Abel 多様体の基礎

石塚裕大 *

概要

本章では今回の報告集の基本的事項のうち, 特に Abel 多様体に関する部分をまとめる. ただし優れた解説書も多くあるため, 証明は完全に割愛した. 本来証明すべき順とは異なる順序で述べている定理も多い. また Mordell–Weil の定理, 周期行列や Torelli の定理, Néron–Severi 群の有限生成性などについては一切触れていない. 混乱を防ぐため, 参考文献やそこでの記法の違いについてはできるだけ細かく参照箇所の例を挙げているので, 必要に応じて参照されたい.

1 Abel 多様体の定義と基本的な性質

以下では Abel 多様体の基本的な性質を復習していく. 群多様体についての知識は付録を参照のこと. この節の参考文献としては, [Mum70], [Mil86] を挙げておく. 原則として [Mum70] は基礎体 k が代数閉体の場合を扱っていることに注意されたい.

1.1 Abel 多様体の定義と可換性

定義 1.1 体 k 上の **Abel 多様体 (Abelian variety)** とは, 体 k 上で定義された, 幾何的に連結で, 固有かつ滑らかな群多様体のことを指す.

例 1.2（楕円曲線の例） 体 k 上で有理点をもつ滑らかな平面 3 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ は 1 次元の Abel 多様体, すなわち**楕円曲線 (elliptic curve)** の例である. 有理点が C の変曲点なら, 群演算を直線を使って記述できる. 逆に, 楕円曲線は有理点である変曲点を持つ平面 3 次曲線としての表示を持つ. 詳細は [Sil09] 参照.

* 京都大学理学研究科サイエンス連携探索センター

例 1.3（Jacobi 多様体） 体 k 上で定義され, 有理点を持つ[*1]種数 g の滑らかな曲線 C から, 標準的に **Jacobi 多様体 (Jacobian variety)** と呼ばれる Abel 多様体 $\mathrm{Jac}(C)$ を構成できる. この Abel 多様体は C 上の次数 0 の直線束をパラメータ付けする粗モジュライ空間として特徴づけられ, C の種数と同じ次元を持ち, k 上で定義される. 詳細は [Mil86Jac] 参照.

準同型と平行移動は群スキームの場合と同様に定められる (付録参照). Abel 多様体の特殊な性質として, 次が挙げられる.

命題 1.4（[*2]） Abel 多様体 A, B の間の多様体としての射 $f\colon A \to B$ は, 準同型 $g\colon A \to B$ と平行移動 $t_{f(0_A)}$ の合成 $t_{f(0_A)} \circ g$ として一意的に表される.

特に, 原点を原点に送る射は自動的に準同型である. これから直ちに得られる帰結として, 次の重要な性質がある.

系 1.5 Abel 多様体は可換である.

この系は, 逆元を取る写像が群準同型であることから従う. 以下では群演算を $+$ や $-$ で表すことにする.

1.2 同種写像

準同型の中でも, 今後中心的な役割を果たすものが同種写像である. 下準備として, 核と像について性質を挙げておく.

補題 1.6（核と像） Abel 多様体 A, B の間の準同型 $f\colon A \to B$ について,

- f の (スキーム論的) 像は Abel 多様体である.
- f の核の単位元を含む連結成分の被約化は Abel 多様体である.

定義 1.7 Abel 多様体の間の準同型で, 全射, かつ核が ($\mathrm{Spec}(k)$ 上のスキームとして) 有限なものを**同種写像 (isogeny)** という. また同種写像 $f\colon A \to B$ について, $\mathrm{Ker}(f)$ の (スキームとしての) 位数を **f の次数 (degree)** と呼び, $\deg(f)$ で表す.

[*1] 有理点を持たない場合にも構成できるが, 特徴付けは違った記述になる.

[*2] **剛性補題 (rigidity lemma)** の結果である ([Mil86, Theorem 2.1], [Mum70, §4, p. 43]). 類似の補題は群スキームの場合でも成立し, そこから可換性が出る.

同種写像がある Abel 多様体は同じ次元を持つことに注意する.

例 1.8 Abel 多様体は可換である (系 1.5) ので, 正整数 n について同じ元を n 回足す写像

$$[n]_A\colon A \longrightarrow A \quad ; \quad a \mapsto \overbrace{a+a+\cdots+a}^{n}$$

は群準同型である. さらに

$$[0]_A\colon A \longrightarrow A \quad ; \quad a \mapsto 0_A,$$
$$[-n]_A\colon A \longrightarrow A \quad ; \quad a \mapsto -[n]_A(a)$$

で定めておく.

命題 1.9 ([Mil86, Theorem 8.2], [Mum70, §6, Application 3]) 体 k の標数を p とする. A を k 上の Abel 多様体, g を A の次元とし, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を正整数とする. このとき次が成立する.

- $[n]_A$ は同種写像で, $\deg([n]_A) = n^{2g}$ である. また n が標数 p と素のとき, かつそのときに限り $[n]_A$ はエタール射である.
- B を別の k 上の Abel 多様体, $f\colon A \to B$ を次数が n の同種写像とすると, 逆方向の同種写像 $g\colon B \to A$ で次を満たすものが存在する:

$$g \circ f = [n]_A, \quad f \circ g = [n]_B.$$

二つの Abel 多様体 A, B の間に同種写像 $f\colon A \to B$ が存在するとき, A, B は**同種 (isogenous)** であると呼ぶ. 同種性は明らかに反射律, 推移律を満たし, また上の命題 1.9 の最後の主張から対称律を満たすことがわかる. したがって,

系 1.10 同種性は Abel 多様体の間に同値関係を定める.

さて, Abel 多様体 A, B 間の準同型のなす Abel 群を $\mathrm{Hom}(A, B)$ と表し[*3],

$$\mathrm{Hom}_0(A, B) := \mathrm{Hom}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \mathrm{End}_0(A) := \mathrm{Hom}_0(A, A)$$

で定めると[*4], 同種写像 $f\colon A \to B$ はこの $\mathrm{Hom}_0(B, A)$ において逆射をもつ射であるということと同値である. ここから $\mathrm{Hom}_0(A, B)$ で逆射を持つ元を **$\mathbb{Q}$-同種写像**

[*3] この章では使わないが, k 上で定義されていることを強調して $\mathrm{Hom}_k(A, B)$ と表すことが多い. (cf. 津嶋氏の章.)

[*4] $\mathrm{End}^0(A), \mathrm{End}^\circ(A), \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ などの書き方もある. 津嶋氏の章では $\mathrm{End}_{M(k)}(A)$ を用いる.

($\mathbb{Q}$-isogeny) あるいは**擬同種写像 (quasi-isogeny)** と呼ぶ．また, 次の重要な定理が知られている:

定理 1.11（Poincaré の完全可約性定理 (Poincaré's complete reducibility theorem); cf. [Mil86, Proposition 12.1], [Mum70, §19, Theorem 4]） 体 k 上の Abel 多様体 A とその部分 Abel 多様体 B について, ある A の部分 Abel 多様体 C が存在し, A は $B \times C$ と同種である.

これから Abel 多様体は非自明な部分 Abel 多様体を持たない**単純 (simple)** な Abel 多様体の積と同種である．ここから $\mathbb{Q}$ 上で定義された (絶対) 単純な Abel 多様体などの話題に進むことができるが, 今回は次の定理を述べるにとどめておく (津嶋氏の章を参照).

系 1.12 体 k 上の Abel 多様体 A について, $\mathrm{End}_0(A)$ は半単純な $\mathbb{Q}$-代数である.

後々のために, ここで一つ記号を導入しておく.

定義 1.13 正整数 n について, 同種写像 $[n]_A$ の核を $A[n]$ と表す．命題 1.9 より, これは次数 n^{2g} の有限群スキームである.

2 複素数体上の Abel 多様体と複素トーラス

さてこれまでは代数幾何的な取扱いによって一般論を展開してきた．この章ではよりイメージしやすい（と目される）複素数体上の場合を通じてこれまでの概念を振り返る．さらに今後出てくる概念についても見通しをよくするために複素数体上でいくらか話を展開しておく.

