^{-1},1,p^{-1},\ldots), 1\bigr) \in \mathbb{Q}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0}$$

に対応することに注意すると，$(*)$ による p の像は $p^{-1} \bmod n$ であることが分かる．よって $\sigma_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ は $\sigma_p^{-1}(\zeta_n) = \zeta_n^p$ によって特徴付けられる元である．この考察から，$\mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow[\cong]{\alpha} \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ による p の像は $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \to \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ による Frobenius 持ち上げの像と一致することが分かる．この観察は，上で述べた主張 $\alpha = \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}$ の根拠を与えるとともに，局所類体論の同型 $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}$ を素元が幾何学的 Frobenius 元の持ち上げとなるように正規化した理由を説明するものである．

3 $G = \mathrm{GL}_1$ の場合

以下では簡単のため $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ のことを $\mathbb{A}$ と書く．同様に，$\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$ のことを $\mathbb{A}_f$ と書く．

整数 $N \geq 1$ に対し，$\mathrm{GL}_1(\widehat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\bmod N} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の核を U_N で表す．U_N は $\mathrm{GL}_1(\widehat{\mathbb{Z}})$ のコンパクト開部分群であるから，$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群でもある．$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_f) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ の閉部分群 K_N を $K_N = U_N \times \mathbb{R}_{>0}$ で定める．

定義 3.1　$\mathrm{Sh}_N = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_1(\mathbb{A})/K_N$ とおく．

例 2.7 を用いて，Sh_N をもう少し詳しく調べよう．$\mathbb{A}^\times \cong \mathbb{Q}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0}$ であったから，

$$\begin{aligned}\mathrm{Sh}_N &= \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_1(\mathbb{A})/K_N = \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times/(U_N \times \mathbb{R}_{>0}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times/U_N \\ &\cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})\end{aligned}$$

である．したがって，Sh_N は $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ が連続に作用する有限集合となる．

一般に，$\mathbb{Q}$ 上の 0 次元代数多様体 X が与えられると，$X(\overline{\mathbb{Q}})$ は $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ が連続に作用する有限集合となる．逆に，$\Gamma_{\mathbb{Q}}$ が連続に作用する有限集合 S が与えられると，$X(\overline{\mathbb{Q}}) \cong S$ となる $\mathbb{Q}$ 上の 0 次元代数多様体 X が同型を除き一意的に存在する．このことを用いると，有限集合 Sh_N から，$\mathbb{Q}$ 上の 0 次元代数多様体が定まることになる．この 0 次元代数多様体も Sh_N と書き，GL_1 の志村多様体と呼ぶ．より具体的には，$\mathrm{Sh}_N = \operatorname{Spec}\mathbb{Q}(\zeta_N)$ である．

$\{\mathrm{Sh}_N\}_{N\geq 1}$ は N に関する射影系となっている．つまり，$N \mid N'$ であるとき，代数多様体の射 $\mathrm{Sh}_{N'} \to \mathrm{Sh}_N$ が自然に定まっている．これの射影極限 $\mathrm{Sh}_\infty = \varprojlim_N \mathrm{Sh}_N$ を考えると，$\mathrm{Sh}_\infty(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times/\mathbb{R}_{>0}$ であり，これには $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ および $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_f)$ が作用する（$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_f) = \mathbb{A}_f^\times$ の作用は積で定める）．$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_f)$ の作用を **Hecke 作用**と呼ぶ．構成から明らかなことであるが，これらの作用は，大域類体論の同型 $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}$ と深い関わりがある．実際，$a \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_f) = \mathbb{A}_f^\times$ の作用は $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}}(a) \in \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ の作用と一致する．

4　$G = \mathrm{GL}_2$ の場合

本節では GL_2 の志村多様体とモジュラー曲線の関係を説明する．以下では -1 の平方根 $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ を固定する．$\mathfrak{H}_1^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とおく．これは複素上半平面 $\mathfrak{H}_1^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ と複素下半平面 $\mathfrak{H}_1^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ の直和である．$K_\infty = \mathbb{R}_{>0}\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ とおく．これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の中心を法としてコンパクトな部分群である．すなわち，K_∞ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ における像はコンパクトである．

以下の補題は容易に証明できる．

補題 4.1 (1) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}_1^{\pm}$ に一次分数変換で作用し，その作用は推移的である．また，$\sqrt{-1} \in \mathfrak{H}_1^{\pm}$ の安定化群 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(\sqrt{-1})$ は K_∞ に一致する．したがって，同型 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/K_\infty \xrightarrow{\cong} \mathfrak{H}_1^{\pm}; g \mapsto g\sqrt{-1}$ がある．

