志村多様体入門

今井 直毅 *

1　はじめに

志村多様体とは Hermite 対称領域の数論的商として得られる代数多様体のいくつかの合併である．志村多様体は，リフレックス体とよばれる代数体上定義される標準的なモデルをもつことが知られており，このモデルを正準モデルという．整数論への応用においては，志村多様体の正準モデルが存在することがしばしば重要になる．志村多様体の正準モデルの理論は，[Shi70a]，[Shi70b] において導入された．ここでは Deligne による定式化 [Del71]，[Del79] に従って解説を行う．

2 節では，代数群と Hodge 構造の族からなる志村データという概念を導入する．3 節で，志村データから得られる志村多様体を導入する．4 節では，志村多様体のクラスをいくつか導入し，それぞれの例について説明する．

5 節では志村多様体の正準モデルの概念を導入し，その一意性について説明する．志村多様体の正準モデルの存在を示す際に，連結志村多様体の概念が必要になる．そのため，6 節で志村多様体の連結成分の記述を与え，7 節で連結志村多様体の概念を導入する．ここでは，[Del79] における Deligne による連結志村多様体の定義に従うが，志村の論文 [Shi70a]，[Shi70b] で調べられていた多様体は，この連結志村多様体に他ならない．

8 節では，志村多様体の正準モデルの存在について説明する．一般の志村多様体に対する正準モデルの存在は，Borovoi と Milne によって独立に証明された (*cf.* [Bor82]，[Mil83])．ただし，Milne による証明は，部分的に Borovoi による手法によっている．この節では，[Mil83] における証明のアイディアの説明を試みる．技術的な細部については原論文を参照されたい．

---

* 東京大学大学院数理科学研究科　e-mail: `naoki@ms.u-tokyo.ac.jp`

最後に 9 節では，代数群の表現から得られる，志村多様体上の局所系や保型ベクトル束に関する説明を行う.

記法

以下の記法を使う.

- 体 F に対して，$\mathrm{Aut}(F)$ は F の体自己同型全体のなす群を表し，F の部分体 E に対し，$\mathrm{Aut}(F/E)$ は F の E 上体自己同型全体のなす群を表す.
- 位相空間 X に対して，X の連結成分の集合を $\pi_0(X)$ と表し，X から誘導される位相をいれる.
- Lie 群 G に対し，単位元を含む連結成分を G^+ とかく.
- 代数群 G に対して，単位元を含む G の連結成分を G^0 とかき，G の中心を $Z(G)$ とかく．また G の随伴群を G^{ad} とかき，G の導来群を G^{der} とかく.
- $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G に対し，$G(\mathbb{R}) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ による $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ の逆像を $G(\mathbb{R})_+$ とかき，
$$G(\mathbb{Q})^+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})^+, \quad G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$$
とおく．$G(\mathbb{Q})$ の $G(\mathbb{A}_f)$ における閉包を $G(\mathbb{Q})^-$ とかき，$G(\mathbb{Q})_+$ の $G(\mathbb{A}_f)$ における閉包を $G(\mathbb{Q})_+^-$ とかく.
- 体 E の拡大体 F と F 上の代数群 G に対して，$\mathrm{Res}_{F/E}(G)$ で G の E への Weil 制限を表す.
- 群 G とその元 $g \in G$ に対して，$h \mapsto ghg^{-1}$ により与えられる G の自己準同型を $\mathrm{ad}(g)$ とかく.
- 代数群 G に対して，その Lie 環を $\mathrm{Lie}(G)$ とかく.
- $\mathbb{Q}$ 代数 A に対して，$A^\times$ で定まる $\mathbb{Q}$ 上の代数群とは，可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R に対し
$$G(R) = (A \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times$$
とおくことによって定まる $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G のこととする．とくに $\mathbb{Q}^\times$ で定まる $\mathbb{Q}$ 上の代数群を $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ とかく.
- 可換環の準同型 $A \to B$ と A 上の対象 X に対して，X_B で X の $A \to B$ による係数拡大を表す.
- $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{C}$ における代数閉包を $\overline{\mathbb{Q}}$ とかく.

- $\mathbb{C}$ に含まれる代数体 E に対し，類体論の相互写像を

$$\mathrm{Art}_E\colon \pi_0(\mathbb{A}_E^{\times}/E^{\times}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)^{\mathrm{ab}}$$

  とかく．ただし相互写像の正規化は，有限素点の素元を幾何的 Frobenius 元の持ち上げに送るものとする．
- 本稿の次節以降に現れる「特殊な」はすべて数学用語であり，通常の日本語の意味での「特殊な」は現れない．

2 志村データ

G を $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群とする．$\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}})$ とおく．X を $\mathbb{S}$ から $G_{\mathbb{R}}$ への $\mathbb{R}$ 上の代数群の射の $G(\mathbb{R})$ 共役類とする．

定義 2.1 (G, X) が以下の条件をみたすとき，志村データであるという．

(S1) $h \in X$ に対し，$\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ に定まる Hodge 構造が $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$ 型である．
(S2) $h \in X$ に対し，$\mathrm{ad}(h(\sqrt{-1}))$ が $G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$ 上の Cartan 対合を定める．
(S3) G^{ad} の $\mathbb{Q}$ 上の単純因子 H で $H(\mathbb{R})$ がコンパクトになるものは存在しない．

(G, X) を志村データとし，G の中心を Z とかく．

$$w\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{S}$$

を $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ から誘導される $\mathbb{R}$ 上の代数群の射とする．$h \in X$ に対し，

$$w_h = h \circ w\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{R}} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$$

とおく．条件 (S1) より，w_h は $Z_{\mathbb{R}}$ を経由しており，$h \in X$ の取り方によらないので，これを $w_X\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{R}} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$ とかき，X のウェイト射という．$G_{\mathbb{R}}$ の任意の代数表現 V に対して，V の $h \in X$ によるウェイト分解は w_X で与えられ，h によらない．

補題 2.2 X の複素構造で，$G_{\mathbb{R}}$ の任意の代数表現 V に対して $h \in X$ の定める V の Hodge フィルトレーション F_h が正則に変化するようなものがただ一つ存在する．さらに，この複素構造に関して，F_h は複素構造の変動になる．

証明 V の $h \in X$ によるウェイト分解は h によらないので，[阿部, 定理 4.11] の証明から主張する複素構造がただ一つ存在することがわかる．さらに，条件 (S1) から F_h が複素構造の変動になることがわかる． □

X には補題 2.2 のような複素構造を入れる．

補題 2.3 H を $\mathbb{R}$ 上の代数群とする．$C \in H(\mathbb{R})$ を $C^2 = 1$ となる元とする．このとき以下の条件は同値である．

(1) $\mathrm{ad}(C)$ は H の Cartan 対合である．
(2) H の任意の代数表現 V に対して，V 上の H 不変双線型形式 Ψ で $\Psi(x, Cy)$ が正定値対称形式になるものが存在する．

証明 対合 $\mathrm{ad}(C)$ によって定まる $H_{\mathbb{C}}$ の実形を $H^{(\mathrm{ad}(C))}$ とかく．Ψ を H の代数表現 V 上の双線型形式とする．Ψ が H 不変であるという条件は，Ψ の複素化 $\Psi_{\mathbb{C}}$ が $h \in H(\mathbb{C})$ に対し，

$$\Psi_{\mathbb{C}}(hx, \bar{h}y) = \Psi_{\mathbb{C}}(x, y)$$

をみたすという条件と同値である．さらにこの条件は

$$\Psi_{\mathbb{C}}\bigl(hx, C(C^{-1}\bar{h}C)y\bigr) = \Psi_{\mathbb{C}}(x, Cy)$$

と同値なので，$\Psi(x, Cy)$ が $H^{(\mathrm{ad}(C))}$ 不変という条件と同値になる．よって条件 (2) は，

> H の任意の代数表現 V に対して，V 上の双線型形式 Ψ で $\Psi(x, Cy)$ が正定値対称 $H^{(\mathrm{ad}(C))}$ 不変形式になるものが存在する．

という条件と同値である．さらにこの条件は，$H^{(\mathrm{ad}(C))}(\mathbb{R})$ がコンパクトであることと同値なので，条件 (1) と同値になる． □

補題 2.4 V を $G_{\mathbb{R}}$ の代数表現とし，$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V^n$ を $h \in X$ によるウェイト分解とする．このとき任意の $n \in \mathbb{Z}$ と X の任意の連結成分 X^+ に対して，V^n 上の双線型形式 Φ_n であって，各 $h \in X^+$ に対して偏極を与えるものが存在する．

証明 $n \in \mathbb{Z}$ とし，X^+ を X の連結成分とする．$U^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおく．H を $G_{\mathbb{R}}$ の部分代数群で，全ての $h \in X^+$ に対して $h(U^1) \in H(\mathbb{R})$ となる最小のも

のとする．補題 2.3 より，$\mathrm{ad}(h(\sqrt{-1}))$ が H の Cartan 対合であることを示せばよいことがわかる．

H の Abel 化の $\mathbb{R}$ 値点のなす群は，$h \in X^+$ に対する $h(U^1)$ で生成されるので，コンパクトである．よって $Z(H)(\mathbb{R})$ もコンパクトである．従って，$\mathrm{ad}(h(\sqrt{-1}))$ が H の Cartan 対合であることを示すには，$\mathrm{ad}(h(\sqrt{-1}))$ が $H/(H \cap Z)$ の Cartan 対合を定まることを示せばよく，これは定義 2.1 の条件 (S2) から従う． □

命題 2.5 X の各連結成分は Hermite 対称領域になる．

証明 補題 2.2，補題 2.4 および [阿部, 定理 4.11] から従う． □

3 志村多様体

(G, X) を志村データとし，$K \subset G(\mathbb{A}_f)$ をコンパクト開部分群とする．

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times \bigl(G(\mathbb{A}_f)/K\bigr)$$

とおく．

補題 3.1 X^+ を X の連結成分とし，$\mathcal{C}$ を両側剰余類 $G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ の完全代表系とする．$g \in \mathcal{C}$ に対し，$gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$ の $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ における像を Γ_g とかく．このとき，$g \in \mathcal{C}$ に対する

$$\Gamma_g\backslash X^+ \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})\ ; [x] \mapsto [(x, g)]$$

により定まる写像

$$\coprod_{g \in \mathcal{C}} \Gamma_g\backslash X^+ \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$$

は全単射である．

証明 [Del79, Proposition 1.2.7] より $\pi_0(X)$ は $G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})_+$ 主等質空間になる．実近似定理より，$G(\mathbb{Q})$ は $G(\mathbb{R})$ の中で稠密なので，自然な射

$$G(\mathbb{Q})/G(\mathbb{Q})_+ \longrightarrow G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})_+$$

は同型となる．よって

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})_+\backslash X^+ \times \bigl(G(\mathbb{A}_f)/K\bigr)$$

となる．これより主張が従う． □

補題 3.1 と Baily-Borel の定理 (*cf.* [BB66], [大島, 定理 2.1]) より，$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ に $\mathbb{C}$ 上準射影的な被約スキームの構造が自然に入る．この $\mathbb{C}$ 上のスキームを $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ とかき (G,X) に付随するレベル K の志村多様体という．

注意 3.2 一般には，$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ に入る $\mathbb{C}$ 上準射影的な被約スキームの構造は，Baily-Borel の定理によって入る自然なもの以外にもあるかもしれないが，K が十分小さい時は，補題 3.1 に現れる Γ_g に捻じれがないので，[Bor72, Theorem 3.10] より，$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ に入る $\mathbb{C}$ 上準射影的な被約スキームの構造は一意である．