まず A を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された Abel 多様体とすると, その $\mathbb{C}$-値点は古典位相でコンパクトな複素 Lie 群, すなわち**複素トーラス**になることが知られている．しかし複素トーラスは一般的には Abel 多様体にはならない．逆が成立するための条件を決定することがこの節の一つの目的である．参考文献は [Mum70, §1–§3], [Ros86, BL09] を挙げておく.

2.1 複素トーラス

まず有限次元実ベクトル空間 $V \cong \mathbb{R}^d$ の $\mathbb{Z}$-**格子 (lattice)** とは, 離散部分群 Λ で商 V/Λ がコンパクトになるもののことを指すとしよう[*5]. これから必然的に $\Lambda \cong \mathbb{Z}^d$ である. V が有限次元複素ベクトル空間の場合は, V を複素構造付きの実ベクトル空間だと思ったときの $\mathbb{Z}$-格子だとする. このとき, 複素ベクトル空間 $V \cong \mathbb{C}^g$ をその中の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda \subset V$ で割った V/Λ は, コンパクトで連結な複素 Lie 群の構造を持っている.

定義 2.1 複素トーラス (complex torus) X とは, 上のようにして作ったコンパクトで連結な複素 Lie 群 V/Λ と同型な複素 Lie 群と定める.

より簡潔な言い換えとして次の定理がある.

定理 2.2（[BL09, Lemma 1.1.1], [Mum70, §1]） コンパクトで連結な複素 Lie 群は複素トーラスである.

特に $\mathbb{C}$ 上定義された Abel 多様体の $\mathbb{C}$-値点は複素トーラスに同型である.

さらにいくつかの性質をまとめておく. $X = V/\Lambda$ を複素トーラスとすると, 自然な全射 $\pi_X\colon V \to X$ がある. 原点 $0 \in V$ の X における像を 0_X と書く. さらに 0_X での X の接空間 $T_{0_X}X$ を $\operatorname{Lie} X$ と書く. 通常の複素 Lie 群と同様に $\operatorname{Lie} X$ には複素 Lie 環の構造が入るが, 今の場合, 可換なのでブラケット積は自明である.

補題 2.3（[BL09, Section 1.1], [Mum70, §1]） 上の設定の下で, 自然な同型 $\operatorname{Lie} X \to V$ があり, π_X とこの同型の合成は指数写像 $\exp\colon \operatorname{Lie} X \to X$ に一致する.

以降 $\operatorname{Lie} X$ と V を同一視する.

π_X は X の普遍被覆を与えており, したがって

$$\pi_1(X, 0_X) \cong \Lambda \tag{2.1}$$

である. Λ は可換であるから結局

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \Lambda, \quad H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}(\Lambda,\mathbb{Z}) \tag{2.2}$$

---

*5 分野や文献によって定義がかなり異なる. たとえば [Lan13] では単に自由 $\mathbb{Z}$-加群のこととしている.

である.

g 次元複素トーラスは実 Lie 群として $\mathrm{U}(1)^{2g}$ に同型である. $\mathrm{U}(1)$ は円周 S^1 に同型であるから, 結局 Künneth の公式より, 正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について

$$H^n(X,\mathbb{Z}) \cong \bigwedge^n \mathrm{Hom}(\Lambda,\mathbb{Z}) \tag{2.3}$$

が従う ([BL09, Lemma 1.3.1]). 右辺は Λ の, $\mathbb{Z}$-値 n 変数交代形式の空間に自然に同一視されることに注意されたい.

2.2 直線束, Riemann 形式, 偏極

$\mathrm{Pic}(X)$ を複素トーラス X 上の直線束の同型類のなす集合とする. これは直線束のテンソル積を積, 自明束を単位元とする群構造を持ち, 群構造を含めて標準的に $H^1(X,\mathcal{O}_X^\times)$ に同型である. 以降この二つの群を自然に同一視する.

いま $\mathbb{Z}_X$ を X 上の定数層としたとき, 層の短完全列

$$0 \longrightarrow 2\pi i\,\mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 1 \tag{2.4}$$

から, 次のような対象が定まる:

定義 2.4（[BL09, Section 2.1], [Ros86, §4]） 記号や状況は上に基づく.

- 自然な同型と連結準同型の合成

$$c_1\colon\ \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\cong} H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}_X)$$

  の合成を c_1 と書き, 直線束 $\mathcal{L}$ についてその像 $c_1(\mathcal{L})$ を $\mathcal{L}$ の**第一 Chern 類 (first Chern class)** と呼ぶ.
- c_1 の像のことを X の **Néron–Severi 群 (Néron–Severi group)** といい, $\mathrm{NS}(X)$ で表す.

(2.3) より, $H^2(X,\mathbb{Z}_X)$ は Λ 上の交代双線形形式の空間と同一視できることを思い出し, $c_1(\mathcal{L})$ に対応する Λ 上の交代形式を $E_{\mathcal{L}}$ と書くことにする[*6]. さらに, 次が成立する.

[*6] 交代形式と直線束の具体的な対応は [BL09, Section 2.1], [Mum70, §2] を参照

命題 2.5 ([BL09, Section 2.2], [Ros86, §4]) 準同型 c_1 の核, あるいは (2.4) から誘導される長完全列における

$$H^1(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

の余核は複素トーラスの構造を持つ.

実際, (2.2) でみたように

$$H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$$

であるし, また少々の調査によって

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$$

である ($\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}$ は $\mathbb{C}$-反線形写像を指す. 詳しくは [BL09, Section 2.4] 参照).

定義 2.6 命題 2.5 で現れる複素トーラスを X の**双対トーラス (dual torus)** といい, $X^\vee$ で書き表す.

複素トーラスの間の準同型 $f\colon X \to Y$ が与えられると, 同時に直線束の引き戻しによって ${}^t\!f\colon Y^\vee \to X^\vee$ が得られることに注意しておく. これについて,

$$^t(f+g) = {}^t\!f + {}^t\!g$$

が成立する. また f が同種写像なら ${}^t\!f$ も同種写像である.

複素トーラス X の直線束 $\mathcal{L}$ を選ぶごとに, 双対トーラス $X^\vee$ への準同型

$$\phi_{\mathcal{L}}\colon X \longrightarrow X^\vee \quad ; \quad x \mapsto t_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

が定まる*7. これは直線束 $\mathcal{L}$ の第一 Chern 類 $c_1(\mathcal{L}) \in \mathrm{NS}(X)$ にのみ依存することがわかる ([BL09, Corollary 2.4.6]).

複素トーラスについての同種写像は Abel 多様体と同様, 全射で核が有限な準同型のこととする. 次が本節のメインである.

命題 2.7 ([BL09, Section 4.5], [Ros86, §3]) 複素トーラス X について, 次が成立する.

---

*7 準同型になることは**正方形定理 (Theorem of Square)** の帰結である. [BL09, Theorem 2.3.3] 参照.

- 直線束 $\mathcal{L}$ が豊富なら $\phi_{\mathcal{L}}$ は同種写像になる.
- 豊富直線束が存在することと, 複素トーラス X が Abel 多様体の構造を持つことは同値である.

後者の証明には後述する Riemann 形式や theta 関数を用いて良い因子を作り, その因子を用いて埋め込みを構成するという手法を用いる. 概説は [Ros86, §3], 詳説は [Mum70, §3], [BL09, §1–§4] を見よ.

定義 2.8（偏極と主偏極[*8]）

- 複素 Abel 多様体 A について, 豊富直線束 $\mathcal{L}$ から定まる同種写像 $\phi_{\mathcal{L}}\colon A \to A^{\vee}$ を A の**偏極 (polarization)** と呼ぶ.
- $\mathrm{Hom}_0(A, A^{\vee})$ のなかである偏極 $\phi_{\mathcal{L}}$ の正の有理数倍になっている元を **$\mathbb{Q}$-偏極 ($\mathbb{Q}$-polarization)** という.
- 偏極との組 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ を**偏極付き Abel 多様体 (polarized Abelian variety)** と呼ぶ.
- 同型である偏極を**主偏極 (principal polarization)** と呼び, 主偏極との組 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ を**主偏極付き Abel 多様体 (principally polarized Abelian variety, p.p. AV)** と呼ぶ.

さらに, 偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ から $(B, \phi_{\mathcal{M}})$ への射を Abel 多様体の射 $f\colon A \to B$ で ${}^t f \circ \phi_{\mathcal{M}} \circ f = \phi_{\mathcal{L}}$ を満たすものとして定義する.