(2) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ とおくと，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ は $\mathfrak{H}_1^{+}$ に一次分数変換で作用し，その作用は推移的である．また，$\sqrt{-1} \in \mathfrak{H}_1^{+}$ の安定化群 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+}(\sqrt{-1})$ は K_∞ に一致する．したがって，同型 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+/K_\infty \xrightarrow{\cong} \mathfrak{H}_1^{+}; g \mapsto g\sqrt{-1}$ がある．

$N \geq 3$ を整数とし，$\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\bmod N} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の核を $K(N)$ と書く．これは $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ のコンパクト開部分群なので，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群でもある．

定義 4.2 $N \geq 3$ に対し，

$$\mathrm{Sh}_N = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/K(N)K_\infty$$

とおく．補題 4.1 (1) より，

$$\mathrm{Sh}_N = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathfrak{H}_1^{\pm} \times (\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K(N)))$$

と書くこともできる．ただし，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の $\mathfrak{H}_1^{\pm}$ への作用は一次分数変換で与えられ，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K(N)$ への作用は左からの積で与えられる．

Sh_N をもう少し分かりやすい形に書き直すために，まず次の命題を証明する．

命題 4.3 次が成り立つ：

(1) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \coprod_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K(N)\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$．ただし，$\widetilde{a} \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は a の持ち上げとする．

(2) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\bmod N} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の核を $\Gamma(N)$ とおくと $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap K(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \Gamma(N)$ である．

証明 (1) を示す．まず $a, a' \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ が相異なるならば

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K(N)\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K(N)\begin{pmatrix} \widetilde{a}' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \varnothing$$

であることを示そう．左辺に属する g が存在したとする．$\mathbb{A}^\times \cong \mathbb{Q}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0}$ によって $c = \det g$ を $c = c_{\mathbb{Q}} c_f c_\infty$ ($c_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}^\times, c_f \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times, c_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$) と分解すると，

$c_f \in \det K(N)\widetilde{a} \cap \det K(N)\widetilde{a}'$ が成り立つ（$\det K(N)$ は $K(N)$ の det による像を表す）．$\mathrm{mod}\, N$ で考えることで，$a = c_f \bmod N = a'$ となり，$a \neq a'$ に反する．

次に，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \bigcup_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K(N)\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ を示そう．$g = (g_v)_v \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ をとる．$c = \det g \in \mathbb{A}^\times$ を上と同様に $c = c_{\mathbb{Q}}c_f c_\infty$ と分解する．g を $\begin{pmatrix}c_{\mathbb{Q}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} g\begin{pmatrix}c_f & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}c_\infty & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$ に置き換えることで，$\det g = 1$ と仮定してよい．SL_2 の強近似定理[*2]

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)\cap K(N))\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

が成り立つので，特に $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ である．

(2) を示す．$\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ をとる．$\gamma \in K(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ とすると，まず $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ が分かる．さらに $\det\gamma \equiv 1 \pmod N$ であるから，$N \geq 3$ より $\det\gamma = 1$ すなわち $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を得る．$\gamma \equiv 1 \pmod N$ なので $\gamma \in \Gamma(N)$ となり，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap K(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \Gamma(N)$ が得られた．逆の包含関係は明らかである．□

命題 4.4　$\mathrm{Sh}_N \cong \coprod_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}_1^+$.

証明　命題 4.3 (1) より，$a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ を固定し，

$$\begin{aligned}\mathrm{Sh}_{N,a} &= \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K(N)\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+/K(N)K_\infty\\ &= \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}K(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+/K(N)K_\infty\end{aligned}$$

を調べればよい（$K(N)$ は $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ の正規部分群であることに注意）．写像

$$\phi_a\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}K(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \to \Gamma(N)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+/K_\infty$$

を

$$\gamma\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}kh \mapsto [h] \quad (\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), k \in K(N), h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+)$$

で定める．これの well-defined 性を確認するには，$\gamma\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}kh = \gamma'\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k'h'$ であるときに $[h] = [h']$ であることを示せばよい．

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \ni \gamma'^{-1}\gamma = \left(\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k'k^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\right)(h'h^{-1}) \in K(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$$

[*2] 強近似定理については，[越川, 3 節] に説明がある．

であるから，命題 4.3 (2) より $h'h^{-1} \in \Gamma(N)$ である．特に $[h] = [h']$ となり，well-defined 性が従う．ϕ_a が左 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ 不変かつ右 $K(N)K_\infty$ 不変であることは構成から直ちに分かるので，写像 $\phi_a\colon \mathrm{Sh}_{N,a} \to \Gamma(N)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+/K_\infty$ が得られる．定義より明らかに，これは全射である．単射性を示そう．$\mathrm{Sh}_{N,a}$ の元は $\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h$ $(h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+)$ という形の元で代表されることにまず注意する．

$$\phi_a\left(\left[\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h\right]\right) = \phi_a\left(\left[\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h'\right]\right) \quad (h, h' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+)$$