定義 3.3 志村データの射 $f\colon (G,X)\to(G',X')$ とは，$\mathbb{Q}$ 上の代数群の射 $f\colon G\to G'$ で $f(X)\subset X'$ となるもののことである．志村データの射 $f\colon (G,X)\to(G',X')$ で，$f\colon G\to G'$ が埋め込みになるものを，志村データの埋め込みという．

志村データの射 $f\colon (G,X)\to(G',X')$ は，$G(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 K と $G'(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 K' に対し，$f(K)\subset K'$ をみたすとき，$\mathbb{C}$ 上のスキームの射

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)\longrightarrow \mathrm{Sh}_{K'}(G',X')$$

を誘導する．また，$g\in G(\mathbb{A}_f)$ に対し，写像

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)\longrightarrow \mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}(G,X);\ [(x,h)]\mapsto[(x,hg)]$$

は $\mathbb{C}$ 上のスキームの同型を与える．また K のコンパクト開部分群 K' に対し，自然な射

$$\mathrm{Sh}_{K'}(G,X)\longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G,X)$$

は有限エタール射になる．

$$\mathrm{Sh}(G,X)=\varprojlim_K \mathrm{Sh}_K(G,X)$$

によって，$G(\mathbb{A}_f)$ の右作用をもつ $\mathbb{C}$ 上のスキームを定義する．志村データの射 $f\colon (G,X)\to(G',X')$ は，$\mathbb{C}$ 上のスキームの射

$$\mathrm{Sh}(G,X)\longrightarrow \mathrm{Sh}(G',X')$$

を誘導する．

$$\mathrm{Sh}(G,X)(\mathbb{C})=G(\mathbb{Q})\backslash X\times\big(G(\mathbb{A}_f)/Z(\mathbb{Q})^-\big)$$

となる (*cf.* [Del79, Proposition 2.1.10])．

4 志村多様体のクラス

4.1 PEL 型

定義 4.1 R を環とする．写像 $*\colon R \to R$ が，環の射 $R \to R^{\mathrm{op}}$ であり，かつ $*\circ * = \mathrm{id}_R$ となるとき，$*$ は反対合であるという．

定義 4.2（[Kot92, 4]） PEL データとは

- 半単純有限 $\mathbb{Q}$ 代数 B,
- B の反対合 $*$ であって，任意の非零元 $b \in B$ に対し，$\mathrm{Trd}_{B/\mathbb{Q}}(bb^*) > 0$ となるもの,
- 有限左 B 加群 V,
- $\mathbb{Q}$ 双線型非退化交代形式 $\psi\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ であって, 任意の $b \in B$ と $v_1, v_2 \in V$ に対して
$$\psi(bv_1, v_2) = \psi(v_1, b^* v_2)$$
となるもの,
- $\mathbb{R}$ 代数準同型 $h\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ であって，任意の $z \in \mathbb{C}$ と $v_1, v_2 \in V_{\mathbb{R}}$ に対して
$$\psi_{\mathbb{R}}(h(z)v_1, v_2) = \psi_{\mathbb{R}}(v_1, h(\bar{z})v_2)$$
となり，$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 双線型対称形式 $\psi_{\mathbb{R}}(-, h(\sqrt{-1})-)$ が正定値になるもの

のなす五つ組 $(B, *, V, \psi, h)$ のことである．

PEL データ $(B, *, V, \psi, h)$ に対し，$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R に対し $G(R)$ を

$$\left\{(g, r) \in \mathrm{Aut}_{B_R}(V_R) \times R^{\times} \;\middle|\; v_1, v_2 \in V_R \text{ に対し } \psi_R(gv_1, gv_2) = r\psi_R(v_1, v_2)\right\}$$

とおくことによって定め，X を h が定める $\mathbb{R}$ 上の代数群の射 $\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ の $G(\mathbb{R})$ 共役類とすると，(G, X) は志村データになる．このようにして得られる志村データやそれから得られる志村多様体を PEL 型という．

例 4.3 V を $\mathbb{Q}$ 上 $2g$ 次元の線型空間とし，$\psi\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 双線型非退化交代形式とする．

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，V の $\mathbb{Q}$ 上の基底 $e_1, \ldots, e_{2g}$ を $\psi(e_i, e_j)_{1 \le i,j \le 2g} = J$ となるようにとる．この基底によって $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ とみなし，$\mathbb{R}$ 代数準同型 $h\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ を $h(\sqrt{-1}) = J$ によって定めると，$(\mathbb{Q}, \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}, V, \psi, h)$ は PEL データになる．これから得られる志村データは (V, ψ) のみによっており，それを $\bigl(\mathrm{GSp}(V,\psi), X_{\mathrm{GSp}(V,\psi)}\bigr)$ とかく．この志村データから得られる志村多様体は Siegel モジュラー多様体とよばれる (*cf.* [越川])．

例 4.4 d を平方因子をもたない正の整数とし，$B = \mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \subset \mathbb{C}$ とおく．c を複素共役とする．n を正の整数とし，$V = B^n$ とおく．p, q を $p + q = n$ となる非負整数とし，$\mathbb{Q}$ 双線型形式 $\psi\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ を $v_1, v_2 \in V$ に対し

$$\psi(v_1, v_2) = \mathrm{Tr}_{B/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{-d}\, v_1 \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} {}^t v_2^c\right)$$

とおくことで定める．さらに，$h\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ を自然な同型 $\mathrm{End}_B(V) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_n(\mathbb{C})$ と合成したときに

$$\mathbb{C} \longrightarrow M_n(\mathbb{C});\ z \mapsto \begin{pmatrix} zI_p & 0 \\ 0 & \bar{z} I_q \end{pmatrix}$$

となる $\mathbb{R}$ 代数準同型として定める．すると (B, c, V, ψ, h) は PEL データになる．このとき $G_{\mathbb{R}}$ は符号 (p, q) の一般ユニタリ群 $\mathrm{GU}(p, q)$ になる．

4.2 Hodge 型

定義 4.5 (G, X) を志村データとする．ある $\mathbb{Q}$ 上有限次元の線型空間 V と $\mathbb{Q}$ 双線型非退化交代形式 $\psi\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ に対し，志村データの埋め込み

$$(G, X) \longrightarrow \bigl(\mathrm{GSp}(V,\psi), X_{\mathrm{GSp}(V,\psi)}\bigr)$$

が存在するとき，(G, X) やそれから得られる志村多様体を Hodge 型という．

注意 4.6 PEL 型志村データは Hodge 型である．

定義 4.7 R を可換環とし，2 が R において可逆であるとする．V を有限自由 R 加群とし，$q\colon V \to R$ を非退化二次形式とする．(V,q) に対する Clifford 代数を

$$C(V,q) = \bigoplus_{m\geq 0} V^{\otimes m}/\langle v\otimes v - q(v) \mid v \in V\rangle$$

で定める．$C(V,q)$ は R 上有限自由である．$C(V,q)$ の反対合 $*$ を正整数 n と $v_1,\ldots,v_n \in V$ に対して $(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)^* = (v_n\otimes\cdots\otimes v_1)$ とすることで定める．$C(V,q)$ の偶数次の部分を $C^+(V,q)$ とかく．

例 4.8（[MP16, 3]） n を正整数とし，(V,q) を $\mathbb{Q}$ 上の符号 $(2,n)$ の二次形式とする．$\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\mathrm{GSpin}(V,q)$ を可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R に対し

$$\mathrm{GSpin}(V,q)(R) = \left\{ g \in C^+(V,q)_R^\times \;\middle|\; gV_Rg^{-1} = V_R \right\}$$

とおくことによって定める．V の 2 次元正定値部分空間とその直交基底 e_1,e_2 をとる．e_1,e_2 を定数倍して得られる $\mathbb{R}$ 上の正規基底を e'_1,e'_2 とする．$J = e'_1e'_2 \in C^+(V,q)_{\mathbb{R}}$ とおくと，$J^2=-1$ となる．

$$h\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathrm{GSpin}(V,q)_{\mathbb{R}};\ a+b\sqrt{-1} \mapsto a+bJ$$

の $\mathrm{GSpin}(V,q)(\mathbb{R})$ 共役類を $X_{\mathrm{GSpin}(V,q)}$ とかくと，$\big(\mathrm{GSpin}(V,q), X_{\mathrm{GSpin}(V,q)}\big)$ は志村データになる．

$\delta = e_1e_2 \in C^+(V,q)$ とおき，$\mathbb{Q}$ 双線型形式 $\psi\colon C(V,q)\times C(V,q) \to \mathbb{Q}$ を $c_1,c_2 \in C(V,q)$ に対し

$$\psi(c_1,c_2) = \mathrm{Trd}_{C(V,q)/\mathbb{Q}}(c_1\delta c_2^*)$$

とおくことで定める．このとき $\mathbb{Q}$ 上の代数群の射 $f\colon \mathrm{GSpin}(V,q) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{Q}}\big(C(V,q)\big)$ を可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R と $g \in \mathrm{GSpin}(V,q)(R)$，$c \in C(V,q)_R$ に対し

$$f(g)(c) = gc \in C(V,q)_R$$

とおくことで定めると，f は $\mathrm{GSp}\big(C(V,q),\psi\big)$ を経由し，志村データの埋め込み

$$\big(\mathrm{GSpin}(V,q), X_{\mathrm{GSpin}(V,q)}\big) \longrightarrow \Big(\mathrm{GSp}\big(C(V,q),\psi\big), X_{\mathrm{GSp}(C(V,q),\psi)}\Big)$$

を誘導する．よって $\big(\mathrm{GSpin}(V,q), X_{\mathrm{GSpin}(V,q)}\big)$ は Hodge 型である．

4.3 Abel 型

(G,X) を志村データとする．$h \in X$ に対し，

$$\mathbb{S} \xrightarrow{h} G_{\mathbb{R}} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$$

の $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ 共役類は X にしかよらず，これを X^{ad} とかく．$(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$ は志村データになる．

定義 4.9 (G,X) を志村データとする．Hodge 型の志村データ (G', X') と中心的同種 $G'^{\mathrm{der}} \to G^{\mathrm{der}}$ であって志村データの同型 $(G'^{\mathrm{ad}}, X'^{\mathrm{ad}}) \xrightarrow{\sim} (G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$ を誘導するものが存在するとき，(G,X) やそれから得られる志村多様体を Abel 型という．

例 4.10（[Del72, 3]） n を正整数とし，(V,q) を $\mathbb{Q}$ 上の符号 $(2,n)$ の二次形式とする．$\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\mathrm{SO}(V,q)$ を可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R に対し

$$\mathrm{SO}(V,q)(R) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_R(V_R) \;\middle|\; v \in V_R \text{ に対し } q_R(gv) = q_R(v) \text{ かつ } \det g = 1 \right\}$$

とおくことによって定める．このとき $\mathbb{Q}$ 上の代数群の射 $f\colon \mathrm{GSpin}(V,q) \to \mathrm{SO}(V,q)$ を可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R と $g \in \mathrm{GSpin}(V,q)(R)$，$v \in V_R$ に対し

$$f(g)(v) = gvg^{-1} \in V_R$$

とおくことで定める．また $h \in X_{\mathrm{GSpin}(V,q)}$ に対し

$$\mathbb{S} \xrightarrow{h} \mathrm{GSpin}(V,q) \xrightarrow{f} \mathrm{SO}(V,q)$$