偏極に該当するデータを $\mathbb{Z}$-格子 Λ の言葉で言い換えることができる[*9]. これは次小節, 特に例 2.18 参照のこと. その解釈を使えば, 複素 Abel 多様体 A の双対トーラス $A^{\vee}$ が再び複素アーベル多様体になることも, 偏極 $\phi_{\mathcal{L}}\colon A \to A^{\vee}$ が代数的な射になることもわかる. 偏極つき複素 Abel 多様体の具体例は次小節の最後に譲る.

この節で今まで考えてきた対象の圏論的な整備をしておく.

定義 2.9 以下のようにして四つの圏を定義する.

[*8] [BL09, §4] では Riemann 形式 E の Hermite 化を, [Ros86, §5] ではその $\mathbb{Q}$-同値類のことを偏極と呼んでいる. ここでは [Mil86] に合わせた.

[*9] また別の言いかえとして, $A \times A$ 上の直線束に付加構造を追加した**対応 (correspondence)** の言葉でも言いかえることができる. 詳細は例えば `http://math.stanford.edu/~conrad/vigregroup/vigre04/polarization.pdf` 参照.

複素トーラスの圏 (CTor)

　対象:　複素トーラス,

　X **から** Y **への射**:　X から Y への複素トーラスとしての準同型．全体は $\mathrm{Hom}(X, Y)$ と書く．

複素トーラスの同種圏 (ICTor)

　対象:　複素トーラス,

　X **から** Y **への射**:　$\mathrm{Hom}_0(X, Y) = \mathrm{Hom}(X, Y) \otimes \mathbb{Q}$ の元.

複素 Abel 多様体の圏 (AV)

　対象:　複素 Abel 多様体 (= 偏極付け可能な複素トーラス),

　A **から** B **への射**:　Abel 多様体の準同型 $f \colon A \to B$．これは Chow の補題から複素トーラスの準同型と言っても同じなので, (CTor) の射と区別せず $\mathrm{Hom}(A, B)$ と書く．(とくに (AV) は (CTor) の充満部分圏.)

複素 Abel 多様体の同種圏 (IAV)

　対象:　複素 Abel 多様体,

　A **から** B **への射**:　$\mathrm{Hom}_0(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Q}$ の元.

これらの性質は以下のようにまとめられる.

- (CTor) は Abel 圏にならない（たとえば 2 倍写像 $[2]_X \colon X \to X$ は, epi 射だが余核写像とはならない）.
- (ICTor) は Abel 圏になる.
- (AV) は Abel 圏でない.
- (IAV) は半単純 Abel 圏になる (半単純性は Poincaré の可約性定理による).

さらに別の圏として, 主偏極付き Abel 多様体の圏 (PPAV) の圏を考えておく.

対象:　主偏極つき複素 Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$,

$(A, \phi_{\mathcal{L}})$ **から** $(B, \phi_{\mathcal{M}})$ **への射**:　偏極付き Abel 多様体の同型 $f \colon (A, \phi_{\mathcal{L}}) \to (B, \phi_{\mathcal{M}})$.

2.3 Hodge 構造と複素トーラス

先ほども述べたように, 偏極は複素トーラスの Lie 環 Lie $X = V$ やその $\mathbb{Z}$-格子 Λ の言葉で言い換えることができる. それを見るために, Hodge 構造を導入し, 段階的にデータの同値性を見ていくことにする ([Del71b], [BL09, §17], 阿部氏の章を参照). なおこの章では混合 Hodge 構造は取り扱わない.

定義 2.10（純 Hodge 構造） 整数 n について, 重さ n の **(純)(整)Hodge 構造 ((pure) (integral) Hodge structure)** とは, 次の二つのデータ $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n})$ のことである.

- $H_{\mathbb{Z}}$: 有限生成自由 Abel 群[*10].
- $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ の $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての直和分解 $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$ で, $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$ を満たすもの.

重さ n の Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n})$ の**型 (type)** とは, $H^{p,q} \neq 0$ となる組 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ の集合を指す. また「型 $\{(p_i,q_i)\}_{1\le i\le n}$ の Hodge 構造」と呼んだ場合, Hodge 構造であって型が $\{(p_i,q_i)\}_{1\le i\le n}$ の部分集合になることを指す.

Hodge 構造の射 $f\colon H_{\mathbb{Z}} \to H'_{\mathbb{Z}}$ は, Abel 群の準同型 $f\colon H_{\mathbb{Z}} \to H'_{\mathbb{Z}}$ で, $\mathbb{C}$ をテンソルしたとき分解を保つものを指す. つまりすべての $p,q \in \mathbb{Z}$ について $f(H^{p,q}) \subset H'^{p,q}$ である.

また上の定義で $H_{\mathbb{Z}}$ を有限次元 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $H_{\mathbb{Q}}$ と取り替えたものを重さ n の **(純) $\mathbb{Q}$-Hodge 構造 ((pure) $\mathbb{Q}$-Hodge structure)** と呼ぶ. $\mathbb{Q}$-Hodge 構造の射も同様に定義する.

これらによって Hodge 構造, $\mathbb{Q}$-Hodge 構造の圏が定義できた. この二つの圏は直和, テンソル, 双対などの操作を持つ. たとえば二つの Hodge 構造 $H = (H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n}), H' = (H'_{\mathbb{Z}}, (H'^{p,q})_{p+q=n})$ のテンソル積 $H \otimes H'$ は

$$(H\otimes H')_{\mathbb{Z}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes H'_{\mathbb{Z}}$$
$$(H\otimes H')^{p,q} := \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} H^{p_1,q_1} \otimes H'^{p_2,q_2}$$

[*10] [Del71b, Définition 2.1.10] は torsion 加群なども含めている.

で与えられ, 重さは元の Hodge 構造の重さの和となる. また Hodge 構造 H の双対 Hodge 構造 H^* は

$$H^*_{\mathbb{Z}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$$
$$(H^*)^{p,q} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{-p,-q}, \mathbb{C})$$

で与えられ, 重さは元の Hodge 構造の -1 倍となる. なお実 Hodge 構造, つまり $\mathbb{R}$-Hodge 構造も $\mathbb{Q}$-Hodge 構造と同様に定義できるが, この章では扱わない.

注意 2.11　Deligne トーラス (Deligne torus) $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_m$ を用いた各種 Hodge 構造の同値な言い換えがある (cf. [Del71b, §2.1], 阿部氏の章).

注意 2.12　型 $(-1,0),(0,-1)$ の Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, H^{-1,0}, H^{0,-1})$ を考えることは, 実ベクトル空間 $V = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ に整構造 $H_{\mathbb{Z}}$ と複素構造 $J\colon V \to V$ を入れることに同値である ([BL09, Proposition 17.1.1]).

実際, 複素構造 J が定まっているときは, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ のうち, $H^{-1,0}$ は $J \otimes 1$ が $1 \otimes i$ 倍で作用する部分, $H^{0,-1}$ は $J \otimes 1$ が $1 \otimes (-i)$ 倍で作用する部分とすればよい. 逆に Hodge 分解 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = H^{-1,0} \oplus H^{0,-1}$ があるときは, 包含写像と射影の合成 $V \hookrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to H^{-1,0}$ は V と $H^{-1,0}$ の $\mathbb{R}$-ベクトル空間としての同型になるので, $H^{-1,0}$ 側の $1 \otimes i$ の作用を V の複素構造とすれば良い.

双対的に, 型 $(1,0),(0,1)$ の Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, H^{1,0}, H^{0,1})$ を考えるときも同様の理解ができる. このことは上述した Deligne トーラスの作用による Hodge 構造の言いかえを使うと理解しやすいかもしれない.

例 2.13（Tate ひねり）　次のように置く:

- $H_{\mathbb{Z}} = (2\pi i)^n \mathbb{Z}$.
- $H^{-n,-n} = H_{\mathbb{C}}$.

この組は重さ $-2n$, 型 $(-n,-n)$ の Hodge 構造を与える. これを簡単に $\mathbb{Z}(n)$ と書き, **Tate ひねり (Tate twist)** という. また $\mathbb{Q}$-Hodge 構造 $\mathbb{Q}(n) := \mathbb{Z}(n) \otimes \mathbb{Q}$ についても Tate ひねりという.