すなわち $\Gamma(N)hK_\infty = \Gamma(N)h'K_\infty$ と仮定して $\left[\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h\right] = \left[\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h'\right]$ を示す．h' を $h'K_\infty$ の元で置き換えて，$h' \in \Gamma(N)h$ であるとしてよい．$\delta \in \Gamma(N)$ を $h' = \delta h$ となるようにとり，$\Gamma(N) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap K(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ によって δ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の元とみなしたものを $\delta_{\mathbb{Q}}$ とおくと，$\delta_{\mathbb{Q}} h \in K(N)h'$ すなわち $h' \in K(N)\delta_{\mathbb{Q}} h = \delta_{\mathbb{Q}} K(N)h$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h' \in \begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{\mathbb{Q}} K(N)h &= \delta_{\mathbb{Q}} \cdot \delta_{\mathbb{Q}}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{\mathbb{Q}} K(N)h \\ &\subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K(N)\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K(N)h = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K(N)h\end{aligned}$$

であるから，$\left[\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h\right] = \left[\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h'\right]$ が示された．

一方，補題 4.1 (2) より $\Gamma(N)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+/K_\infty \cong \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}_1^+$ であるから，$\mathrm{Sh}_{N,a} \xrightarrow[\cong]{\phi_a} \Gamma(N)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+/K_\infty \cong \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}_1^+$ となって所望の同型が得られる． □

命題 4.4 に現れる $\Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}_1^+$ はレベル N の（開）モジュラー曲線と呼ばれ，$Y(N)$ と書かれるのであった．$Y(N)$ には Riemann 面（1 次元複素多様体）の構造が入ることがよく知られている．したがって，Sh_N にも Riemann 面の構造が入る．

■K_∞ **について**　Sh_N の定義に現れた $K_\infty \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ が何者（何物？）なのかについて少し補足しておく．$\mathbb{R}$ 上の代数群 $\mathbb{S}$ を $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}$ と定め，**Deligne トーラス**と呼ぶ．これは，任意の $\mathbb{R}$ 代数 A に対し $\mathbb{S}(A) = \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = (A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^\times$ を満たす代数群である．特に $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$ が成り立つ．

群準同型 $h\colon \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R});\ a + b\sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ を考える．これは $\mathbb{R}$ 上の代数群の準同型 $h\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ から来ることが容易に分かる．この h に対し，次が成り立つ：

補題 4.5　$\operatorname{Im} h \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の中心化群 $Z(h)$ は K_∞ に一致する．

このことは，志村多様体の理論において，次のように一般化される：

> $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群 G および $\mathbb{R}$ 上の代数群の準同型 $h\colon \mathbb{S} \to G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の組 (G, h) を考える（実際にはいくつか条件を仮定する）．この (G, h) に対し，$X = G(\mathbb{R})/Z(h)$ とおく．$g \mapsto \mathrm{Ad}(g) \circ h$ によって，X は準同型 $\mathbb{S} \to G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ であって h と $G(\mathbb{R})$ 共役なもの全体と同一視することができる．ただし，$\mathrm{Ad}(g)\colon G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は $g \in G(\mathbb{R})$ による共役 $x \mapsto gxg^{-1}$ を表す．(G, h) に課した条件のもとで，$Z(h)$ は $G(\mathbb{R})$ の中心を法としてコンパクトな閉部分群となり，X は Hermite 対称領域の有限直和となる（特に複素多様体である）．

■Hecke 作用　命題 4.4 より，Sh_N は $Y(N)$ を有限個並べたものにすぎないのだが，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の両側剰余として定義したことで，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ の Hecke 作用が定義できるという利点がある．GL_1 の場合と同様，$\mathrm{Sh}_\infty = \varprojlim_N \mathrm{Sh}_N$ とおく（ここではひとまず位相空間の射影極限と見る）．このとき，

$$\mathrm{Sh}_\infty = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/K_\infty$$

が成り立つ．したがって，右からの積によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ は Sh_∞ に作用する．これを Hecke 作用と呼ぶ．これを極限をとる前の Sh_N で記述すると，以下のようになる．$N, N' \geq 3$ を整数とし，$h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ が $h^{-1}K(N)h \subset K(N')$ を満たすとする．このとき，

$$h\colon \mathrm{Sh}_N \to \mathrm{Sh}_{N'};\ [g]_{K(N)} \mapsto [gh]_{K(N')}$$

が定まる（$g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ であり，$[g]_{K(N)}$ は g の Sh_N における両側剰余類を表す．$[gh]_{K(N')}$ も同様）．well-defined 性は $gK(N)h = ghh^{-1}K(N)h \subset ghK(N')$ よりよい．このように，Hecke 作用はレベル N を変えるので，各 Sh_N に対する作用にはなっていない．そのため，単独の Sh_N よりも，射影系 $\{\mathrm{Sh}_N\}_N$ を考える方が便利なことが多い．