の $\mathrm{SO}(V,q)(\mathbb{R})$ 共役類は h の取り方によらず，これを $X_{\mathrm{SO}(V,q)}$ とかく．このとき f の $\mathrm{GSpin}(V,q)^{\mathrm{der}}$ への制限は中心的同種であり，$(\mathrm{SO}(V,q), X_{\mathrm{SO}(V,q)})$ は Abel 型志村データである．

例 4.11 $F \subset \mathbb{C}$ を総実体とし，F の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を n とする．F の $\mathbb{R}$ への埋め込み全体 $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ を τ_1 が $F \subset \mathbb{C}$ から定まる自然な埋め込みになるようにとり，F 上の斜体 B を

$$B \otimes_{F,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & (i=1) \\ \mathbb{H} & (2 \le i \le n) \end{cases} \tag{4.1}$$

となるようにとる．G を $B^\times$ から定まる $\mathbb{Q}$ 上の代数群とする．さらに，$h\colon \mathbb{S}\to G_{\mathbb{R}}$ を

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\times\mathbb{H}^\times\times\cdots\times\mathbb{H}^\times;\ a+b\sqrt{-1}\mapsto\left(\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},1,\dots,1\right)$$

と (4.1) に現れる同型から定まる $\mathbb{R}$ 上の代数群の射とし，h の $G(\mathbb{R})$ 共役類を X とかく．このとき (G,X) は志村データになり，これから定まる志村多様体を志村曲線という．

以下で (G,X) が Abel 型になることを示す．L を F の総虚 2 次拡大とする．G_0 を $(B\otimes_F L)^\times$ で定まる $\mathbb{Q}$ 上の代数群とし，

$$C=\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}),\quad C'=\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$$

とおく．$N_{L/F}\colon C\to C'$ を $\mathrm{Nr}_{L/F}\colon L^\times\to F^\times$ から誘導される射とし，$C_0=\ker N_{L/F}$ とおく．自然な埋め込み $\mathbb{Q}^\times\subset(B\otimes_F L)^\times$ によって $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ を G_0 の部分代数群とみなし，G' を G^{der}，C_0 および $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ で生成される G_0 の部分代数群とする．$\tau_1,\dots,\tau_n$ を L の $\mathbb{C}$ への埋め込み $\tilde{\tau}_1,\dots,\tilde{\tau}_n$ にのばしておく．$h_C\colon\mathbb{S}\to C_{\mathbb{R}}$ を

$$\mathbb{C}^\times\longrightarrow\prod_{i=1}^n\mathbb{C}^\times;\ z\mapsto(1,z,\dots,z)$$

と $\tilde{\tau}_1,\dots,\tilde{\tau}_n$ から定まる同型 $(L\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times\simeq\prod_{i=1}^n\mathbb{C}^\times$ によって定まる $\mathbb{R}$ 上の代数群の射とする．このとき $hh_C\colon\mathbb{S}\to G_{0\mathbb{R}}$ は $G'_{\mathbb{R}}$ を経由し，この射を $h'\colon\mathbb{S}\to G'_{\mathbb{R}}$ とかく．X' を h' の $G'(\mathbb{R})$ 共役類とする．このとき (G',X') は志村データであり，構成から $G'^{\mathrm{der}}=G^{\mathrm{der}}$ かつ $(G'^{\mathrm{ad}},X'^{\mathrm{ad}})=(G^{\mathrm{ad}},X^{\mathrm{ad}})$ となることがわかる．

あとは (G',X') が Hodge 型であることを示せばよい．$(B\otimes_F L)^\times$ の $B\otimes_F L$ への左作用から定まる，G' の $\mathbb{Q}$ 上の代数表現を V とかく．G'' を G^{der} と C_0 で生成される G' の部分代数群とする．このとき，h' の構成と h が条件 (S2) をみたしていたことから，$\mathrm{ad}(h'(\sqrt{-1}))$ は $G''_{\mathbb{R}}$ の Cartan 対合になる．よって，補題 2.3 から $V_{\mathbb{R}}$ 上の $G''_{\mathbb{R}}$ 不変双線型形式 Ψ で $\Psi(-,\mathrm{ad}(h'(\sqrt{-1}))-)$ が正定値対称形式になるものが存在する．

$\mathbb{Q}$ に G' 作用を $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ が 2 乗で作用し，G'' が自明に作用するように定めたものを $\mathbb{Q}(-1)$ とかく．$\mathbb{R}(-1)=\mathbb{Q}(-1)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ とおく．すると $\Psi\colon V_{\mathbb{R}}\times V_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}(-1)$ は $G'_{\mathbb{R}}$ 不変になる．

G' 不変双線型形式 $V \times V \to \mathbb{Q}(-1)$ のなす $\mathbb{Q}$ 線型空間を $\mathcal{L}$ とかく．$G'_{\mathbb{R}}$ 不変双線型形式 $\Psi\colon V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}(-1)$ で $\Psi(-, \mathrm{ad}(h'(\sqrt{-1}))-)$ が正定値対称形式になるもの全体は，$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ の開部分空間をなすが，前に示したことからこの開部分空間は空ではない．よって，G' 不変双線型形式 $\psi\colon V \times V \to \mathbb{Q}(-1)$ で $\psi_{\mathbb{R}}(-, \mathrm{ad}(h'(\sqrt{-1}))-)$ が正定値対称形式になるものが存在し，これによって志村データの埋め込み

$$(G', X') \to \big(\mathrm{GSp}(V, \psi), X_{\mathrm{GSp}(V,\psi)}\big)$$

が得られる．つまり (G', X') は Hodge 型である．

$\mathbb{Q}$ 上の単純随伴群 H で，型が A，B，C，$\mathrm{D}^{\mathbb{R}}$，$\mathrm{D}^{\mathbb{H}}$ のいずれかであるものに対して，H の被覆 $H^{\sharp}$ を以下のように定める．

- H が $\mathrm{D}^{\mathbb{H}}$ 型でないとき，H の普遍被覆を $H^{\sharp}$ とする．
- H が $\mathrm{D}^{\mathbb{H}}$ 型のとき，[Del79, 2.3.8] で記述されているような H の二重被覆を $H^{\sharp}$ とする．

一般に Abel 型の志村データは次のように分類される．

定理 4.12 志村データ (G, X) が Abel 型であることは次の条件と同値である．

> $\mathbb{Q}$ 上の単純随伴群 $H_1, \ldots, H_n$ が存在し，任意の $1 \le i \le n$ に対し，H_i の型は A，B，C，$\mathrm{D}^{\mathbb{R}}$，$\mathrm{D}^{\mathbb{H}}$ のいずれかであり，中心的同種
>
> $$H_1^{\sharp} \times \cdots \times H_n^{\sharp} \longrightarrow G^{\mathrm{der}}$$
>
> が存在する．

証明 G^{ad} が単純である場合は [Del79, 2.3] で示されている．証明のあらすじは，例 4.11 に現れる議論と同じであるが，G' の一般斜交群への埋め込みを構成する部分はもう少し難しくなり，[Sat65] の結果を用いる．一般の場合は，上記の場合の結果と [Kis10, Lemma 3.4.13] を合わせると従う． □

5 正準モデル

$\mathbb{C}$ 代数 R に対する環同型

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} R \xrightarrow{\sim} R \times R;\ z \otimes r \mapsto (zr, \bar{z}r)$$

によって定まる $\mathbb{C}$ 上の代数群の同型

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}}$$

を考える．$\mu\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}} \to \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ を

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}};\ z \mapsto (z, 1)$$

と上の同型 $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}}$ によって定まる射とする．$h \in X$ に対し

$$\mu_h = h_{\mathbb{C}} \circ \mu\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$$

とおく．$h \in X$ に対し μ_h の $G(\mathbb{C})$ 共役類は X にしかよらないので，これを M_X とかく．$\mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}}$ から $G_{\mathbb{C}}$ への $\mathbb{C}$ 上の代数群の射の $G(\mathbb{C})$ 共役類全体の集合を $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ とかく．$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ と G は $\mathbb{Q}$ 上定義されているので，$\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}})$ に $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ が作用する．さらにこの作用は $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ への作用を定める．

定義 5.1　志村データ (G, X) のリフレックス体 $E(G, X)$ とは $\mathbb{C}$ の部分体で，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の作用に関する $M_X \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ の固定部分群が $\mathrm{Aut}\big(\mathbb{C}/E(G, X)\big)$ となるもののことである．

補題 5.2　リフレックス体 $E(G, X)$ は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体である．

証明　G の $\mathbb{Q}$ 上極大トーラス T をとり，W を $G_{\mathbb{C}}$ の $T_{\mathbb{C}}$ に関する Weyl 群とする．このとき自然な写像

$$W \backslash \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{C})$$

は $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の作用と整合的な全単射を与える (*cf.* [Mil05, Lemma 12.1])．$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の $W \backslash \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}})$ への作用は，T が分裂するような $\mathbb{Q}$ 上の有限次 Galois 拡大の Galois 群を経由するので主張が従う． □

補題 5.3　志村データの射 $f\colon (G, X) \to (G', X')$ が存在するとき $E(G, X) \supset E(G', X')$ となる．

証明　定義から従う． □

T を $\mathbb{Q}$ 上のトーラスとし，$h\colon \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 上の代数群の射とする．すると $(T, \{h\})$ は志村データとなり，μ_h は $E(T, \{h\})$ 上定義される．$E \subset \mathbb{C}$ を $E(T, \{h\})$ の有限次拡大体とする．

$$\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(\mu_h)\colon\ \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}E} \to \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\, T_E$$

とノルム射

$$\mathrm{Nr}_{E/\mathbb{Q}}\colon \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} T_E \longrightarrow T$$

の合成を

$$\mathrm{NR}_E(\mu_h)\colon \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}E} \longrightarrow T$$

とかく．写像

$$a_E(T,\{h\})\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \longrightarrow T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-$$

を写像の合成

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)^{\mathrm{ab}} &\xrightarrow{\mathrm{Art}_E^{-1}} \pi_0(\mathbb{A}_E^\times/E^\times) \\ &\longrightarrow \pi_0\bigl(T(\mathbb{A})/T(\mathbb{Q})\bigr) \longrightarrow T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-\end{aligned}$$

によって定義する．ただし，三つ目の写像は $\mathrm{NR}_E(\mu_h)$ によって誘導される写像である．$E' \subset \mathbb{C}$ が E の有限次拡大体であるとき，$a_{E'}(T,\{h\})$ は $a_E(T,\{h\})$ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E')$ への制限である．

定義 5.4 $h \in X$ とする．G の $\mathbb{Q}$ 上定義された部分トーラス T が存在し，$h\colon \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ が $T_{\mathbb{R}}$ を経由するとき，h は特殊であるという．またこのとき $(T,\{h\})$ は志村データを定め，リフレックス体 $E(T,\{h\})$ は h にしかよらないので，$E(h)$ とかく．

定義 5.5 $x \in \mathrm{Sh}(G,X)$ とする．

(1) x の代表元 $(h,g) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$ に対し，h の $G(\mathbb{Q})$ 共役類 τ は x にしかよらず，これを x の型という．
(2) x の型 τ の任意の元が特殊であるとき，x は特殊であるという．またこのとき，$h \in \tau$ に対する $E(h)$ は τ にしかよらないので，$E(\tau)$ とかく．