例 2.14　複素トーラス $X = V/\Lambda$ について, そのコホモロジーには **Hodge 分解 (Hodge decomposition)** がある ([BL09, §1.4] に詳細がある). 今必要な場所だけ

述べておくと,

$$H^1(X,\mathbb{C}) = H^1(X,\mathcal{O}_X) \oplus H^0(X,\Omega_X)$$

である. (2.2) の同型と Hodge 分解から, 次のような重さ 1 の Hodge 構造が定まる:

- $H_{\mathbb{Z}} = H^1(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Lambda,\mathbb{Z})$.
- $H^{1,0} = H^0(X,\Omega_X)$, $H^{0,1} = H^1(X,\mathcal{O}_X)$.

しかし X にこの Hodge 構造を対応させるのは反変的な函手になる. これを共変的にするには, その双対 Hodge 構造, つまり

- $H_{\mathbb{Z}} = H_1(X,\mathbb{Z}) = \Lambda$.
- $H^{-1,0} = (H^{1,0})^* \cong V$, $H^{0,-1} = (H^{0,1})^* \cong \overline{V}$.

を取ればよい. ただし $(\cdot)^*$ は複素ベクトル空間の双対を表す. また $\overline{V}$ は下部集合は V と同一だが, $\alpha+\beta i \in \mathbb{C}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ によるスカラー倍を V における $\alpha - \beta J$ 倍で定義した複素ベクトル空間である (J は注 2.12 にある V の複素構造). 標準的に

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus \overline{V} \quad ; \quad v \otimes (\alpha+\beta i) \mapsto ((\alpha+\beta J)v, (\alpha-\beta J)v)$$

が同型である. この Hodge 構造は重さ -1, 型は $(-1,0),(0,-1)$ である.

逆に型 $(-1,0),(0,-1)$ の Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, H^{-1,0}, H^{0,-1})$ が与えられたとする. $\mathrm{pr}^{-1,0}\colon H_{\mathbb{C}} \to H^{-1,0}$ を標準的な射影としたとき,

$$X := H^{-1,0}/\mathrm{pr}^{-1,0}(H_{\mathbb{Z}})$$

は複素トーラスになる. これらの構成は互いに準逆になっており, 結果として次の定理が言える:

定理 2.15 上の二つの構成は函手的であり, 圏同値

$$(\mathrm{CTor}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{型 } (-1,0), \\ (0,-1) \text{ の} \\ \text{Hodge 構造} \end{array}\right) \quad \text{および} \quad (\mathrm{ICTor}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{型 } (-1,0), \\ (0,-1) \text{ の} \\ \mathbb{Q}\text{-Hodge 構造} \end{array}\right)$$

を導く.

ここに付加構造を加えて, 複素 Abel 多様体の圏と同型にすることを考える. それには以下のような付加構造が必要になる.

定義 2.16（偏極付き Hodge 構造） 重さ n の Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n})$ について, **偏極 (polarization)** とは次のような Hodge 構造の準同型 $Q\colon H_{\mathbb{Z}} \otimes H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}(-n)$ のことを指す: $Q_{\mathbb{C}}$ を Q の $H_{\mathbb{C}}$ への $\mathbb{C}$-双線形な延長としたとき,

(1) $Q_{\mathbb{C}}(\phi, \psi) = (-1)^n Q_{\mathbb{C}}(\psi, \phi)$. つまり n が偶数なら対称的, n が奇数なら交代的.

(2) $\phi \in H^{p,q}$ について $i^{p-q} \cdot (2\pi i)^n Q_{\mathbb{C}}(\phi, \overline{\phi}) > 0$.

の二条件が成立する.

重さ n の Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n})$ とその偏極 $Q\colon H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}(-n)$ の組 $(H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n}, Q)$ を重さ n の**偏極付き Hodge 構造 (polarized Hodge structure)** と呼ぶ. 偏極付き Hodge 構造の射

$$f\colon (H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n}, Q) \to (H'_{\mathbb{Z}}, (H'^{p,q})_{p+q=n}, Q')$$

は, Hodge 構造の射

$$f\colon (H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n}) \to (H'_{\mathbb{Z}}, (H'^{p,q})_{p+q=n})$$

であって偏極との整合性

$$Q'(f(v), f(w)) = Q(v, w)$$

をいう. これにより偏極付き Hodge 構造の圏ができる.

Hodge 構造 $H = (H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=n})$ の**主偏極 (principal polarization)** は, 偏極 Q が完全なペアリングになっているものを指す. 言い換えると, $v \mapsto Q(v, \cdot)$ が同型 $H_{\mathbb{Z}} \to H_{\mathbb{Z}}^*$ を導くものである.

また, Hodge 構造の中で, 偏極を一つ以上持つものを**偏極付け可能 (polarizable)** な Hodge 構造という. 偏極付け可能な Hodge 構造の射は, 単に Hodge 構造の射を意味する.

$\mathbb{Q}$-Hodge 構造にも同様に偏極を定義することができる.

例 2.17 Tate ひねりには, $Q((2\pi i)^n, (2\pi i)^n) = (2\pi i)^{2n}$ とおいて線形に延長することで, 偏極 $Q\colon \mathbb{Z}(n) \otimes \mathbb{Z}(n) \to \mathbb{Z}(2n)$ を入れることができる.

例 2.18 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ を偏極付きの複素 Abel 多様体とする.

$\phi_{\mathcal{L}}$ を与える豊富直線束 $\mathcal{L}$ を自由にとって, それに対応する交代形式 $E_{\mathcal{L}}$ を考える (これは $\mathcal{L}$ のとり方によらない). $E_{\mathcal{L}}\colon \Lambda\times\Lambda\to\mathbb{Z}$ は A に対応する重さ -1 の Hodge 構造に偏極を与えていることが確かめられる.

実際 $E_{\mathcal{L}}$ を $V=\Lambda\otimes\mathbb{R}$ に実線形に拡張したものを E と書くと, E は以下の一連の **Riemann の関係式 (Riemann relation)** と呼ばれる性質を満たす:

補題 2.19（Riemann の関係式[*11]） $u,v\in V$ とし, V の複素構造を J として,

(1) E は Λ 上整数値である.
(2) $E(u,v)=-E(v,u)$. つまり交代的である.
(3) $E(Ju,Jv)=E(u,v)$.
(4) $E(Ju,v)$ は正定値対称形式である.

さて, 複素トーラス $A(\mathbb{C})$ から例 2.14 のようにして重さ -1 の Hodge 構造 $(\Lambda,V,\overline{V})$ が定まった. 補題 2.19 の性質は, $E_{\mathcal{L}}$ が Hodge 構造 $(\Lambda,V,\overline{V})$ に偏極を定めることと同値である.

練習 2.20 $-2\pi iE_{\mathcal{L}}$ が Hodge 構造 $(\Lambda,V,\overline{V})$ に偏極を定めていることを確かめよ (ヒント: $Q(u,v)=-2\pi iE_{\mathcal{L}}(u,v)$ と関係づければよい. [Ros86, §3] も参照のこと).

ここで定義をしておこう:

定義 2.21 (Riemann 形式[*12]) 整構造 Λ をもつ複素ベクトル空間 V 上の実双線形形式 $E\colon V\times V\to\mathbb{R}$ で, Riemann 関係式を満たすものを **Riemann 形式 (Riemann form)** と呼ぶ.

さらに, Riemann 形式の行列式が ±1 になることと $\phi_{\mathcal{L}}$ が主偏極であることが同値である ([BL09, Lemma 3.1.4] など). 結果的に次の定理を得る:

[*11] この関係式を**周期行列 (period matrix)** (越川氏の章でいうところの $g\times 2g$ 行列 Ω) によって言い換えたものを Riemann の関係式と呼ぶことも多い. 言い換えについては越川氏の章の命題 2.3 を参照.