■$\mathbb{Q}$ 上のモデル　GL_1 の場合と同様に，実は Sh_N はある $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線の $\mathbb{C}$ 値点の集合として表すことができる．このことを見るために，Sh_N と楕円曲線の関係に注目する．

定義 4.6 E を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線とし，$E[N]=\mathrm{Ker}(E\xrightarrow{N\text{倍}}E)$ とおく．E の**レベル N 構造**とは，同型 $\eta\colon(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\xrightarrow{\cong}E[N](\mathbb{C})$ のことをいう．(E,η), (E',η') を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線およびそのレベル N 構造の組とするとき，(E,η) と (E',η') が同型であるとは，楕円曲線の同型 $\alpha\colon E\xrightarrow{\cong}E'$ であって $\eta'=\alpha\circ\eta$ を満たすものが存在することをいう．

(E,η) の同型類のなす集合を $Ell_N(\mathbb{C})$ と書く．

命題 4.7 全単射 $\mathrm{Sh}_N\xrightarrow{\cong}Ell_N(\mathbb{C})$ が存在する．

これは大切な性質なので，二つの証明を与える．一つ目の証明は，楕円曲線とモジュラー曲線との関係を用いるものである．

一つ目の証明 命題 4.4 より，$\mathrm{Sh}_N\cong\coprod_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}Y(N)$ であった．区別のため，添字 $a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ に対応する $Y(N)$ を $Y(N)_a$ と書く．また，1 の原始 N 乗根 ζ_N を固定しておく．このとき，

- $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E
- E のレベル N 構造 $\eta\colon(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\xrightarrow{\cong}E[N](\mathbb{C})$ で，$\langle\eta(e_1),\eta(e_2)\rangle=\zeta_N^a$ を満たすもの（ここで，$e_1,e_2\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ の標準基底を表し，$\langle -,-\rangle$ は Weil ペアリングを表す）

の組 (E,η) は $Y(N)_a$ の点と一対一に対応することが古典的によく知られている（例えば [DS05, Theorem 1.5.1] を参照）．一般のレベル N 構造 $\eta\colon(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\xrightarrow{\cong}E[N](\mathbb{C})$ は $\langle\eta(e_1),\eta(e_2)\rangle\in\{\zeta_N^a\mid a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\}$ を満たすので，a を動かすことで全単射 $\mathrm{Sh}_N\xrightarrow{\cong}Ell_N(\mathbb{C})$ が得られる．□

二つ目の証明は，命題 4.4 を用いず，Sh_N と $Ell_N(\mathbb{C})$ を直接結び付けるものである．今後の話（[越川], [清水] 等）との繋がりが深いのはこちらの証明である．

二つ目の証明 $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線は，$\mathbb{C}$ の格子 Λ を用いて $\mathbb{C}/\Lambda$ と書けたことを思い出す．より系統的に扱うために，以下のような組 (V,Λ) のなす圏 $\mathcal{C}$ を考える：

- V は 1 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間．
- Λ は V の格子．すなわち，V の部分アーベル群であって，自然な $\mathbb{R}$ 準同型 $\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が同型となるようなもの．

(V,Λ) から (V',Λ') への射とは，$\mathbb{C}$ 線型写像 $\phi\colon V\to V'$ であって $\phi(\Lambda)\subset\Lambda'$ を満たすものとする．このとき，$(V,\Lambda)\mapsto V/\Lambda$ によって，$\mathcal{C}$ は $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線の圏と圏同値になる．準逆関手は $E\mapsto(\operatorname{Lie}E, H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z}))$ で与えられる．ただし，$H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ は単射

$$H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z})\hookrightarrow H^0(E,\Omega^1_E)^\vee=\operatorname{Lie}E;\ [\gamma]\mapsto\Big(\omega\mapsto\int_\gamma\omega\Big)$$

によって $\operatorname{Lie}E$ の格子とみなす．

$E=V/\Lambda$ のとき $E[N](\mathbb{C})=\frac{1}{N}\Lambda/\Lambda\cong\Lambda/N\Lambda$ であるから，E のレベル N 構造は同型 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\xrightarrow{\cong}\Lambda/N\Lambda$ に対応する．よって，$\mathcal{C}$ の対象 (V,Λ) および同型 $\eta\colon(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\xrightarrow{\cong}\Lambda/N\Lambda$ の組 (V,Λ,η) のなす圏を $\mathcal{C}_N$ と書き，その同型類のなす集合を C_N と書くと，全単射 $C_N\cong Ell_N(\mathbb{C})$ がある．したがって，C_N と Sh_N の間の全単射を構成すればよい．