特殊点の存在に関しては次が成り立つ ([Del71, Théorème 5.1])．

命題 5.6 $E(G,X)$ の任意の有限次拡大体 $E \subset \mathbb{C}$ に対して，$\mathrm{Sh}(G,X)$ の特殊点の型 τ で，$E(\tau)$ が E と $E(G,X)$ 上線型無関係であるものが存在する．

$\mathrm{Sh}(G,X)$ の型 τ の特殊点全体に $\mathrm{Gal}\bigl(\overline{\mathbb{Q}}/E(\tau)\bigr)$ の作用を以下のように定める．x を $\mathrm{Sh}(G,X)$ の型 τ の特殊点とする．x の 代表元 $(h,g) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$ と G の $\mathbb{Q}$ 上定義された部分トーラス T で $h\colon \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ が $T_{\mathbb{R}}$ を経由するものをと

る．$\sigma \in \mathrm{Gal}\bigl(\overline{\mathbb{Q}}/E(\tau)\bigr)$ に対して，$a_{E(\tau)}(T,\{h\})(\sigma) \in T(\mathbb{A}_f)/T(\mathbb{Q})^-$ の代表元 $\tilde{a} \in T(\mathbb{A}_f)$ をとって，

$$\sigma(x) = [(h, \tilde{a}g)] \in \mathrm{Sh}(G,X)$$

とおくと，これは σ と x のみから決まる型 τ の特殊点になる．以上によって，型 τ の特殊点全体への $\mathrm{Gal}\bigl(\overline{\mathbb{Q}}/E(\tau)\bigr)$ の作用が定まる．

定義 5.7 $E \subset \mathbb{C}$ を $E(G,X)$ の有限次拡大体とする．$\mathrm{Sh}(G,X)$ の E 上弱正準モデルとは，右 $G(\mathbb{A}_f)$ 作用を持つ E 上のスキーム S と $G(\mathbb{A}_f)$ 作用と整合的な $\mathbb{C}$ 上のスキームの同型

$$\xi\colon S \otimes_E \mathbb{C} \cong \mathrm{Sh}(G,X)$$

の組であって，以下の条件をみたすもののことである．

(1) $\mathrm{Sh}(G,X)$ の任意の特殊点は，ξ によって $S(\overline{\mathbb{Q}})$ の点と対応している．
(2) 任意の特殊点の型 τ に対し，型 τ の特殊点全体への $\mathrm{Gal}\bigl(\overline{\mathbb{Q}}/E(\tau)\bigr)$ の作用と，$S(\overline{\mathbb{Q}})$ への $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ の作用は，ξ に関して $\mathrm{Gal}\bigl(\overline{\mathbb{Q}}/E(\tau)E\bigr)$ 上で整合的である．

$\mathrm{Sh}(G,X)$ の $E(G,X)$ 上弱正準モデルのことを正準モデルという．

注意 5.8 定義 5.7 の正準モデルの正規化は，[Mil05, Definition 12.8] と一致するものを選んでいる (*cf.* [越川, 注意 5.21])．

補題 5.9 τ を $\mathrm{Sh}(G,X)$ のある特殊点の型とすると，型 τ の特殊点全体は $\mathrm{Sh}(G,X)$ において Zariski 稠密である．

証明 $G(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 K に対し，型 τ の特殊点全体の $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ における像は，実近似定理より $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ において稠密であり，とくに Zariski 稠密である．よって主張が従う． □

命題 5.10 $E \subset \mathbb{C}$ を $E(G,X)$ の有限次拡大体とする．$\mathrm{Sh}(G,X)$ の E 上弱正準モデルは，同型を除いて一意的である．

証明 $\mathrm{Sh}(G,X)$ の E 上弱正準モデルが二つあるとする．$\mathrm{Sh}(G,X)$ のある特殊点の型 τ を取る．補題 5.9 より，二つの E 上弱正準モデルから得られる $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$ の作用は $\mathrm{Aut}\bigl(\mathbb{C}/E(\tau)E\bigr)$ 上で整合的になる．

命題 5.6 を用いて，$\mathrm{Sh}(G,X)$ のある特殊点の型 τ' を $E(\tau')$ が $E(\tau)E$ と $E(G,X)$ 上線型無関係であるようにとる．再び補題 5.9 より，二つの E 上弱正準モデルから得られる $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$ の作用は $\mathrm{Aut}\bigl(\mathbb{C}/E(\tau')E\bigr)$ 上で整合的になる．$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$ は $\mathrm{Aut}\bigl(\mathbb{C}/E(\tau)E\bigr)$ と $\mathrm{Aut}\bigl(\mathbb{C}/E(\tau')E\bigr)$ で生成されるので主張が従う． □

$\mathrm{Sh}(G,X)$ の正準モデル $S(G,X)$ が存在するとき，$G(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群 K に対し，$S(G,X)/K$ を $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ の正準モデルという．

6 志村多様体の連結成分

代数体 F 上の連結簡約代数群 H に対し，H^{der} の普遍被覆を $\rho_H\colon \widetilde{H} \to H^{\mathrm{der}}$ と表す．また，$\mathrm{com}_H\colon H\times H \to H$ を可換 F 代数 R に対し，R 値点上で

$$H(R)\times H(R) \longrightarrow H(R);\ (h_1,h_2)\mapsto h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}$$

となる F 上のスキームの射とし，この射を H に対する交換子射という．

$\widetilde{H}$ に対する交換子射は

$$\mathrm{com}_{\widetilde{H}}\colon \widetilde{H}\times\widetilde{H} \longrightarrow H^{\mathrm{ad}}\times H^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \widetilde{H} \tag{6.1}$$

と経由する．さらに H に対する交換子射は，(6.1) に現れた二つ目の射を用いて

$$\mathrm{com}_H\colon H\times H \longrightarrow H^{\mathrm{ad}}\times H^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \widetilde{H} \longrightarrow H$$

と経由する．このことから，可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R に対し，$\rho_H\bigl(\widetilde{H}(R)\bigr)$ は $H(R)$ の正規部分群となり，$H(R)/\rho_H\bigl(\widetilde{H}(R)\bigr)$ は Abel 群になることがわかる．このとき

$$\pi(H) = H(\mathbb{A}_F)/H(F)\rho_H\bigl(\widetilde{H}(\mathbb{A}_F)\bigr)$$

とおく．[Del79, Corollaire 2.0.8] より，$H(F)\rho_H\bigl(\widetilde{H}(\mathbb{A}_F)\bigr)$ は $H(\mathbb{A}_F)$ の閉部分群であり，$\pi(H)$ には Hausdorff 位相 Abel 群の構造が入る．

(G,X) を志村データとし，

$$\overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr) = \pi_0\bigl(\pi(G)\bigr)/\pi_0\bigl(G(\mathbb{R})_+\bigr)$$

とおく．

命題 6.1 自然な埋め込み $G(\mathbb{A}_f) \to G(\mathbb{A})$ は，同型

$$G(\mathbb{A}_f)/G(\mathbb{Q})_+^- \xrightarrow{\sim} \overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr)$$

を誘導し，この同型と $G(\mathbb{A}_f)$ の $\pi_0\bigl(\mathrm{Sh}(G,X)\bigr)$ への右作用によって，$\pi_0\bigl(\mathrm{Sh}(G,X)\bigr)$ は $\overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr)$ 主等質空間になる．

証明 実近似定理より $G(\mathbb{Q})$ は $G(\mathbb{R})$ のなかで稠密なので，自然な射

$$G(\mathbb{A}_f)/\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)G(\mathbb{Q})_+ \longrightarrow G(\mathbb{A})/\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A})\bigr)G(\mathbb{Q})G(\mathbb{R})_+ \simeq \overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr) \tag{6.2}$$

は同型になる．同型 (6.2) と $\overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr)$ が Hausdorff 位相群であることから，$\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)G(\mathbb{Q})_+$ が $G(\mathbb{A}_f)$ の閉部分群であることがわかる．

$\widetilde{G}(\mathbb{R})$ の連結性から $\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{Q})\bigr) \subset G(\mathbb{Q})_+$ であり，$\widetilde{G}$ に対する強近似定理から $\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{Q})\bigr)$ は $\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)$ の中で稠密である．よって

$$\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr) \subset G(\mathbb{Q})_+^- \tag{6.3}$$

となる．よって

$$\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)G(\mathbb{Q})_+ \subset G(\mathbb{Q})_+^-$$

となるが，$\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)G(\mathbb{Q})_+$ が $G(\mathbb{A}_f)$ の閉部分群であったことから，

$$\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{Q})_+^-$$

がわかり，同型 (6.2) とあわせると同型

$$G(\mathbb{A}_f)/G(\mathbb{Q})_+^- \xrightarrow{\sim} \overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr)$$

がえられる．

K を $G(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群とする．補題 3.1 と (6.3) より，

$$\pi_0\bigl(\mathrm{Sh}_K(G,X)\bigr) \simeq G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K \simeq G(\mathbb{Q})_+\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K \tag{6.4}$$

となる．さらに，$G(\mathbb{A}_f)/\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)$ が Abel 群であることから

$$G(\mathbb{Q})_+\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K \simeq G(\mathbb{A}_f)/\rho_G\bigl(\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)\bigr)G(\mathbb{Q})_+K \tag{6.5}$$

となる．(6.4)，(6.5) と同型 (6.2) より

$$\pi_0\bigl(\mathrm{Sh}_K(G,X)\bigr) \simeq \overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr)/K$$

となる．K に関して極限をとると主張が従う． □

定義 6.2 Π, Δ を群とし，Γ を Π の部分群とする．$\varphi\colon \Gamma \to \Delta$ と $r\colon \Delta \to \mathrm{Aut}(\Pi)$ を群の射とし，r によって定まる Δ の Π への作用で Γ が安定であるとする．さらに以下を仮定する．

- $\gamma \in \Gamma$ に対し，$r(\varphi(\gamma)) = \mathrm{ad}(\gamma)$ となる．
- $\delta \in \Delta$，$\gamma \in \Gamma$ に対し，$\varphi(r(\delta)(\gamma)) = \mathrm{ad}(\delta)(\varphi(\gamma))$ となる．

このとき，

$$\{(\gamma, \varphi(\gamma)^{-1}) \in \Pi \rtimes \Delta \mid \gamma \in \Gamma\}$$

は $\Pi \rtimes \Delta$ の正規部分群になり，この部分群による $\Pi \rtimes \Delta$ の商を $\Pi *_{\Gamma} \Delta$ とかく．

$G \times G \to G$ を，可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R に対し R 値点上で

$$G(R) \times G(R) \longrightarrow G(R);\ (g,h) \mapsto g^{-1}hg$$

となる $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射とする．この射は

$$G^{\mathrm{ad}} \times G \to G \tag{6.6}$$

を経由する．射 (6.6) によって，$G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ の $\mathrm{Sh}(G,X)$ への右作用が定まる．この作用と $G(\mathbb{A}_f)$ の $\mathrm{Sh}(G,X)$ への右作用から，群

$$\mathcal{G} = G(\mathbb{A}_f)/Z(\mathbb{Q})^- *_{G(\mathbb{Q})_+/Z(\mathbb{Q})} G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$$

の $\mathrm{Sh}(G,X)$ への右作用が定まる．ただし，$G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ の $G(\mathbb{A}_f)/Z(\mathbb{Q})^-$ への作用は，可換 $\mathbb{Q}$ 代数 R に対し R 値点上で

$$G(R) \times G(R) \longrightarrow G(R);\ (g,h) \mapsto ghg^{-1}$$

となる $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射 $G \times G \to G$ が誘導する射 $G^{\mathrm{ad}} \times G \to G$ によって定まるものを考える．