[*12] この言葉にもいくつかの流儀がある. たとえば V 上の双線形形式 E の代わりに格子上の双線形形式 $E_{\mathcal{L}}$ を Riemann 形式と呼ぶもの ([Mil05]), あるいは E を交代 Riemann 形式と呼んで, Hermite 形式 $H(u,v)=E(Ju,v)+iE(u,v)$ を Riemann 形式と呼ぶもの ([Ros86]) などである. 今回は [BL09] に従った. なお, Riemann 形式 E と複素トーラスの偏極 $\phi\colon X\to X^{\vee}$ の具体的な記述については [Ros86, §4] を参照のこと.

定理 2.22（[Mil05, Theorem 6.8], [Del71b, Rappel 4.4.3]） 定理 2.15 の圏同値と同様にして, 圏同値

$$(\mathrm{AV}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{偏極付け可能な}\\ \text{型 } (-1,0),\\ (0,-1) \text{ の}\\ \text{Hodge 構造}\end{array}\right) \quad \text{および} \quad (\mathrm{IAV}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{偏極付け可能な}\\ \text{型 } (-1,0),\\ (0,-1) \text{ の}\\ \mathbb{Q}\text{-Hodge 構造}\end{array}\right)$$

が得られる.

また, 同様にして $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ に $(\Lambda, V, \overline{V}, -2\pi i E_{\mathcal{L}})$ を対応させる関手で, 別の圏同値

$$(\mathrm{PPAV}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{主偏極つき}\\ \text{型 } (-1,0),\\ (0,-1) \text{ の}\\ \text{Hodge 構造}\end{array}\right)$$

が得られる.

練習 2.23 偏極を持たない重さ -1 の Hodge 構造の例を挙げよ. これは Abel 多様体でない複素トーラスの例を挙げることに同値である.

例 2.24 1 次元複素トーラスは常に偏極を持つ. 実際, $\mathbb{C}$ 中の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$ について, $\Im(\lambda_1/\lambda_2) > 0$ となるように向きを取る. このとき $E_\Lambda \colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$ 上の交代テンソルを用いて

$$z \wedge w = E_\Lambda(z, w)\lambda_1 \wedge \lambda_2 \quad (z, w \in \Lambda)$$

で定めると, これの $V = \Lambda \otimes \mathbb{R}$ への自然な拡張 E は行列式が 1 の Riemann 形式であることがわかる. したがって Hodge 構造 $(\Lambda, V, \overline{V})$ に主偏極が定まることが確かめられる. 特に 1 次元複素トーラス V/Λ は常に Abel 多様体の構造を持つ.

練習 2.25 E が行列式 1 の Riemann 形式であることを確かめよ.

練習 2.26 Jacobi 多様体の主偏極について調べてみよ.

例 2.27 (CM type から決まる Abel 多様体; [Ros86, §3, Theorem A の後], [Shi98, §6]; cf. 越川氏の章) 先に用語を整えておく. **CM 体**は総実体の総虚な二次拡大とし, **CM 代数**は CM 体の直積と定義する.

L を $\mathbb{Q}$ 上 $2g$ 次元の CM 代数とすると, 代数としての準同型 $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{C})$ は $2g$ 元ある. 一方この集合には複素共役 c が (左から) 作用する. $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{C})$ の c による作

用の代表系 Φ と CM 代数 L の組 (L, Φ) を **CM type** という[*13].

CM 代数 L の CM type $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_g\}$ を一つ固定すると, 準同型

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_g)\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}^g$$

は埋め込みを与え, さらに $\mathbb{R}$-代数 $V = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ と $\mathbb{C}^g$ の同型に拡張される.

$\mathcal{O}_L$ を L の整環, $\mathfrak{a}$ を L の分数イデアルとする[*14]. すると $\Phi(\mathfrak{a})$ は $\mathbb{C}^g$ の $\mathbb{Z}$-格子となり, $(\Lambda = \mathfrak{a}, V = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \overline{V})$ は Hodge 構造を与える.

偏極を与えるために, 次のような $\xi \in L$ を取る.

- すべての i について $\phi_i(\xi)$ は正の虚部を持つ純虚数.
- すべての $a, b \in \mathfrak{a}$ について

$$\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\xi \widetilde{a} b) \in \mathbb{Z}.$$

ここで $\widetilde{a} \in L$ は a の複素共役である. すると, 交代形式

$$\begin{aligned} E\colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ E((z_i)_i, (w_i)_i) &:= \sum_i \phi_i(\xi)(\overline{z}_i w_i - z_i \overline{w}_i) \end{aligned}$$

は Riemann 形式になっているので, 偏極を定めることがわかる. 特に $A = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\mathfrak{a}$ は Abel 多様体である.

練習 2.28 E が Riemann 形式であることを確かめよ.

実はこのようにして定める Abel 多様体は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義され, その同種類は整環 $\mathcal{O}_L$ や $\mathfrak{a}$ に依らないことがわかっている ([Shi98, §6.1]). さらに構成から $\mathrm{End}_0(A)$ は L を部分代数として含む (**虚数乗法**をもつ Abel 多様体). 逆に g 次元 Abel 多様体 B について $\mathrm{End}_0(B)$ が L を部分代数として含む場合, 適切に CM type を選ぶと, 上記のように構成した Abel 多様体と同種になることが知られている.

---

*13 Φ のみを指して CM type と言い, (L, Φ) の組を **CM pair** と呼ぶことがある.

*14 ここで L が体の直積の場合における分数イデアルの定義は, L の直積成分である各々の体へ射影した時に (0 でない) 分数イデアルとなっていることである.

3 Abel 多様体再び

この節では前節にて, 複素数体上で解析的に導入した偏極を一般の体 k 上の設定で議論していく. また複素トーラスを扱ううえで中心的であった $\mathbb{Z}$-格子 Λ の類似概念を定義し, それについて少しだけ性質を述べる.

3.1 双対 Abel 多様体, 偏極

Abel 多様体の一般論で一つの驚きといえば次の定理である.

定理 3.1（[Mil86, Theorem 7.1], [Mum70, §6, Application 1]） 任意の Abel 多様体 A 上には豊富直線束が存在する. すなわち Abel 多様体は射影的である.

注意 3.2 さらにすべての豊富直線束 $\mathcal{L}$ について, $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ が非常に豊富であることを示すことができる (**Lefschetz の埋め込み定理**, [Mum70, §17]). たとえば楕円曲線 E とその有理点 P について, $\mathcal{O}(3P)$ は射影平面への埋め込みを与える. これは冒頭の例 1.2 における, 楕円曲線の平面 3 次曲線による表示を与えている.

これを用いて偏極を定義したいところであるが, そのためには双対 Abel 多様体を定義しなければいけない. まず k を代数閉体として話を進める.

$\mathrm{Pic}(A)$ を A 上の直線束の同型類とする. $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A)$ について, 前と同様の写像

$$\phi_{\mathcal{L}} \colon A(k) \to \mathrm{Pic}(A) \quad ; \quad x \mapsto t_x^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

は準同型になる. この $\phi_{\mathcal{L}}$ が 0 写像であるような $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A)$ の集合を $\mathrm{Pic}^0(A)$ と書く.

定理 3.3（[Mil86, §8], [Mum70, §13]） 任意の Abel 多様体 A について, 次のような Abel 多様体 $A^\vee$ と $A \times A^\vee$ 上の直線束 $\mathcal{P}$ が存在する.

- $\mathcal{P}|_{\{0\} \times A^\vee}$ は自明直線束である.
- $a \in A^\vee(k)$ について, $\mathcal{P}|_{A \times \{a\}}$ は $\mathrm{Pic}^0(A)$ に属する A 上の直線束である.
- k-スキーム T と $A \times T$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ が次を満たしているとする.
  - $\mathcal{P}|_{\{0\} \times T}$ は自明直線束である.
  - $t \in T$ について, $\mathcal{P}|_{A \times \{t\}}$ は $\mathrm{Pic}^0(A_{k(t)})$ に属する A 上の直線束である.

このとき, ある k 上の射 $f\colon T \to A^\vee$ が一意的に存在して, $(1 \times f)^*\mathcal{P} = \mathcal{L}$ である.

一言でまとめると, 前者二つの性質を持つスキーム T と直線束 $\mathcal{L}$ の組の中で普遍的な対象であるということである. 特に各直線束 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(A)$ について $A^\vee(k)$ の中に対応する点が存在するので, $A^\vee$ は $\mathrm{Pic}^0(A)$ を対応付けていることがわかる.