まず，$[(V,\Lambda,\eta)]\in C_N$ に $\mathrm{Sh}_N=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathfrak{H}_1^\pm\times(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K(N)))$ の元を対応させることを考える．単純な方針は，η を同型 $\widetilde{\eta}\colon\mathbb{Z}^2\xrightarrow{\cong}\Lambda\subset V$ に持ち上げて，$\widetilde{\eta}(e_2)=-\tau\widetilde{\eta}(e_1)$ となる $\tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}=\mathfrak{H}_1^\pm$ を対応させようというものである（$e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ は $\mathbb{Z}^2$ の標準基底）．しかし，このような持ち上げ $\widetilde{\eta}$ は一般には存在しない（$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ は全射でないことに注意）．一方，$\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ は全射であるから，η は $\widehat{\mathbb{Z}}$ 加群の同型 $\widehat{\eta}\colon\widehat{\mathbb{Z}}^2\xrightarrow{\cong}\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\widehat{\mathbb{Z}}$ に持ち上げることはできる．しかし，今度は $\widehat{\eta}(e_1),\widehat{\eta}(e_2)$ が V の元にならない．そこで $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の同型 $\xi\colon\mathbb{Q}^2\xrightarrow{\cong}\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ を一つ固定し，$\tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}=\mathfrak{H}_1^\pm$ を $\xi(e_2)=-\tau\xi(e_1)$ となる元として定め，$\widehat{\eta}$ と ξ の「ずれ」を別途測ることにしよう．$\mathbb{A}_f$ 加群の同型

$$\mathbb{A}_f^2\xrightarrow[\cong]{\widehat{\eta}\otimes\mathbb{A}_f}\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{A}_f\xrightarrow[\cong]{\xi^{-1}\otimes\mathbb{A}_f}\mathbb{A}_f^2$$

に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ の元を g と書く．$[(V,\Lambda,\eta)]$ に $[(\tau,g)]$ を対応させることで，写像 $C_N\to\mathrm{Sh}_N$ が定まることを示そう．まず，$\widehat{\eta}$ および ξ のとり方に任意性があるので，剰余類 $[(\tau,g)]$ がこれらのとり方に依存しないことを示す．一般に，η の持ち上げは $\widehat{\eta}\circ k$ $(k\in K(N))$ という形をしている．また，同型 $\mathbb{Q}^2\xrightarrow{\cong}\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は $\xi\circ\gamma$ $(\gamma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}))$ という形をしている．$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおく．$(\widehat{\eta},\xi)$ を $(\widehat{\eta}\circ k,\xi\circ\gamma)$ に置

き換えると，(τ, g) は $\left(\dfrac{d\tau - b}{-c\tau + a}, \gamma^{-1}gk\right)$ に置き換わる．$\dfrac{d\tau - b}{-c\tau + a} = \gamma^{-1}\tau$ なので，

$$\left[\left(\frac{d\tau - b}{-c\tau + a}, \gamma^{-1}gk\right)\right] = [(\gamma^{-1}\tau, \gamma^{-1}gk)] = [(\tau, g)]$$

となり，確かに $[(\tau, g)]$ は $\widehat{\eta}, \xi$ のとり方に依存しないことが分かった．後は $[(\tau, g)]$ が (V, Λ, η) の同型類のみに依存することを示す必要があるが，これはほぼ明らかなので省略する．以上で写像 $C_N \to \mathrm{Sh}_N$ が構成された．

逆向きの写像 $\mathrm{Sh}_N \to C_N$ を構成する．$[(\tau, g)] \in \mathrm{Sh}_N$ $(\tau \in \mathfrak{H}_1^{\pm}, g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f))$ をとる．命題 4.3 (1) の $N = 1$ の場合から[*3] $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\,\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ となるので，$\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ をうまくとると，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ 内で $\gamma g \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ とできる．(τ, g) を $(\gamma\tau, \gamma g)$ に置き換えることで，$g \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ と仮定してよい．$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおき，$V = \mathbb{C}$, $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\eta(x, y) = (\overline{a}x + \overline{b}y) - (\overline{c}x + \overline{d}y)\tau$ と定める（$z \in \widehat{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ における像を $\overline{z}$ で表した）．このとき，同型類 $[(V, \Lambda, \eta)]$ は剰余類 $[(\tau, g)]$ のみに依存することが容易に確認できる．