定義 6.3 H を $\mathbb{Q}$ 上の連結随伴代数群とする．H' を $\mathbb{Q}$ 上の連結半単純代数群とし，$H' \to H$ を中心的同種とする．このとき $H'(\mathbb{Q})$ の合同部分群の像を単位元の開近傍系とする $H(\mathbb{Q})$ の位相を $\tau(H')$ とかく．$H(\mathbb{Q})^+$ の $\tau(H')$ に関する完備化を $H(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(H')}$ とかく．

補題 6.4 $\mathcal{G}$ の $\mathrm{Sh}(G,X)$ への作用に関する任意の連結成分の安定部分群は $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G^{\mathrm{der}})}$ と自然に同型になる．

証明　$G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ の 作用は $\mathrm{Sh}(G,X)$ の連結成分を保つので，$\mathcal{G}$ の $\mathrm{Sh}(G,X)$ への作用に関する連結成分の安定部分群は，命題 6.1 より，

$$G(\mathbb{Q})_+^-/Z(\mathbb{Q})^- *_{G(\mathbb{Q})_+/Z(\mathbb{Q})} G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$$

となる．さらに，[Del79, Corollaire 2.0.13] より，この安定部分群は $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G^{\mathrm{der}})}$ と自然に同型になる． □

命題 6.5　X の連結成分 X^+ をとり，$X^+\times\{e\}\subset X\times G(\mathbb{A}_f)$ の像を含む $\mathrm{Sh}(G,X)$ の連結成分を $\mathrm{Sh}(G,X^+)$ とかく．このとき

$$\mathrm{Sh}(G,X^+)(\mathbb{C})=\varprojlim_{\Gamma}\Gamma\backslash X^+$$

となる．ただし Γ は $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ の数論的部分群で $\tau(G^{\mathrm{der}})$ について開であるものをうごく．特に，$\mathrm{Sh}(G,X^+)$ は $(G^{\mathrm{ad}},G^{\mathrm{der}},X^+)$ から決まっている．

7　連結志村多様体

命題 6.5 を参考にして，以下のような連結志村データおよび連結志村多様体の定義を考える．

定義 7.1　G_0 を $\mathbb{Q}$ 上の連結半単純代数群とする．X_0^+ を $\mathbb{S}$ から $G_{0\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$ への $\mathbb{R}$ 上の代数群の射の $G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ 共役類とする．(G_0,X_0^+) が以下の条件をみたすとき，連結志村データであるという．

(CS1) $h_0\in X_0^+$ に対し，$\mathrm{Lie}(G_{0\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}})$ に定まる Hodge 構造が $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$ 型である．

(CS2) $h_0\in X_0^+$ に対し，$\mathrm{ad}(h_0(\sqrt{-1}))$ が $G_{0\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$ 上の Cartan 対合を定める．

(CS3) G_0^{ad} の $\mathbb{Q}$ 上の単純因子 H で $H(\mathbb{R})$ がコンパクトになるものは存在しない．

定義 7.2　(G_0,X_0^+) を連結志村データとする．$G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ の数論的部分群 Γ で $\tau(G_0)$ について開であるものに対し，Baily-Borel の定理により $\Gamma\backslash X_0^+$ に $\mathbb{C}$ 上準射影的な代数多様体の構造を入れたものを $\mathrm{Sh}_\Gamma(G_0,X_0^+)$ とかき (G_0,X_0^+) に付随するレベル Γ の連結志村多様体という．さらに，

$$\mathrm{Sh}(G_0,X_0^+)=\varprojlim_{\Gamma}\mathrm{Sh}_\Gamma(G_0,X_0^+)$$

によって $\mathbb{C}$ 上のスキームを定義する．ただし Γ は $G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ の数論的部分群で $\tau(G_0)$ について開であるものをうごく．

(G_0, X_0^+) を連結志村データとする．$G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ の $\mathrm{Sh}(G_0, X_0^+)$ への右作用は，$G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G_0)}$ の連続な右作用に一意的にのびる．

$h_0 \in X_0^+$ に対し
$$\mu_{h_0} = h_{0\mathbb{C}} \circ \mu \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}} \longrightarrow G_{0\mathbb{C}}^{\mathrm{ad}}$$
とおき，μ_{h_0} の $G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{C})$ 共役類を $M_{X_0^+}$ とかく．$\mathbb{G}_{\mathrm{m}\mathbb{C}}$ から $G_{0\mathbb{C}}^{\mathrm{ad}}$ への $\mathbb{C}$ 上の代数群の射の $G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{C})$ 共役類全体の集合を $\mathcal{C}_0^+(\mathbb{C})$ とかく．$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ は $\mathcal{C}_0^+(\mathbb{C})$ に自然に作用する．

定義 7.3 連結志村データ (G_0, X_0^+) のリフレックス体 $E(G_0, X_0^+)$ とは $\mathbb{C}$ の部分体で，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の作用に関する $M_{X_0^+} \in \mathcal{C}_0^+(\mathbb{C})$ の固定部分群が $\mathrm{Aut}\big(\mathbb{C}/E(G_0, X_0^+)\big)$ となるもののことである．

観察 7.4 (G, X) を志村データとする．$E \subset \mathbb{C}$ を $E(G, X)$ の有限次拡大体とし，$\mathrm{Sh}(G, X)$ の E 上弱正準モデルが存在すると仮定する．このとき，$\mathcal{G} \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ が $\mathrm{Sh}(G, X)$ に作用する．X の連結成分 X^+ をとり，$X^+ \times \{e\} \subset X \times G(\mathbb{A}_f)$ の像を含む $\mathrm{Sh}(G, X)$ の連結成分を $\mathrm{Sh}(G, X^+)$ とかく．$\mathcal{G} \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ の作用に関する連結成分 $\mathrm{Sh}(G, X^+)$ の安定部分群を $\mathcal{E}$ とかくと，構成から短完全列
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G^{\mathrm{der}})} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{G} \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$
が得られる．$\mathcal{G} \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ は $\pi_0(\mathrm{Sh}(G, X))$ に推移的に作用するので，$\mathcal{E}$ の作用をもつスキーム $\mathrm{Sh}(G, X^+)$ から，$\mathcal{G} \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ の作用をもつスキーム $\mathrm{Sh}(G, X)$ を復元することができる．

志村データ (G, X) と X の連結成分 X^+ であって
$$(G^{\mathrm{der}}, X^{+\mathrm{ad}}) \simeq (G_0, X_0^+)$$
となるものをとる (*cf.* [Del79, Lemme 2.5.5])．ただし $X^{+\mathrm{ad}}$ は X^+ の $X \to X^{\mathrm{ad}}$ による像を表す．このとき $X^+ \to X_0^+$ は同型であり，$E(G, X) = E(G_0, X_0^+)$ となる．

$E \subset \mathbb{C}$ を $E(G_0, X_0^+)$ の有限次拡大とする．以下では，観察 7.4 に現れた群 $\mathcal{E}$ にあたるものを，E 上弱正準モデルの存在を仮定せずに構成する．

まず以下の一般論について復習する (*cf.* [Del79, 2.4])．$F \subset \mathbb{C}$ を代数体とし，H を F 上の連結簡約代数群とする．

(1) F の有限次拡大体 F' に対し，ノルム写像

$$N_{F'/F} \colon \pi(H_{F'}) \longrightarrow \pi(H)$$

が構成できる．

(2) F 上の代数的トーラス T と $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の代数群の射 $T_{\overline{\mathbb{Q}}} \to H_{\overline{\mathbb{Q}}}$ の $H(\overline{\mathbb{Q}})$ 共役類 M で，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の作用で安定なものに対して，自然な写像

$$q_M \colon \pi(T) \longrightarrow \pi(H)$$

を構成することができる．さらに，ある $h \in M$ が F 上定義されている場合は，q_M は $\pi(h)$ と一致する．

命題 6.1 と補題 6.4 より，短完全列

$$1 \longrightarrow G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G_0)} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr) \longrightarrow 1 \tag{7.1}$$

がえられる．M_X は $\mathbb{G}_{\mathrm{m}\overline{\mathbb{Q}}}$ から $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ への $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の代数群の射の $G(\overline{\mathbb{Q}})$ 共役類とみなすことができ，さらに $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ の作用で安定なので

$$q_{M_X} \colon \pi(\mathbb{G}_{\mathrm{m}E}) \longrightarrow \pi(G_E)$$

が定義される．拡大 (7.1) の写像

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \xrightarrow{\mathrm{Art}_E^{-1}} \pi_0\bigl(\pi(\mathbb{G}_{\mathrm{m}E})\bigr) \xrightarrow{\pi_0(N_{E/\mathbb{Q}} \circ q_{M_X})} \pi_0\bigl(\pi(G)\bigr) \longrightarrow \overline{\pi}_0\bigl(\pi(G)\bigr)$$

による逆像を

$$1 \longrightarrow G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G_0)} \longrightarrow \mathcal{E}_E(G_0, X_0^+) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \longrightarrow 1$$

とかく．この $\mathcal{E}_E(G_0, X_0^+)$ が観察 7.4 の $\mathcal{E}$ にあたるものになる．

定義 7.5 $h_0 \in X_0^+$ とする．G_0^{ad} の $\mathbb{Q}$ 上定義された部分トーラス T_0 が存在し，$h_0 \colon \mathbb{S} \to G_{0\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$ が $T_{0\mathbb{R}}$ を経由するとき，h_0 は特殊であるという．特殊な h_0 から定まる $\mathrm{Sh}(G_0, X_0^+)$ の点を特殊点という．

$h_0 \in X_0^+$ が特殊であるとし，G_0^{ad} の $\mathbb{Q}$ 上定義された部分トーラス T_0 で h_0 が $T_{0\mathbb{R}}$ を経由するものをとる．T_0 の $G \to G_0^{\mathrm{ad}}$ による逆像の連結成分を T とし，$X^+ \xrightarrow{\sim} X_0^+$ で h_0 と対応する点を $h \in X^+$ とすると，$(T, \{h\})$ は志村データを定める．リフレックス体 $E(T, \{h\})$ は h_0 にしかよらないので，$E(h_0)$ とかく．

$Z_T = Z \cap T$ とおく．

$$\mathcal{G}_T = T(\mathbb{A}_f)/Z_T(\mathbb{Q})^- *_{T(\mathbb{Q})/Z_T(\mathbb{Q})} T_0(\mathbb{Q})$$

とおくと，短完全列

$$1 \longrightarrow T_0(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{G}_T \longrightarrow \overline{\pi}_0\bigl(\pi(T)\bigr) \longrightarrow 1 \tag{7.2}$$

が存在する．$E' = E(h_0)E$ とおき，拡大 (7.2) の写像

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E') \xrightarrow{\mathrm{Art}_{E'}^{-1}} \pi_0\bigl(\pi(\mathbb{G}_{\mathrm{m}E'})\bigr) \xrightarrow{\pi_0(N_{E'/\mathbb{Q}} \circ q_{\{h\}})} \pi_0\bigl(\pi(T)\bigr) \longrightarrow \overline{\pi}_0\bigl(\pi(T)\bigr)$$

による逆像を

$$1 \longrightarrow T_0(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{E}_{E'}(T_0, h_0) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E') \longrightarrow 1$$