定義 3.4 上記定理の $A^\vee$ を A の**双対 Abel 多様体 (dual Abelian variety)**, $\mathcal{P}$ を A の **Poincaré 束 (Poincaré bundle)** と呼ぶ.

この Poincaré 束を用いると, Abel 多様体の準同型 $f\colon A \to B$ についてその転置 ${}^tf\colon B^\vee \to A^\vee$ を次で定義することができる. $\mathcal{P}_B$ を $B \times B^\vee$ の Poincaré 束としたとき, $(f \times 1)^*\mathcal{P}_B$ は $A \times B^\vee$ の直線束になる. この直線束は $T = B^\vee$ として考えれば定理 3.3 の条件を満たすので, ある転置写像 ${}^tf\colon B^\vee \to A^\vee$ が存在して

$$(1 \times {}^tf)^*\mathcal{P}_A \cong (f \times 1)^*\mathcal{P}_B$$

となる. 複素トーラスと同様, ${}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg$ が成立する他, f が同種写像なら ${}^tf$ も同種写像である.

さらに複素数体上の時と同様に次が成立する.

命題 3.5 (cf. [Mum70, §13, Corollary 5] および [Mum70, §6, Application 1]) $\phi_{\mathcal{L}}$ は k 上定義された代数的な射 $A \to A^\vee$ になり, $\mathcal{L}$ が豊富直線束なら同種写像になる.

これをもとに, 偏極, 主偏極, 偏極付き Abel 多様体を定義 2.8 とまったく同様に定義することができる.

ここで k を一般の体に話を戻してみよう. 定理 3.3 の主張はそのまま成立し, 双対 Abel 多様体は k 上で存在することがわかる. また命題 3.5 もそのまま成立する. しかし閉体上で $\phi\colon A \to A^\vee$ が直線束 $\mathcal{L}$ についての $\phi_{\mathcal{L}}$ に一致しても, その直線束 $\mathcal{L}$ が体 k 上で定義できるとは限らない. したがって偏極の定義は次のようになる.

定義 3.6 同種写像 $\phi\colon A \to A^\vee$ で, 閉体まで持ち上げるとある直線束 $\mathcal{L}$ についての $\phi_{\mathcal{L}}$ に一致するものを**偏極 (polarization)** という.

これを用いて主偏極, 偏極付き Abel 多様体を一般の体上で定義することができた. Poincaré の完全可約性定理が成立することから, 偏極付け可能な Abel 多様体の同種

圏は以前と同様に半単純 Abel 圏になる.

複素数体上の時は述べなかったが, 次の性質に注意しておく.

定理 3.7 ([Mil86, Corollary 16.10], [Mum70, §23, Corollary 1]) 偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ について, ある主偏極付き Abel 多様体 $(B, \phi_{\mathcal{M}})$ とそこへの同種写像 $f\colon (A, \phi_{\mathcal{L}}) \to (B, \phi_{\mathcal{M}})$ が存在する.

これから任意の体 k 上において, 同種類の代表元としては主偏極つき Abel 多様体のみを考えればいいとわかる. なお主偏極を持たない Abel 多様体が存在することに注意しておく.

3.2 Tate 加群

以下では簡単のため k の標数を 0 とする[*15]. Abel 多様体を調べるにあたって以下の概念は極めて重要である.

定義 3.8 ([Mum70, §18]) A を体 k 上の Abel 多様体, $\overline{k}$ を k の代数閉包とする.

- m, n を正整数とし, 全射 $A[mn](\overline{k}) \to A[n](\overline{k})$ による逆系の逆極限 $T_f A := \varprojlim_N A[N](\overline{k})$ を **adelic Tate 加群 (adelic Tate module)** または**総 Tate 加群 (total Tate module)** と呼ぶ. $V_f A := T_f A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおくと, これは $\mathbb{Q}$ の有限 adéle 環 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$ 上の加群になっている.
- l を素数とする. $m > n$ を正整数とし, 全射 $A[l^m](\overline{k}) \to A[l^n](\overline{k})$ による逆系の逆極限 $T_l A := \varprojlim_n A[l^n](\overline{k})$ を l **進 Tate 加群 (l-adic Tate module)** と呼ぶ. $V_l A := T_l A \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ とおく.

今までのことを踏まえると, 以下の補題がわかる.

補題 3.9 g 次元 Abel 多様体 A について, 以下が成立する.

- $T_f A \cong \prod_l T_l A$ である.
- $\mathbb{Z}_l$-加群として $T_l A$ は階数 $2g$ の自由加群である.

[*15] 次の小節も含め, 標数正の場合も含めた取り扱いはたとえば [Mum70, §18 以降] を参照のこと. なお, 各素数 l ごとに定まっているタイプの概念や命題は, 仮定 $l \neq \mathrm{char}(k)$ のもとでまったく同様に成立する.

さて, これら Abel 多様体の Tate 加群が, 複素トーラスでいうところの $\mathbb{Z}$-格子の類似であることを見ていこう. まず k が複素数体 $\mathbb{C}$ の場合, 基本群の副有限完備化とエタール基本群, および Betti コホモロジーとエタールコホモロジーとの間に次の比較同型があった:

定理 3.10 S が複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限型スキームであるとする. S の $\mathbb{C}$-値点 $S(\mathbb{C})$ に自然に複素解析空間の構造を入れる. このとき,

- ([SGA1, Exposé XII, Corollaire 5.2]) 各 $x \in S(\mathbb{C})$ について, 自然な同型
$$\pi_1^{\text{ét}}(S, x) \cong \pi_1(S(\mathbb{C}), x)^\wedge$$
が存在する. ここで右辺は基本群 $\pi_1(S(\mathbb{C}), x)$ の副有限完備化である.
- ([SGA4, Exposé XI, XVI]) 各素数 l について
$$H^i_{\text{ét}}(S, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \cong H^i(S(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$$
$$H^i_{\text{ét}}(S, \mathbb{Q}_l) \cong H^i(S(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_l$$
という自然な同型が存在する. ここでそれぞれの同型について, 左辺はエタールコホモロジー, 右辺は特異コホモロジーである.

いま S が複素 Abel 多様体 $A = (A, m, i, e)$ であるとき, 基本群 $\pi_1(A(\mathbb{C}), e)$ は格子 Λ であった (同型 (2.1)). これと定理 3.10, および次の定理を合わせると, 総 Tate 加群 $T_f A$ が格子 Λ の類似 ($k = \mathbb{C}$ の場合は副有限完備化 $\widehat{\Lambda}$) であることがわかる:

定理 3.11（Serre–Lang の定理; [Mum70, §18]） A のエタール基本群について,
$$\pi_1^{\text{ét}}(A \otimes_k \overline{k}) \cong T_f A$$
という自然な同型が存在する.

この証明は A のエタール被覆が再び Abel 多様体になり, 被覆写像が同種写像になることを示すことで行われる. これはまた Lie 群の被覆空間が再び Lie 群になることの類似でもある. また上の定理から, l 進 Tate 加群 $T_l A$ は Λ の副 l 進完備化になることもわかる.

次にコホモロジーを考える. 次の主張は冒頭の (2.1) や (2.3) の類似である.

命題 3.12（[Mil86, Theorem 15.1]） 各素数 l と体 k 上の Abel 多様体 A について, 以下が成立する.

- 自然な同型
$$H^1_{\text{ét}}(A \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Z}_l) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(A \otimes_k \overline{k}), \mathbb{Z}_l)$$
が存在する.
- 自然な同型
$$H^i_{\text{ét}}(A \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Z}_l) \cong \bigwedge^i \mathrm{Hom}(T_l A, \mathbb{Z}_l)$$
が存在する. さらにこの同型はエタールコホモロジーのカップ積と右辺の外積という二つの積構造について整合的である.

以上の定理から 1 次のエタールコホモロジー $H^1_{\text{ét}}(A \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Z}_l)$ は, 複素の世界で言う双対格子 $\Lambda^\vee$ の副 l 部分にあたるもので, また l 進 Tate 加群 $T_l A$ の双対でもあることがわかる.