これらの写像は互いに逆写像であることが分かるので，C_N と Sh_N の間の全単射が構成できた． □

注意 4.8 二つ目の証明における τ を構成する部分は，以下のように解釈できる：

> $\mathbb{Q}^2 \underset{\cong}{\xrightarrow{\xi}} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to V$ から誘導される $\mathbb{C}$ 線型写像 $\mathbb{C}^2 \underset{\cong}{\xrightarrow{\xi_{\mathbb{C}}}} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \twoheadrightarrow V$ の核が $\tau e_1 + e_2 = (\tau, 1)$ で生成されるように $\tau \in \mathfrak{H}_1^{\pm}$ を定める．

さらに言い換えると，$\mathbb{C}^2 \underset{\cong}{\xrightarrow{\xi_{\mathbb{C}}}} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \twoheadrightarrow V$ の核に対応する $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の元が τ であるということである．楕円曲線 E を用いて記述すると，以下のようになる：

> E の Hodge 分解 $H^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = H^0(E, \Omega_E^1) \oplus H^1(E, \mathcal{O}_E)$ から定まる完全系列 $0 \to (\mathrm{Lie}\, E)^{\vee} \to H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to \mathrm{Lie}\, E \to 0$ を考える．同型 $\xi\colon \mathbb{Q}^2 \xrightarrow{\cong} H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を固定し，1 次元部分空間 $\xi_{\mathbb{C}}^{-1}((\mathrm{Lie}\, E)^{\vee}) \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ に対応する $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の元を τ と書く．

注意 4.9 二つ目の証明から示唆されるように，E のレベル構造として同型 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\cong} E[N]$ を考えるよりも，同型 $\mathbb{A}_f^2 \xrightarrow{\cong} H_1(E, \mathbb{A}_f) = (\varprojlim_m E[m]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の $K(N)$ 軌道を考えた方が便利であることも多い．[清水] を参照．

[*3] 命題 4.3 では $N \geq 3$ を仮定しているが，(1) の証明ではこの仮定は使っていない．

ポイントとなるのは，$\mathbb{Q}$ の任意の拡大体 L に対し，

- L 上の楕円曲線 E
- E のレベル N 構造 $\eta\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\cong} E[N](L)$

の組 (E,η) の同型類の集合 $\mathit{Ell}_N(L)$ を考えることができるということである．より一般に，$\mathbb{Q}$ 上のスキーム S に対しても集合 $\mathit{Ell}_N(S)$ を定めることができ，$\mathbb{Q}$ 上のスキームの圏 $\mathbf{Sch}_{\mathbb{Q}}$ から集合の圏 $\mathbf{Set}$ への反変関手 $\mathit{Ell}_N\colon \mathbf{Sch}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{Set}$ が得られる．このように，スキーム S に対し，その上の幾何学的対象の同型類を対応させる反変関手を**モジュライ関手**と呼ぶ．

定理 4.10　$N \geq 3$ のとき，反変関手 $\mathit{Ell}_N\colon \mathbf{Sch}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{Set}$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線で表現される．この代数曲線のことも Sh_N と書く．

命題 4.7 から，Sh_N の $\mathbb{C}$ 値点の集合 $\mathrm{Sh}_N(\mathbb{C}) = \mathit{Ell}_N(\mathbb{C})$ は，以前考えていた Sh_N と同一視できる．今後は，定義 4.2 で定めた集合 Sh_N のことは $\mathrm{Sh}_N(\mathbb{C})$ と書く．

注意 4.11　命題 4.7 の証明にあるように $\mathrm{Sh}_N(\mathbb{C}) = \coprod_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} Y(N)_a$ であったが，個別の $Y(N)_a$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線の $\mathbb{C}$ 値点という形はしていない．これは，$Y(N)_a$ を組 (E,η) で記述するときに，Weil ペアリングに関する条件 $\langle\eta(e_1),\eta(e_2)\rangle = \zeta_N^a$ を要請する必要があり，そこに ζ_N という非有理数が現れることに起因する．わざわざ $Y(N)$ を有限個直和して，幾何学的連結でない代数曲線を考えているのは，$\mathbb{Q}$（あるいは，N に依存しない代数体）上定義される代数曲線が欲しいためである．

注意 4.12　射影系 $\{\mathrm{Sh}_N(\mathbb{C})\}_N$ に対して定めた Hecke 作用は，$\mathbb{Q}$ 上の代数曲線の射影系 $\{\mathrm{Sh}_N\}_N$ に対する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ の作用から来ることが分かる．これは $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ および $h^{-1}K(N)h \subset K(N')$ を満たす整数 $N, N' \geq 3$ に対し，反変関手の射 $\mathit{Ell}_N \to \mathit{Ell}_{N'}$ を構成することで証明されるが，ここでは省略する．