とかく．構成から，自然な短完全列の単射

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & T_0(\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{E}_{E'}(T_0, h_0) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E') \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\
1 \arrow[r] & G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G_0)} \arrow[r] & \mathcal{E}_E(G_0, X_0^+) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

が存在する．

定義 7.6 $\mathrm{Sh}(G_0, X_0^+)$ の E 上弱正準モデルとは，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上のスキーム S で $\mathcal{E}_E(G_0, X_0^+)$ の E 上のスキームとしての右作用があるものと，$\mathbb{C}$ 上のスキームの同型

$$\xi\colon S \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \cong \mathrm{Sh}(G_0, X_0^+)$$

の組であって，以下の条件をみたすもののことである．

(1) $\mathcal{E}_E(G_0, X_0^+)$ を写像

$$\mathcal{E}_E(G_0, X_0^+) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$$

によって $\operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Q}}$ に右から作用させると，構造射

$$S \longrightarrow \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Q}}$$

は $\mathcal{E}_E(G_0, X_0^+)$ の作用と整合的である．

(2) $G_0^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G_0)}$ の S への作用は，$\mathrm{Sh}(G_0, X_0^+)$ への作用と ξ に関して整合的である．

(3) 特殊な $h_0 \in X_0^+$ から定まる $\mathrm{Sh}(G_0, X_0^+)$ の特殊点は，ξ によって $S(\overline{\mathbb{Q}})$ の点と対応しており，その点は $\mathcal{E}_{E'}(T_0, h_0)$ の作用によって固定される．

$\mathrm{Sh}(G_0, X_0^+)$ の $E(G_0, X_0^+)$ 上弱正準モデルのことを，正準モデルという．

8 正準モデルの存在

本節の目標は次の定理について説明することである．

定理 8.1 志村多様体の正準モデルは存在する．

まず準備としていくつかの一般論について説明する．

補題 8.2 $(G, X) \to (G', X')$ を志村データの埋め込みとし，$E \subset \mathbb{C}$ を $E(G, X)$ の有限次拡大体とする．このとき，$\mathrm{Sh}(G', X')$ の E 上弱正準モデルが存在するならば，$\mathrm{Sh}(G, X)$ の E 上弱正準モデルも存在する．

証明 $S(G', X')$ を $\mathrm{Sh}(G', X')$ の E 上弱正準モデルとする．$\mathrm{Sh}(G, X)$ の特殊点の型 τ をとる．すると，補題 5.9 より，埋め込み

$$\mathrm{Sh}(G, X) \hookrightarrow \mathrm{Sh}(G', X') \cong S(G', X') \otimes_E \mathbb{C} \tag{8.1}$$

が $E(\tau)E$ 上の閉部分スキームを与えることがわかる．

命題 5.6 を用いて，$\mathrm{Sh}(G, X)$ のある特殊点の型 τ' を $E(\tau')$ が $E(\tau)E$ と $E(G, X)$ 上線型無関係であるようにとる．再び補題 5.9 より，埋め込み (8.1) が $E(\tau)E$ 上の閉部分スキームを与えることがわかる．さらに，$E(\tau)E \cap E(\tau')E = E$ より，埋め込み (8.1) が E 上の閉部分スキームを与えることがわかり，これが $\mathrm{Sh}(G, X)$ の E 上弱正準モデルを与える．□

命題 8.3 (G,X) を志村データとし，X の連結成分 X^+ をとる．$E\subset\mathbb{C}$ を $E(G,X)$ の有限次拡大体とする．このとき $\mathrm{Sh}(G,X)$ の E 上弱正準モデルが存在することと，$\mathrm{Sh}(G^{\mathrm{der}},X^{+\mathrm{ad}})$ の E 上弱正準モデルが存在することは同値である．特に，$\mathrm{Sh}(G,X)$ の E 上弱正準モデルの存在は，$(G^{\mathrm{der}},X^{+\mathrm{ad}})$ にしかよらない．

証明 $\mathrm{Sh}(G,X)$ の E 上弱正準モデルが存在すれば，観察 7.4 の議論によって $\mathrm{Sh}(G^{\mathrm{der}},X^{+\mathrm{ad}})$ の E 上弱正準モデルを構成することができる．

逆に，$\mathrm{Sh}(G^{\mathrm{der}},X^{+\mathrm{ad}})$ の E 上弱正準モデル S が存在すると仮定する．このとき $S\times\mathcal{G}\times\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ に対して，$\gamma\in\mathcal{E}_E(G^{\mathrm{der}},X^{+\mathrm{ad}})$ の作用を

$$(s,g,\sigma)\mapsto(s\gamma^{-1},\gamma g,\gamma\sigma)$$

によって定め，この作用に関して商

$$\mathcal{E}_E(G^{\mathrm{der}},X^{+\mathrm{ad}})\backslash\bigl(S\times\mathcal{G}\times\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)\bigr)$$

をとる．得られた $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のスキームを $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ の作用によって E 上のスキームに降下したものが，$\mathrm{Sh}(G,X)$ の E 上弱正準モデルを与える．

以上の構成によって，$\mathrm{Sh}(G,X)$ の E 上弱正準モデルと，$\mathrm{Sh}(G^{\mathrm{der}},X^{+\mathrm{ad}})$ の E 上弱正準モデルの間の対応が得られる． □

命題 8.4 $(G_1,X_1)\to(G_2,X_2)$ を $G_1\to G_2$ が中心的同種であるような志村データの射とする．$E\subset\mathbb{C}$ を $E(G_1,X_1)$ の有限次拡大体とし，$\mathrm{Sh}(G_1,X_1)$ の E 上弱正準モデルが存在すると仮定する．このとき，$\mathrm{Sh}(G_2,X_2)$ の E 上弱正準モデルも存在する．

証明 X_1 の連結成分 X_1^+ をとり，X_2^+ を X_1^+ の像を含む X_2 の連結成分とする．仮定と命題 8.3 より，$\mathrm{Sh}(G_1^{\mathrm{der}},X_1^{+\mathrm{ad}})$ の E 上弱正準モデル S_1 が存在する．S_2 を S_1 の

$$\mathrm{Ker}(G_1^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G_1^{\mathrm{der}})}\longrightarrow G_2^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^{+\wedge\tau(G_2^{\mathrm{der}})})$$

による商とすると，これは $\mathrm{Sh}(G_2^{\mathrm{der}},X_2^{+\mathrm{ad}})$ の E 上弱正準モデルになる．よって，再び命題 8.3 を使うと主張が従う． □

8.1 Siegel モジュラー多様体

V を $\mathbb{Q}$ 上 $2g$ 次元の線型空間とし，$\psi\colon V\times V\to\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 双線型非退化交代形式とする．K を $\mathrm{GSp}(V,\psi)(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群とする．$\mathcal{A}_{g,K}$ を [越川, 4] で定義されている K レベル構造付きの g 次元偏極 Abel 多様体の同種類の $\mathbb{Q}$ 上粗モジュライスキームとする．

$$\mathcal{A}_g = \varprojlim_K \mathcal{A}_{g,K}$$

とおく．このとき虚数乗法論の帰結として，$\mathcal{A}_g$ が $\mathrm{Sh}\bigl(\mathrm{GSp}(V,\psi), X(V,\psi)\bigr)$ の正準モデルを与えることがわかる (*cf.* [越川, 5.3])．

8.2 Hodge 型志村多様体

(G,X) が Hodge 型であるとき，ある $\mathbb{Q}$ 上有限次元の線型空間 V と $\mathbb{Q}$ 双線型非退化交代形式 $\psi\colon V\times V\to\mathbb{Q}$ に対し，志村データの埋め込み

$$(G,X)\longrightarrow\bigl(\mathrm{GSp}(V,\psi), X_{\mathrm{GSp}(V,\psi)}\bigr)$$

が存在するので，補題 8.2 により，Siegel モジュラー多様体の場合に帰着される．

8.3 Abel 型志村多様体

例 4.11 に現れた志村曲線の場合に説明する．記号は，例 4.11 にならい，F の総虚 2 次拡大 L をとる．

まず $\mathrm{Sh}(G,X)$ が L 上弱正準モデルをもつことを示す．例 4.11 で構成した Hodge 型志村データ (G',X') は，$G'^{\mathrm{der}}=G^{\mathrm{der}}$ かつ $(G'^{\mathrm{ad}},X'^{\mathrm{ad}})=(G^{\mathrm{ad}},X^{\mathrm{ad}})$ をみたすので，命題 8.3 より Hodge 型志村多様体が正準モデルをもつことに帰着される．

次に L と F 上線型無関係な F の総虚 2 次拡大 L' をとる．上の議論によって，$\mathrm{Sh}(G,X)$ が L' 上弱正準モデルをもつ．よって $\mathrm{Sh}(G,X)$ が F 上正準モデルをもつ．

一般の Abel 型の場合は，定理 4.12 の証明にならい同様の議論を行う．

注意 8.5 ウェイト射が $\mathbb{Q}$ 上定義される Abel 型志村多様体は，技術的な仮定のもとで，モチーフによるモジュライ解釈をもつことが知られている (*cf.* [Mil94, Theorem 3.13])．さらに，このモジュライ解釈を用いて，Abel 型志村多様体の正準モデルの存

在を示すこともできる (*cf.* [Mil94, Theorem 3.33]).

8.4 一般の志村多様体

(G, X) を志村データとする．$\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h \in X$ に対し，(G, X) の τ, μ_h に関する共役 $({}^{\tau,h}G, {}^{\tau,h}X)$ であって自然な同型

$$\psi_{\tau,h} \colon G(\mathbb{A}_f) \longrightarrow {}^{\tau,h}G(\mathbb{A}_f)$$

が存在するものと特殊な ${}^{\tau}h \in {}^{\tau,h}X$ を構成することができる (*cf.* [MS82, p. 310]). さらに，$\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h, h' \in X$ に対し，同型

$$\phi(\tau; h, h') \colon \mathrm{Sh}({}^{\tau,h}G, {}^{\tau,h}X) \longrightarrow \mathrm{Sh}({}^{\tau,h'}G, {}^{\tau,h'}X)$$

であって，$g \in G(\mathbb{A}_f)$ に対し，

$$\phi(\tau; h, h') \circ \psi_{\tau,h}(g) = \psi_{\tau,h'}(g) \circ \phi(\tau; h, h')$$

となるものを構成できる (*cf.* [Lan79, p. 233]). また $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ に対して, $\mathrm{Sh}(G, X)$ の τ による共役を $\tau\,\mathrm{Sh}(G, X)$ とかく.

次の定理を示すことが目標となる.

定理 8.6 $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h \in X$ に対し，同型

$$\phi_{\tau,h} \colon \tau\,\mathrm{Sh}(G, X) \longrightarrow \mathrm{Sh}({}^{\tau,h}G, {}^{\tau,h}X)$$

が存在し以下をみたす.

(1) $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h \in X$ に対し，

$$\phi_{\tau,h}(\tau[(h, 1)]) = [({}^{\tau}h, 1)]$$

かつ $g \in G(\mathbb{A}_f)$ に対し

$$\phi_{\tau,h} \circ \tau g = \psi_{\tau,h}(g) \circ \phi_{\tau,h}$$

となる.

(2) $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h, h' \in X$ に対し，

$$\phi_{\tau,h'} = \phi(\tau; h, h') \circ \phi_{\tau,h}$$

となる.