さらに, Riemann 形式にあたる概念を考えることができる. ここでは詳細を述べないが, 偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ と各正整数 N について, **Weil ペアリング (Weil pairing)** [*16] と呼ばれる交代的な双線形写像
$$e_{\mathcal{L},N} \colon A[N](\overline{k}) \times A[N](\overline{k}) \to \mu_N(\overline{k})$$
が存在する ([Mum70, §20]). ここに μ_N は 1 の N 乗根のなす群スキームである. Weil ペアリングの値域のほうも合わせて射影極限を取ると, これは Hodge 構造における Tate ひねりの類似になっている. その前に記号の準備をする.

定義 3.13(Tate ひねり) $\overline{k}$ を k の代数閉包とする.

- l を素数とする. $m > n$ を正整数とし, 全射 $\mu_{l^m}(\overline{k}) \to \mu_{l^n}(\overline{k})$ による逆系の逆極限 $\varprojlim_n \mu_{l^n}(\overline{k})$ を $\mathbb{Z}_l(1)$ と書き, **Tate ひねり (Tate twist)** と呼ぶ. $\mathbb{Z}_l$-加群としては $\mathbb{Z}_l$ に同型だが, 通常自明でない Galois 作用が入っている.
- 正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について,
$$\mathbb{Z}_l(n) := \mathbb{Z}_l(1)^{\otimes n}$$
$$\mathbb{Z}_l(0) := \mathbb{Z}_l$$
$$\mathbb{Z}_l(-n) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(\mathbb{Z}_l(n), \mathbb{Z}_l)$$
と定める. ここで $\mathbb{Z}_l(0) = \mathbb{Z}_l$ には自明な Galois 作用を入れている.

[*16] 日本語では Weil 対, Weil 対形式と呼ばれることがある.

- さらに, 任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ について $\mathbb{Q}_l(n) := \mathbb{Z}_l(n) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ とおく.
- **Adelic Tate ひねり (adelic Tate twist)** $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ は

$$\hat{\mathbb{Z}}(1) := \varprojlim_{N} \mu_N(\overline{k})$$

として定義する. $\hat{\mathbb{Z}}(n)$ も同様である.
- 整数 n について, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}(n) := \hat{\mathbb{Z}}(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とする.

定理 3.14 偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ について, Weil ペアリングから非退化で交代的なペアリング

$$e_{\mathcal{L},l} \colon T_l A \times T_l A \to \mathbb{Z}_l(1)$$
$$e_{\mathcal{L},f} \colon T_f A \times T_f A \to \hat{\mathbb{Z}}(1)$$

が定まる. $e_{\mathcal{L},l}$ を **l 進 Weil ペアリング (l-adic Weil pairing)** と呼び, $e_{\mathcal{L},f}$ を **adelic Weil ペアリング (adelic Weil pairing)** と呼ぶ[*17].

これらを $\mathbb{Q}$-線形に拡張したものを

$$e_{\mathcal{L},l} \colon V_l A \times V_l A \to \mathbb{Q}_l(1) \tag{3.1}$$
$$e_{\mathcal{L},f} \colon V_f A \times V_f A \to \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}(1) \tag{3.2}$$

で書く. これらも (l-進, adelic) Weil ペアリングと呼ぶ. Weil ペアリングは様々な函手的性質を持つが, ここでは Riemann 形式との整合性を示す命題を一つ紹介するにとどめる. そのために一つだけ記号の準備をする. Hodge 構造における Tate ひねり $\mathbb{Z}(1)$ から l 進 Tate ひねり $\mathbb{Z}_l(1)$ への準同型 $\rho\colon \mathbb{Z}(1) \to \mathbb{Z}_l(1)$ を

$$2\pi i m \mapsto \left(\exp\left(\frac{2\pi i m}{l^n}\right)\right)_{n \geq 0}$$

で定める.

命題 3.15 ([Mil86, Example 16.3], [Mum70, §24, Theorem 1]) 複素数体 $\mathbb{C}$ 上

[*17] [Mum70] ではこれらも Riemann 形式と呼んでいる.

の偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ を考える．このとき, 次の図式が可換である:

$$\begin{array}{ccc} H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \times H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) & \xrightarrow{-2\pi i E_{\mathcal{L}}} & \mathbb{Z}(1) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ T_lA \times T_lA & \xrightarrow{e_{\mathcal{L},l}} & \mathbb{Z}_l(1). \end{array}$$

ここで, 縦の写像 $H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) = \Lambda \to T_lA$ は自然な準同型である (定理 3.10 と定理 3.11 参照).

最後に, Weil ペアリングが必要というわけではないが, ここまでの概念でわかる重要な命題を紹介する.

命題 3.16（[Mum70, §19, Theorem 3]） 二つの Abel 多様体 A, B について, 自然な準同型

$$\mathrm{Hom}(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_lA, T_lB)$$

は単射である.

注意 3.17 上の写像の像は当然 Galois 不変になる．実は k が素体上有限生成な体だと

$$\mathrm{Hom}(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_lA, T_lB)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$$

が同型になる (**Abel 多様体についての Tate の** $\mathrm{Hom}(A,B)$ **予想**： Tate, Faltings, Zarhin, Mori)．これは Abel 多様体の Tate 予想の一部に同値である．津嶋氏, 松本氏の章も参照のこと.

3.3 Rosati 対合

引き続き k の標数は 0 とする.

複素トーラスと同様に, 準同型 $f\colon A \to B$ について, ${}^tf\colon B^\vee \to A^\vee$ が定まるのであった．これを用いて, $\mathrm{End}_0(A)$ に次のような対合を定義する:

定義 3.18（[Mil86, §17], [Mum70, §20]） 偏極付き Abel 多様体 $(A, \phi_{\mathcal{L}})$ について,

$$\cdot'\colon \mathrm{End}_0(A) \to \mathrm{End}_0(A) \quad ; \quad f \mapsto f' := \phi_{\mathcal{L}}^{-1} \circ {}^tf \circ \phi_{\mathcal{L}}$$

で定まる反準同型を **Rosati 対合 (Rosati involution)** という[*18].

Rosati 対合の性質として,

$$(f+g)'=f'+g', \quad (fg)'=g'f', \quad [n]'_A=[n]_A, \quad (f')'=f$$

が成立する. また $e_{\mathcal{L},l}, e_{\mathcal{L},f}$ を式 (3.1), (3.2) で定義した Weil ペアリング, $k=\mathbb{C}$ の場合は $E_{\mathcal{L}}$ を $(A,\phi_{\mathcal{L}})$ に付随する Riemann 形式とすると, $f\in \mathrm{End}_0(A)$ と適切な空間の元 u,v について,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{L}}(f(u),v) &= E_{\mathcal{L}}(u,f'(v)) \\ e_{\mathcal{L},l}(f(u),v) &= e_{\mathcal{L},l}(u,f'(v)) \\ e_{\mathcal{L},f}(f(u),v) &= e_{\mathcal{L},f}(u,f'(v)) \end{aligned}$$

が成立する. 次の定理は様々な応用を持つ ([Mum70, §21] 参照) が, Abel 多様体のモジュライ問題において非常に重要である.

定理 3.19([Mil86, Theorem 17.3], [Mum70, §21]) 双線形形式

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_0(A)\times \mathrm{End}_0(A) &\to \mathbb{Q} \\ (f,g) &\mapsto \mathrm{Tr}(f\circ g') \end{aligned}$$

は正定値である.

例 3.20 A が単純な g 次元 Abel 多様体で, $2g$ 次 CM 体 K を $\mathrm{End}_0(A)$ に含むとすると, 実は $\mathrm{End}_0(A)=K$ であり ([Shi98, §5.1, Proposition 6]), また Rosati 対合は K において複素共役になることが知られている.

系 3.21([Mil86, Proposition 17.5]) $(A,\phi_{\mathcal{L}})$ を偏極付き Abel 多様体とする.

- $(A,\phi_{\mathcal{L}})$ の自己同型は有限群である.
- さらに, $(A,\phi_{\mathcal{L}})$ の自己同型がある 3 以上の整数 N について $A[N](\overline{k})$ に自明に作用すると仮定すると, 自己同型は自明になる.

これがレベル構造と偏極を付けた Abel 多様体の粗モジュライ・精モジュライが存在する理由のひとつになっている. 越川氏の章を参照のこと.

[*18] f' の代わりに, ダガー $\dagger$ を用いて $f^{\dagger}$ で書く流儀もある ([Mil86] など).