■虚数乗法論との関係　$\mathrm{Sh}_\infty = \varprojlim_N \mathrm{Sh}_N$ とおく．これは $\mathbb{Q}$ 上のスキームである．$\mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C})$ には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ が作用することを既に述べたが，それに加えて，$\mathbb{C}$ の体としての自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ も作用する．これは，$\mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/K_\infty$ が $\mathbb{Q}$ 上のスキームの $\mathbb{C}$ 値点の集合と同一視できることが分かって初めて定義される作用である．$(E,\eta) \in \mathit{Ell}_N(\mathbb{C}) = \mathrm{Sh}_N(\mathbb{C})$ は $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ で $(E \otimes_{\mathbb{C},\sigma} \mathbb{C}, (\mathrm{id}_E \otimes \sigma)\circ\eta)$ にうつされる．

GL_1 のときは，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の $\mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C}) = \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times / \mathbb{R}_{>0}$ への作用は，$\mathbb{Q}$ の類体論と $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_f)$ の $\mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C})$ への Hecke 作用を組み合わせて記述できるのであった．これに対し，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) / K_\infty$ への作用を具体的に書くことはできないが，$\mathbb{Q}$ の虚二次拡大と関係する特別な点に対しては，σ でどのようにうつされるかを記述することができる．このことを説明するために，虚二次体 F および埋め込み $F \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ を固定する．このとき，代数トーラス $T = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{\mathrm{m},F}$ から $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ への埋め込み $i\colon T \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ が定まる（$\mathbb{Q}$ 値点には $F^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ を誘導する）．さらに，F の $\mathbb{C}$ への埋め込みも固定する．このとき，同型 $F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ が定まるので，代数群の同型 $\mathbb{S} \xrightarrow{\cong} T \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ も定まる．合成 $\mathbb{S} \xrightarrow{\cong} T \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \xhookrightarrow{i} \mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ を h' とおく．$h\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ を，10 ページの通り，$\mathbb{R}$ 値点に $a + b\sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ を誘導するような $\mathbb{R}$ 上の代数群の準同型とするとき，$h' = \mathrm{Ad}(g_\infty) \circ h$ となる $g_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ が存在することが容易に分かる（$\mathrm{Ad}(g_\infty)$ の定義は 11 ページを参照）．このとき，$F_\infty^\times \subset Z(h') = g_\infty Z(h) g_\infty^{-1} = g_\infty K_\infty g_\infty^{-1}$ である．よって，単射 $i\colon \mathbb{A}_F^\times = T(\mathbb{A}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ は写像

$$\varinjlim_{U \subset \mathbb{A}_{F,f}^\times} F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times / U F_\infty^\times \to \mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C});\ [a] \mapsto [a g_\infty]$$

を誘導する（この写像は g_∞ のとり方によらない）．ここで，U は $\mathbb{A}_{F,f}^\times$ のコンパクト開部分群を動く．大域類体論（定理 2.6）より，$\varinjlim_{U \subset \mathbb{A}_{F,f}^\times} F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times / U F_\infty^\times = \pi_0(\mathbb{A}_F^\times / F^\times) \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Art}_F} \Gamma_F^{\mathrm{ab}}$ であるから，写像

$$\Gamma_F^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) / K_\infty$$

が定まる．この写像による $\sigma \in \Gamma_F^{\mathrm{ab}}$ の像は，ある $g_\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ を用いて $[(g_\sigma, g_\infty)]$ という形に書けることが容易に分かる．この g_σ を用いて，$[(a, g_\infty)]$ $(a \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f))$ という形の $\mathrm{Sh}_\infty(\mathbb{C})$ の元への σ の作用を記述することができる．

定理 4.13 $a \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ に対し，$\sigma[(a, g_\infty)] = [(g_\sigma a, g_\infty)]$ が成り立つ．

この定理は楕円曲線に対する虚数乗法論の帰結である．[越川, 5 節] を参照．

定理 4.13 の証明には Sh_N のモジュライ空間としての解釈が必要となるが，定理 4.13 の主張自体は類体論と代数群の言葉のみを使って記述されていることに注意しよう．実は，$\mathbb{Q}$ 上のスキーム Sh_∞ および Sh_N は，定理 4.13 で述べた性質を利用し

て，モジュライ空間としての解釈とは一切関係なく特徴付けられることが分かっている．このことは，志村多様体に対する**正準モデル** (canonical model) の理論へと一般化される（[今井] 参照)．