定理 8.6 は Langlands によって予想されていたものであり (*cf.* [Lan79, p. 232–233])，定理 8.6 が示せれば，得られた同型を用いて，$\mathrm{Sh}(G, X)$ を正準モデルに降下することができる (*cf.* [Lan79, p. 233–234], [Mil99, 2])．

定理 8.6 に関して，補題 8.2 の次のような類似が成り立つ (*cf.* [MS82, Lemma 9.5])．

補題 8.7 $(G, X) \to (G', X')$ を志村データの埋め込みとする．このとき，(G', X') に関して定理 8.6 が成り立つならば，(G, X) に関しても定理 8.6 が成り立つ．

定理 8.6 を示す上でも連結志村多様体を考えることが必要になる．(G_0, X_0^+) を連結志村データとする．志村データの場合と同様に，$\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h_0, h_0' \in X_0^+$ に対し，連結志村データ $({}^{\tau,h_0}G_0, {}^{\tau,h_0}X_0^+)$，特殊な ${}^{\tau}h \in {}^{\tau,\mu_{h_0}}X$，同型 $\psi_{\tau,h_0} \colon G_0(\mathbb{A}_f) \to {}^{\tau,h_0}G_0(\mathbb{A}_f)$ および同型

$$\phi(\tau; h_0, h_0') \colon \mathrm{Sh}({}^{\tau,h_0}G_0, {}^{\tau,h_0}X_0^+) \longrightarrow \mathrm{Sh}({}^{\tau,h_0'}G_0, {}^{\tau,h'}X_0^+)$$

を構成することができる．

次の定理は [MS82, §8, Conjecture C°] において予想されていたものである．

定理 8.8 $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h_0 \in X_0^+$ に対し，同型

$$\phi_{\tau,h_0} \colon \tau\,\mathrm{Sh}(G_0, X_0^+) \longrightarrow \mathrm{Sh}({}^{\tau,h_0}G_0, {}^{\tau,h_0}X_0^+)$$

が存在し以下をみたす．

(1) $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h_0 \in X_0^+$ に対し，

$$\phi_{\tau,h_0}(\tau[(h_0, 1)]) = [({}^{\tau}h_0, 1)]$$

かつ $g \in G_0(\mathbb{A}_f)$ に対し

$$\phi_{\tau,h_0} \circ \tau g = \psi_{\tau,h_0}(g) \circ \phi_{\tau,h_0}$$

となる．

(2) $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h_0, h_0' \in X_0^+$ に対し，

$$\phi_{\tau,h_0'} = \phi(\tau; h_0, h_0') \circ \phi_{\tau,h_0}$$

となる．

志村データ (G,X) に対し定理 8.6 が成り立つことと，$(G^{\mathrm{der}},X^{+\mathrm{ad}})$ に対し定理 8.8 が成り立つことは同値である (*cf.* [MS82, Proposition 9.4])．また，Siegel モジュラー多様体に対する定理 8.6 は，[Del82] の結果から従う (*cf.* [MS82, Corollary 7.17])．さらに，Abel 型志村多様体に対する定理 8.6 は，8.2 節および 8.3 節と同様の議論によって，補題 8.7 等を用いて，Siegel モジュラー多様体の場合に帰着される (*cf.* [MS82, Theorem 9.8])．

以下では，定理 8.8 の証明について説明する．$\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と特殊な $h_0\in X_0^+$ をとる．[MS82, Lemma 9.6] と [Mil83, Theorem 6.3] より，G_0 が単連結で G_0^{ad} が単純な場合に，条件 (1) をみたす ϕ_{τ,h_0} を構成できればよい．さらに，G_0 が A 型の場合は，Abel 型志村多様体に対する定理 8.6 から従うので，G_0 は A 型ではないと仮定してよい．ϕ_{τ,h_0} を構成するうえで鍵となるのが，次の Kazhdan の結果である (*cf.* [Kaz83])．

定理 8.9 (G_0,X_0^+) を連結志村データとし，Γ を G_0 の数論的部分群とする．$\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ とする．このとき，$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 $\Gamma\backslash X_0^+$ の τ による共役 $\tau(\Gamma\backslash X_0^+)$ の普遍被覆 $X_0'^+$ は Hermite 対称領域である．さらに，G' を $\mathrm{Aut}(X_0'^+)$ の単位元を含む連結成分とし，$\tau(\Gamma\backslash X_0^+)$ の基本群 Γ' を G' の部分群とみなすと，Γ' は G' の格子になる．

G_0 の数論的部分群 Γ をとり，G' と $X_0'^+$ を 定理 8.9 のようにとる．このとき，[Mar75] の結果と G_0 が A 型でないことを用いて，$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G_1 で同型

$$G(\mathbb{A}_f)\xrightarrow{\sim}G_1(\mathbb{A}_f) \tag{8.2}$$

と核がコンパクトである全射 $G_1(\mathbb{R})\to G'$ が存在し，Γ が $G_1(\mathbb{Q})$ の数論的部分群と関係づくようなものが取れる．正確な主張については [Mil83, p. 249] を参照されたい．

このとき構成から誘導される射

$$\tau\,\mathrm{Sh}(G_0,X_0^+)\longrightarrow\mathrm{Sh}(G_1,X_0'^+) \tag{8.3}$$

が同型になることを示せる．さらに，連結志村データの同型

$$(G_1,X_0'^+)\simeq({}^{\tau,h_0}G_0,{}^{\tau,h_0}X_0^+) \tag{8.4}$$

が存在する．

$\overline{T}_0$ を G_0^{ad} の $\mathbb{Q}$ 上定義された極大部分トーラスで，h_0 が $\overline{T}_{0\mathbb{R}}$ を経由するものとする．T_0 を $\overline{T}_0$ の $G_0 \to G_0^{\mathrm{ad}}$ による逆像の連結成分とする．$i\colon T_0 \to G_0$ を自然な埋め込みとする．このとき，i の τ，μ_{h_0} による共役 ${}^{\tau,h_0}i\colon T_0 \to {}^{\tau,h_0}G_0$ で ${}^{\tau,h_0}i_{\mathbb{A}_f} = \psi_{\tau,h_0} \circ i_{\mathbb{A}_f}$ となるものを構成できる (*cf.* [Mil83, Remark 1.4])．同型 (8.2)，(8.3)，(8.4) を用いて，同型

$$\begin{aligned}
&\phi'_{\tau,h_0}\colon \tau\,\mathrm{Sh}(G_0, X_0^+) \longrightarrow \mathrm{Sh}({}^{\tau,h_0}G_0, {}^{\tau,h_0}X_0^+)\\
&\psi'_{\tau,h_0}\colon G_0(\mathbb{A}_f) \to {}^{\tau,h_0}G_0(\mathbb{A}_f)
\end{aligned}$$

を以下が成り立つように構成できる．

(1) $\phi'_{\tau,h_0}(\tau[(h_0,1)]) = [({}^{\tau}h_0,1)]$ かつ $g \in G_0(\mathbb{A}_f)$ に対し

$$\phi'_{\tau,h_0} \circ \tau g = \psi'_{\tau,h_0}(g) \circ \phi'_{\tau,h_0}$$

となる．

(2) ${}^{\tau,h_0}i_{\mathbb{A}_f} = \psi'_{\tau,h_0} \circ i_{\mathbb{A}_f}$ となる．

ここで，$\psi_{\tau,h_0} = \psi'_{\tau,h_0}$ とは限らないが，条件 (2) から $\psi_{\tau,h_0} = \mathrm{ad}(t)\psi_{\tau,h_0}$ となる $t \in \overline{T}_0(\mathbb{A}_f)$ が存在することがわかる．もし，$t \in \overline{T}_0(\mathbb{Q})$ を示すことができれば，$\phi_{\tau,h_0} = \phi'_{\tau,h_0} \circ t$ とおくことで証明が完了する．

ここでさらに，補題 8.7 を用いることで，G_0 が以下の条件をみたす場合に帰着しておく．

(1) 総実体 F と F 上の半単純群 G'_0 で $G_0'^{\mathrm{ad}}$ が絶対単純であるものが存在し，$G_0 = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,G'_0$ となる．

(2) G'_0 の F 上定義された部分トーラス T'_0 で，$T_0 = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,T'_0$ となるものが存在し，T_0 は F のある総虚 2 次拡大 L 上分裂する．

R を G'_{0L} の T'_{0L} に関するルート系とし，

$$\mathrm{Lie}(G'_{0L}) = \mathrm{Lie}(T'_{0L}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in R} \mathrm{Lie}(G'_{0L})_{\alpha}$$

をルート分解とする．R の正ルートの集合 R^+ をとる．$\alpha \in R^+$ に対し，$\mathrm{Lie}(G'_{0L})$ の部分 Lie 環

$$\mathrm{Lie}(T'_{0L}) \oplus \mathrm{Lie}(G'_{0L})_{\alpha} \oplus \mathrm{Lie}(G'_{0L})_{-\alpha}$$

は F 上定義され，対応する G'_0 の連結部分代数群を H'_α とかき，$H_\alpha = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} H'_\alpha$ とおく．R^+_{nc} を $H_\alpha(\mathbb{R})$ が非コンパクトとなる $\alpha \in R^+$ 全体のなす集合とする．このとき [Mil83, Proposition 4.3] より

$$Z(G_0) = \bigcap_{\alpha \in R^+_{\mathrm{nc}}} Z(H_\alpha)$$

となる．つまり，$\alpha \in R^+$ に対し，$\overline{Z}_\alpha = Z(H_\alpha)/Z(G_0)$ とおくと

$$\bigcap_{\alpha \in R^+_{\mathrm{nc}}} \overline{Z}_\alpha = 1 \tag{8.5}$$

となる．

$\alpha \in R^+$ とし，X^+_α を

$$h_\alpha \colon \mathbb{S} \xrightarrow{h} \overline{T}_{0\mathbb{R}} \longrightarrow H^{\mathrm{ad}}_{\alpha\mathbb{R}}$$

の $H^{\mathrm{ad}}_\alpha(\mathbb{R})^+$ 共役類とする．すると，$\mathrm{Sh}(H^{\mathrm{der}}_\alpha, X^+_\alpha)$ と $\mathrm{Sh}({}^{\tau,h_\alpha}H^{\mathrm{der}}_\alpha, {}^{\tau,h_\alpha}X^+_\alpha)$ は $\mathrm{Sh}(G_0, X^+_0)$ と $\mathrm{Sh}({}^{\tau,h_0}G_0, {}^{\tau,h_0}X^+_0)$ の部分連結志村多様体になり，ϕ'_{τ,h_0} は同型

$$\phi'_\alpha \colon \mathrm{Sh}(H^{\mathrm{der}}_\alpha, X^+_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Sh}({}^{\tau,h_\alpha}H^{\mathrm{der}}_\alpha, {}^{\tau,h_\alpha}X^+_\alpha)$$

を誘導する．ここで，$(H^{\mathrm{der}}_\alpha, X^+_\alpha)$ は A_1 型なので，$(H^{\mathrm{der}}_\alpha, X^+_\alpha)$ に対する定理 8.8 はすでに証明されている．このことから $t \in \overline{T}_0(\mathbb{A}_f)$ の $(\overline{T}_0/\overline{Z}_\alpha)(\mathbb{A}_f)$ における像が，$(\overline{T}_0/\overline{Z}_\alpha)(\mathbb{Q})$ に入ることがわかる．よって t の $\overline{T}_0(\mathbb{A}_f)/\overline{T}_0(\mathbb{Q})$ における像が，$\overline{Z}_\alpha(\mathbb{A}_f)/\overline{Z}_\alpha(\mathbb{Q})$ に入る．このことと，(8.5) をあわせると，$t \in \overline{T}_0(\mathbb{Q})$ がわかり，主張が従う．

9 志村多様体上の局所系と保型ベクトル束

(G, X) を志村データとする．この節では，Z^0 がある CM 体上分裂すると仮定する．Z_s を Z の $\mathbb{Q}$ 上定義された部分トーラスのうちで，$\mathbb{R}$ 上分裂し，$\mathbb{Q}$ 上分裂している部分トーラスをもたないような最大のものとする．$G^c = G/Z_s$ とおく．次の定理は [Mil90, III, Theorem 5.1, 6] の結果をまとめたものである．

定理 9.1 K を $G(\mathbb{A}_f)$ の十分小さいコンパクト開部分群とし，$S_K(G, X)$ を $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ の正準モデルとする．(V, ξ) を G^c の $\mathbb{Q}$ 上有限次元代数表現とする．このとき以下の対象を標準的に構成することができる．

(1) $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ 上の $\mathbb{Q}$ 局所系 $V(\xi)$.
(2) 任意の素数 ℓ に対する $S_K(G,X)$ 上の $\mathbb{Q}_\ell$ エタール局所系 $V_\ell(\xi)$.
(3) $S_K(G,X)$ 上のベクトル束 $\mathcal{V}(\xi)$ とその上の平坦接続 $\nabla(\xi)$.