4 Abel スキーム

この節ではあとで使う Abel スキームの基本概念を復習する．[Lan13, §1.3], 清水氏の章を参照のこと．

定義 4.1 S をスキームとする．S 上の **Abel スキーム (Abelian scheme)** A とは，固有で滑らかな S 上の群スキームで，任意の幾何的ファイバーが連結なものを指す．

注意 4.2 Abel 多様体の場合と異なり，射影的でない Abel スキームが存在する．たとえば Raynaud は 1 次元被約完備 Noether 環のスペクトラム上や，Artin 環のスペクトラム上で射影的でない Abel スキームを構成している ([Ray70])．

Abel 多様体の場合と似た，剛性補題を用いた議論で，次が示される．

命題 4.3（[Lan13, Corollary 1.3.1.7]） Abel スキームは可換である．

定義 4.4 Abel スキーム間の**同種写像 (isogeny)** は，全射準同型で，核が S 上有限な群スキームになっているものを指す．

Abel 多様体の時と同様，双対 Abel スキームの定義には少しだけ準備がいる．双対 Abel スキームの定義をするためにいくつか概念を定義する．

定義 4.5 Abel スキーム $A \to S$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ について，**剛化射 (rigidification)** を同型 $\xi\colon e^*\mathcal{L} \to \mathcal{O}_S$ で定める．ここに $e\colon S \to A$ は恒等切断である．

定義 4.6 S 上の Abel スキーム A について，函手 $\underline{\mathrm{Pic}_e^0}(A/S)\colon (\mathrm{Sch}/S) \to (\mathrm{Sets})$ を次のように定める．

$$T/S \longrightarrow \left(\begin{array}{l} A \times_S T \text{ 上の直線束 } \mathcal{L} \text{ と} \\ \text{剛化射の組の同型類で,} \\ \text{各 } t \in T \text{ 上 } \mathrm{Pic}^0(A_t) \text{ に属するもの} \end{array} \right)$$

剛化射をつけないと，Poincaré 束 $\mathcal{P}$ の普遍性のうち，「$\mathcal{P}|_{S\times T}$ が自明直線束」という部分において，S について局所的に自明でも，S 全体では自明ではないという現象が起きてしまう．これは $\mathcal{P}|_{S\times T}$ と自明直線束の同型が定数倍のずれを許してしまうことによる．剛化射をつけることによって，「$\mathcal{P}|_{S\times T}$ が自明直線束」という部分の同型が固定され，この問題はなくなる．そして実際に双対 Abel スキームの存在が示さ

れる.

定理 4.7 ([Lan13, Theorem 1.3.2.3]) 函手 $\underline{\mathrm{Pic}}^0_e(A/S)$ は S 上の Abel スキーム $A^\vee$ によって表現可能である. $A^\vee$ を A の**双対 Abel スキーム (dual Abelian scheme)** と呼ぶ.

双対 Abel スキーム $A^\vee$ の普遍性を用いて, $(A^\vee)^\vee$ は A と S 上自然に同型になることが示される ([Lan13, Lemma 1.3.2.8]). このことを用いて偏極を定義したい.

射 $f\colon A \to A^\vee$ が**対称的 (symmetric)** とは, 自然な同型と転置の合成

$$A \to (A^\vee)^\vee \xrightarrow{{}^t f} A^\vee$$

が f に等しくなることを指す. Abel 多様体の場合の偏極 $\phi_{\mathcal{L}}\colon A \to A^\vee$ は, 実際に対称的になることが保証されている ([Lan13, Lemma 1.3.2.13] 参照*19).

定義 4.8 S 上の Abel スキーム A の**偏極 (polarization)** とは, 対称な同種写像 $\phi\colon A \to A^\vee$ で, ファイバーごとには直線束からくる偏極 $\phi_{\mathcal{L}}$ の形をしているものを指す (これはエタール位相の意味で局所的に S 上の直線束から定義できることと同値; [Lan13, Lemma 1.3.2.15]).

主偏極, 偏極付き Abel スキームは以前と同様に定義する.

付録 A　群スキーム

定義 A.1 スキーム S 上の**群スキーム (group scheme)** (G, m, e, i) とは,

- S-スキーム $G \to S$,
- **積 (multiplication)** と呼ばれる S-射 $m\colon G \times G \to G$,
- **単位元 (unit element)** と呼ばれる切断 $e\colon S \to G$, および
- **逆元 (inverse)** と呼ばれる S-射 $G \to G$

からなる四つ組 (G, m, e, i) で, 以下の図式をすべて可換にするものを指す.

*19 偏極を対応の言葉で述べたほうが考えやすいかもしれない.
`http://math.stanford.edu/~conrad/vigregroup/vigre04/polarization.pdf` 参照.

結合性

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\ G \times_S G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

単位元

$$\begin{tikzcd} G \times_S S \arrow[r, "\mathrm{id}\times e"] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cong"'] & G \\ S \times_S G \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] & G \times_S G \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

逆元

$$\begin{tikzcd} & G \times_S G \arrow[dr, "m"] & \\ G \arrow[ur, "(\mathrm{id},i)"] \arrow[r] \arrow[dr, "(i,\mathrm{id})"'] & S \arrow[r, "e"] & G \\ & G \times_S G \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

平たく言うと, S スキーム T ごとに T-値点 $G(T)$ を取る函手が群の圏への函手になっているスキームである.

特に混乱のない時は四つ組 (G, m, e, i) を単に G で表すことが多い.

定義 A.2　スキーム S 上の群スキーム $G = (G, m, e, i)$, $G' = (G', m', e', i')$ の間の**準同型 (homomorphism)** $f\colon G \to G'$ は, 射 $f\colon G \to G'$ であって $m' \circ (f \times f) = f \circ m$ を満たすものを指す. このとき $i' \circ f = f \circ i, e' = f \circ e$ が自然に従う.

つまり S-スキーム T について, $G(T) \to G'(T)$ が群準同型になる射 $G \to G'$ である.

定義 A.3　スキーム S 上の群スキーム $G = (G, m, e, i)$ について, $g \in G(S)$ による**(左) 平行移動 ((left) translation)** $t_g\colon G \to G$ は,

$$G = S \times_S G \xrightarrow{g\times\mathrm{id}} G \times_S G \xrightarrow{m} G$$

の合成写像のことを指す．一言でいうと左から g を作用させる写像である．右平行移動の定義も同様である．

参考文献

[BL09] C. Birkenhake and H. Lange. *Complex Abelian Varieties* (Second Edition). Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften, **302**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Del71b] P. Deligne. *Théorie de Hodge. II.* Publ. Math. IHÉS, **40**, pp. 5–58, 1971.

[Lan13] K. W. Lan. *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties.* London Mathematical Society Monographs Series, **36**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013.

[Mil86] J. S. Milne. *Abelian Varieties.* Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984); Springer, New York, 1986, pp. 103–150.

[Mil86Jac] J. S. Milne. *Jacobian Varieties.* Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984); Springer, New York, 1986, pp. 167–212.

[Mil05] J. S. Milne. *Introduction to Shimura varieties.* Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 265–378.

[Mum70] D. Mumford (with Appendices by C. P. Ramanujam and Y. Manin). *Abelian Varieties* (Corrected reprint of Second (1974) Edition). Tata Institute of Fundamental Research Studies in Math., **5**, published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Hindustan Book Agency, New Delhi, 2008.

[Ray70] M. Raynaud. *Faisceaux Amples sur le Schémas en Groupes et les Espace Homogènes.* Lecture Notes in Math. **119**, Springer-Verlag: Berlin-New York, 1970.

[Ros86] M. Rosen. *Abelian Varieties over* $\mathbb{C}$. Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984); Springer, New York, 1986, pp. 79–101.

[Shi98] G. Shimura. *Abelian Varieties with Complex Multiplication and Mod-*

ular Functions. Princeton Mathematical Studies, **46**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

[Sil09] J. H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves* (Second Edition). Graduate Texts in Math., **106**, Dordrecht, 2009.

[SGA1] *Revêtements Étales et Groupe Fondamental* (SGA 1). Lecture Notes in Math., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[SGA4] *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas* (SGA 4; Tome 1–3). Lecture Notes in Math., **269**, **270**, **305**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972–1973.