■Sh_N **の整モデル**　ここまでは，モジュライ関手 $Ell_N\colon \mathbf{Sch}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{Set}$ に注目して，$\mathbb{C}$ 値点の集合が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/K(N)K_\infty$ と同型になるような $\mathbb{Q}$ 上のスキーム Sh_N を構成できるということを説明してきた．同様のモジュライ関手を $\mathbb{Q}$ 上のスキームよりも一般に $\mathbb{Z}[1/N]$ 上のスキームに対して考えることで，$\mathbb{Z}[1/N]$ 上のスキーム $\mathrm{Sh}_N^{\mathrm{int}}$ であって $\mathbb{Q}$ 上のファイバーが Sh_N となるようなものを構成することもできる．$\mathrm{Sh}_N^{\mathrm{int}}$ を Sh_N の**整モデル**と呼ぶ．数論的な応用のためには，整モデルの存在は極めて重要である．Sh_N が虚数乗法論を用いて特徴付けられたように，実は $\mathrm{Sh}_N^{\mathrm{int}}$ もモジュライ関手と無関係な特徴付けを持つ．志村多様体の整モデルの理論については，[清水] で扱われる．

5　おわりに

5.1　志村多様体論のロードマップ

これまで述べてきたことを踏まえて，志村多様体の理論はおおむね以下のような順序で展開される．

- $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群 G および $\mathbb{R}$ 上の代数群の準同型 $h\colon \mathbb{S} \to G\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ の組 (G,h) に対して適切な条件を設定し，$X = G(\mathbb{R})/K_\infty$（$K_\infty = Z(h)$ とおいた）が Hermite 対称領域の有限直和となるようにする（[阿部]）．この X は，準同型 $\mathbb{S} \to G\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ であって h と $G(\mathbb{R})$ 共役なもの全体と見ることができる．
- $G(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 K に対し，複素解析空間
$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/KK_\infty = G(\mathbb{Q})\backslash (X\times (G(\mathbb{A}_f)/K))$$
を調べる（[大島]）．
- (G,X) から定まる代数体 $E(G,X)$ 上の代数多様体 $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ であって $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/KK_\infty$ を満たすものが「正準モデル」であるという条件を定式化し，それが一意であることを示す．さらに，アーベル多様体のモジュライ空間等と結び付けて，正準モデルが存在することを示す（[越川]，[今井]）．正準モデル $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ のことを志村多様体と呼ぶ．

- $E(G,X)$ の整数環 $\mathcal{O}_{E(G,X)}$（から有限個の素イデアルを除いたもの）上のスキーム $\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{int}}$ であって $\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{int}} \otimes_{\mathcal{O}_{E(G,X)}} E(G,X) = \mathrm{Sh}_K(G,X)$ を満たすものが「整正準モデル」であるという条件を定式化し，それが一意であることを示す．さらに，アーベル多様体のモジュライ空間等と結び付けて，整正準モデルが存在することを示す（[清水]）．

5.2 志村多様体はたくさんある

3 節と 4 節では，GL_1 と GL_2 の場合に対して志村多様体の例を見てきたが，様々な (G,h) から志村多様体を定義できるという事実が極めて重要であるということを最後に強調しておきたい．GL_1, GL_2 以外の志村多様体の例として，$\mathbb{Q}$ 上の四元数体 B に対応する場合を考えてみよう．$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を，任意の $\mathbb{Q}$ 代数 A に対し $G(A) = (B \otimes_{\mathbb{Q}} A)^{\times}$ となるように定めると，これは GL_2 の内部形式となる．$B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ である場合には，$G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ となるので，4 節で考えたものと同じ h を使うことで組 (G,h) が得られ，志村多様体 $\mathrm{Sh}_K(G,h)$ を考えることができる．この場合，$\mathrm{Sh}_K(G,h)$ は $\mathbb{Q}$ 上射影的な代数曲線となる（**志村曲線**と呼ばれる）．射影的でなく，カスプを持つモジュラー曲線と比べて，志村曲線の方が扱いやすいことも多い．Jacquet-Langlands 対応によって，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現のうちの一部は $G(\mathbb{A})$ の保型表現と関係付けることができるので，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現に関する研究に志村曲線 $\mathrm{Sh}_K(G,h)$ を使うことも可能である．一方で，Eisenstein 級数を扱いたい場合など，射影的でない志村多様体を考える方がよい場合もある．このように，特定の代数群にこだわらず，問題に応じて異なる群に移行し，使いやすい志村多様体を用いるという姿勢が現代の志村多様体の使い方における一つのポイントであると思う．[三枝] では，様々な志村多様体を使い分けることによって，GL_n の保型表現に対応する Galois 表現の構成を行っている．

参考文献

[DS05] F. Diamond and J. Shurman, *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 228, Springer-Verlag, New York, 2005.

[阿部] 阿部紀行，Hermite 対称領域，本報告集．

[今井] 今井直毅，志村多様体入門，本報告集．

[大島]　大島芳樹，Hermite 対称領域の数論的商と保型形式，本報告集.

[越川]　越川皓永，Siegel モジュラー多様体，本報告集.

[清水]　清水康司，志村多様体の整モデル，本報告集.

[三枝]　三枝洋一，志村多様体を用いた Galois 表現の構成，本報告集.