さらに ν: $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) \to S_K(G,X)$ を局所環付き空間の自然な射としたとき，以下の標準的な同型が存在する.

- 任意の素数 ℓ に対する，$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ 上の $\mathbb{Q}_\ell$ 局所系の同型 $V(\xi)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \nu^*V_\ell(\xi)$.
- $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ 上の $\mathbb{C}$ 局所系の同型 $V(\xi)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \nu^*\bigl(\mathcal{V}(\xi)\bigr)^{\nu^*\nabla(\xi)}$.

定理で構成されるベクトル束 $\mathcal{V}(\xi)$ を保型ベクトル束という．以下では，$\mathbb{Q}$ 局所系 $V(\xi)$，$\mathbb{Q}_\ell$ エタール局所系 $V_\ell(\xi)$ およびベクトル束 $\mathcal{V}(\xi)$ の構成について説明する.

9.1 $\mathbb{Q}$ 局所系

K の $G^c(\mathbb{A}_f)$ における像を K^c とかく．以下が成り立つように K が十分小さいと仮定する.

- 補題 3.1 において，任意の $g \in \mathcal{C}$ に対し，$\Gamma_g\backslash X^+$ の基本群が Γ_g となる.
- $K^c \cap (Z/Z_s)(\mathbb{Q}) = \{1\}$ となる.

このとき，$gKg^{-1}\cap G(\mathbb{Q})_+$ の $G^c(\mathbb{Q})$ における像を Γ_g^c とおくと，$\Gamma_g^c \xrightarrow{\sim} \Gamma_g$ である．よって G^c の表現 (V,ξ) によって Γ_g の表現が定まり，それから $\Gamma_g\backslash X^+$ 上の $\mathbb{Q}$ 局所系が定まる．これらをあわせて，$\mathbb{Q}$ 局所系 $V(\xi)$ が得られる.

9.2 $\mathbb{Q}_\ell$ エタール局所系

$S(G,X)$ を $\mathrm{Sh}(G,X)$ の正準モデルとする．K が十分小さい時，$S(G,X)$ は $S_K(G,X)$ 上の Galois 群が K^c である Galois 被覆になる．G^c の表現 (V,ξ) から，K^c の連続表現 $V\otimes\mathbb{Q}_\ell$ が定まり，それから $\mathbb{Q}_\ell$ エタール局所系 $V_\ell(\xi)$ が定まる.

9.3 ベクトル束

$h \in X$ とし，μ_h の定める $\operatorname{Rep} G_{\mathbb{C}}$ の減少フィルトレーションを Fil_{μ_h} とかく．Fil_{μ_h} の $G(\mathbb{C})$ 共役類は $h \in X$ のとり方によらず，これを $\check{X}$ とかく．Fil_{μ_h} の $G_{\mathbb{C}}$ の作用に関する固定部分群を P_h とかく．P_h は $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群になる．このとき，Fil_{μ_h} によって同型

$$G(\mathbb{C})/P_h(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \check{X}$$

が得られ，$\check{X}_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/P_h$ によって $\check{X}$ に $\mathbb{C}$ 上の代数多様体の構造が入る．$P_h^c = P_h/Z_{s\mathbb{C}}$ とおくと同型

$$\check{X}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} G^c_{\mathbb{C}}/P^c_h \tag{9.1}$$

が得られる．また，自然な全射 $M_X \to \check{X}$ が存在することと，$\check{X}_{\mathbb{C}}$ が $\mathbb{Q}$ 上定義された Grassmann 多様体に埋め込めることを用いて，$\check{X}_{\mathbb{C}}$ に $E(G,X)$ 上の代数多様体の構造を入れることができる．

$(x,c,a) \in X \times G^c(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{A}_f)$ に対する $q \in G(\mathbb{Q})$，$z \in Z(\mathbb{Q})^-$ の作用を

$$q(x,c,a)z = (qx, qc, qaz)$$

によって定め，

$$P(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times G^c(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{A}_f)/Z(\mathbb{Q})^-$$

とおく．自然な射 $\pi\colon P(G,X)(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sh}(G,X)(\mathbb{C})$ によって，$P(G,X)(\mathbb{C})$ は $\mathrm{Sh}(G,X)(\mathbb{C})$ 上の主 $G^c(\mathbb{C})$ 束になる．

$V(\xi)$ に対応する $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ 上の平坦接続付きベクトル束を $\bigl(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\xi), \nabla_{\mathbb{C}}(\xi)\bigr)$ とする．$G^c(\mathbb{C})$ 同変な写像

$$\gamma\colon P(G,X)(\mathbb{C}) \longrightarrow \check{X}$$

を以下のように定める．$P(G,X)(\mathbb{C})$ の点 p は G^c の任意の $\mathbb{Q}$ 上有限次元代数表現 (ξ', V') に対し，同型 $V'_{\mathbb{C}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\xi')_{\pi(p)}$ を与える．この同型と $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\xi')_{\pi(p)}$ の Hodge フィルトレーションから $V'_{\mathbb{C}}$ にフィルトレーションが定まる．これによって，$\check{X}$ の点が定まる (*cf.* [Mil90, III, Proposition 3.4])．

定理 9.2 $P(G,X)(\mathbb{C})$ は自然に $E(G,X)$ 上のスキームの構造をもち，

$$\mathrm{Sh}(G,X)(\mathbb{C}) \xleftarrow{\pi} P(G,X)(\mathbb{C}) \xrightarrow{\gamma} \check{X}$$

は $E(G,X)$ 上定義される．

証明 連結志村多様体に対する同様の主張が [Mil88] で証明されており，それから従う (*cf.* [Mil90, III, Theorem 4.3, Theorem 4.6])． □

定理 9.2 によって，$P(G,X)(\mathbb{C})$ に $\mathbb{C}$ スキームの構造を入れたものを $P(G,X)$ とかく．$G(\mathbb{A}_f)$ の十分小さいコンパクト開部分群 K に対し，$P_K(G,X) = P(G,X)/K$ とおく．すると，定理 9.2 より射

$$\mathrm{Sh}_K(G,X) \xleftarrow{\pi_K} P_K(G,X) \xrightarrow{\gamma_K} \check{X}_{\mathbb{C}}$$

が誘導され，これらの射は $E(G,X)$ 上定義される．

$\xi_{\mathbb{C}}$ の P_h^c への制限と同型 (9.1) から定まる $\check{X}_{\mathbb{C}}$ 上の $G_{\mathbb{C}}^c$ 同変ベクトル束 $\mathcal{J}(\xi)$ は $E(G,X)$ 上定義される．$P_K(G,X)$ 上の $G_{\mathbb{C}}^c$ 同変ベクトル束 $\gamma_K^{-1}\big(\mathcal{J}(\xi)\big)$ と対応する $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ 上のベクトル束は，$E(G,X)$ 上定義され，これを $\mathcal{V}(\xi)$ とする．

謝辞 原稿にコメントを下さった大井雅雄氏，時本一樹氏に感謝する．

参考文献

[BB66] W. L. Baily, Jr. and A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. (2) 84 (1966), 442–528.

[Bor72] A. Borel, Some metric properties of arithmetic quotients of symmetric spaces and an extension theorem, J. Differential Geometry 6 (1972), 543–560, collection of articles dedicated to S. S. Chern and D. C. Spencer on their sixtieth birthdays.

[Bor82] M. V. Borovoi, The Langlands conjecture on the conjugation of Shimura varieties, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 16 (1982), no. 4, 61–62.

[Del71] P. Deligne, Travaux de Shimura (1971), 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244.

[Del72] P. Deligne, La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$, Invent. Math. 15 (1972), 206–226.

[Del79] P. Deligne, Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques, in Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pp. 247–289, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Del82] P. Deligne, Motifs et groupes de Taniyama, in Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, vol. 900 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 261–279, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[Kaz83] D. Kazhdan, On arithmetic varieties. II, Israel J. Math. 44 (1983), no. 2, 139–159.

[Kis10] M. Kisin, Integral models for Shimura varieties of abelian type, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 4, 967–1012.

[Kot92] R. E. Kottwitz, Points on some Shimura varieties over finite fields, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 373–444.

[Lan79] R. P. Langlands, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen, in Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pp. 205–246, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[MP16] K. Madapusi Pera, Integral canonical models for spin Shimura varieties, Compos. Math. 152 (2016), no. 4, 769–824.

[Mar75] G. A. Margulis, Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature (1975), 21–34.

[Mil83] J. S. Milne, The action of an automorphism of $\mathbf{C}$ on a Shimura variety and its special points, in Arithmetic and geometry, Vol. I, vol. 35 of Progr. Math., pp. 239–265, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[Mil88] J. S. Milne, Automorphic vector bundles on connected Shimura varieties, Invent. Math. 92 (1988), no. 1, 91–128.

[Mil90] J. S. Milne, Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles, in Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), vol. 10 of Perspect. Math., pp. 283–414, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Mil94] J. S. Milne, Shimura varieties and motives, in Motives (Seattle, WA, 1991), vol. 55 of Proc. Sympos. Pure Math., pp. 447–523, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Mil99] J. S. Milne, Descent for Shimura varieties, Michigan Math. J. 46 (1999), no. 1, 203–208.

[Mil05] J. S. Milne, Introduction to Shimura varieties, in Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, vol. 4 of Clay Math. Proc., pp. 265–378, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[MS82] J. S. Milne and K.-y. Shih, Conjugates of Shimura varieties, in Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, vol. 900 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 280–356, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[Sat65] I. Satake, Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space, Amer. J. Math. 87 (1965), 425–461.

[Shi70a] G. Shimura, On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. (2) 91 (1970), 144–222.

[Shi70b] G. Shimura, On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. II, Ann. of Math. (2) 92 (1970), 528–549.

[阿部] 阿部 紀行, Hermite 対称領域, 本報告集.

[大島] 大島 芳樹, Hermite 対称領域の数論的商と保型形式, 本報告集.

[越川] 越川 皓永, Siegel モジュラー多様体, 本報告集.