

2015年度
整数論サマースクール報告集
「志村多様体とその応用」

2015年8月17日～8月21日
於 南田温泉ホテルアップルランド

前書き

2015 年度整数論サマースクール「志村多様体とその応用」は、2015 年 8 月 17 日から 8 月 21 日にかけて、青森県平川市「南田温泉ホテルアップルランド」にて開催されました。本報告集には、サマースクールでの講演をもとに、講演者の方々に執筆していただいた原稿が収録されています。

テーマである志村多様体は、Hermite 対称領域の数論商として得られる代数多様体のことであり、複素上半平面の商であるモジュラー曲線の一般化にあたるものです。モジュラー曲線の定義方程式が代数体に係数を持つことは古典的によく知られた事実ですが、それと同様に、志村多様体も代数体上の自然なモデル（正準モデル／canonical model）を持つことが知られています。この正準モデルの理論は、志村五郎氏によって、多数の先駆的な研究を経て、1970 年頃に導入されました。正準モデルの存在によって、種々の正則保型形式の持つ有理性・数論性を統一的に捉えることが可能になります。また、志村多様体のエタールコホモロジーへの Galois 群および Hecke 作用素の作用を通して、Galois 表現と保型形式・保型表現を結び付けることもできます。これは、いわゆる大域 Langlands 対応に対する、現状で最も有効なアプローチの一つであると考えられています。近年、数論幾何学・保型表現論双方の進歩によって、以前は予想であった志村多様体の諸性質が多くの場合に証明されつつあり、また、その発展に伴い、さらに多くの応用が発見されてきています。今や、志村多様体論は現代整数論における標準的な道具立てとなった感があります。このような状況を鑑み、志村多様体に関するサマースクールを企画いたしました。

サマースクールの内容を決定するに当たっては、以下の二つのことに留意しました。一つ目は、例を豊富に扱うということです。現在の研究で標準的に用いられているのは、志村氏の理論を Deligne が再定式化したものなのですが、この Deligne の定式化は、その抽象性・一般性のため、定義を見ただけではそれが意味するところをなかなか理解しづらいように感じていました。そこで本サマースクールでは、モジュラー曲線の最も単純な高次元化である Siegel モジュラー多様体から始めるとともに、なるべく分かりやすく、かつ実際の研究で使われている例を多く含めることで、この理論に初めて触れる参加者の方々にも十分に理解できるよう努めました。これらの例は、報告集の随所に見て取ることができると思います。二つ目は、志村多様体の一般論だけではなく、応用も同時に扱うことで、その有用性を感じていただくという

ことです。サマースクールの後半部では、主要な応用の一つである大域 Langlands 対応を始めとして、K3 曲面の Tate 予想、アーベル多様体の周期、 p 進保型形式、Hasse-Weil L 関数の微分値と代数的サイクルの関係といった、様々な応用を扱いました。これらのトピックの多くは最近の進展に関するものですが、いずれも本質的な考え方や技術を含んでおり、これからも大きく発展してゆく余地のある、将来性のある内容を選んだつもりです。本報告集は、そうした現在進展中の分野へと入門するための一助となることも目的として執筆されています。サマースクール終了から現在に至るまでも、関連分野では様々な進展がありましたが、それらについても、可能な範囲で言及するように努めました。現在の研究の動向を知る際にも、お役立ていただければ幸いです。

講演者や参加者の皆様のご協力、また、ホテルのスタッフの方々のお力添えもあり、サマースクール自体は無事終わることができました。しかし、報告集の作成は想定よりもはるかに難航し、完成までに5年近くの年月が経過してしまいました。これはひとえに世話人の力量不足によるものであり、完成が遅れてしまったことを深くお詫びいたします。長い時間をかけたただけあって、なんとか皆様にお届けするのに恥ずかしくないものに仕上がったのではないかと思います。

報告集を作成する際にも、多くの方々にお世話になりました。まず、報告集の編集については、講演者でもある阿部紀行さん（東京大学）にほとんど全てをお願いいたしました。阿部さんには、サマースクールのウェブサイトの作成・運営もお願いしておりました。この場を借りて感謝の意を捧げます。報告集の完成度を高めるため、本報告集の全ての原稿に対して、複数名による査読が行われています。査読は、基本的には執筆者の方々をお願いしましたが、それ以外に、大井雅雄さん（京都大学）、竹内大智さん（東京大学）、時本一樹さん（Academia Sinica）、八尋耕平さん（東京大学）にもご助力いただきました。執筆および査読を行ってくださった皆様に感謝したいと思います。最後になりましたが、本サマースクールおよび報告集は、科学研究費補助金 基盤研究 (B)「志村多様体、局所志村多様体とそのエタールコホモロジー」（課題番号：15H03605、研究代表者：三枝洋一）の助成を受けております。

本報告集が皆様の今後の数学活動に少しでも役立つことを祈りつつ、筆を擱かせていただきます。

2015 年度整数論サマースクール世話人
伊藤哲史（京都大学）・千田雅隆（東京電機大学）・三枝洋一（東京大学）

2015 年度整数論サマースクール「志村多様体とその応用」

プログラム

日程	2015年8月17日(月)～21日(金)
場所	南田温泉ホテルアップルランド 〒036-0114 青森県平川市町居南田166-3 (http://www.apple-land.co.jp/)
世話人	伊藤哲史(京都大学大学院理学研究科数学教室) 千田雅隆(東北大学大学院理学研究科数学専攻) 三枝洋一(東京大学大学院数理科学研究科)
ウェブページ	http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~abenori/conf/20150817.html

プログラム

8月17日(月)

- 10:00-12:15 伊藤哲史(京大理)
プレサマースクール
- 15:00-16:30 石塚裕大(京大理)
アーベル多様体の基礎
- 16:45-19:00 越川皓永(シカゴ大)
Siegel モジュラー多様体
- 20:00-21:00 講演の補足, Q&A 等

8月18日(火)

- 9:00-11:00 阿部紀行(北大理)
Hermite 対称領域
- 11:15-12:15 大島芳樹(東大 Kavli IPMU)
Hermite 対称領域の数論的商と保型形式(1)
- 13:15-14:15 大島芳樹(東大 Kavli IPMU)
Hermite 対称領域の数論的商と保型形式(2)

- 14:30–16:30 梅崎直也 (東大数理)
志村多様体の基礎
- 16:45–19:00 今井直毅 (東大数理)
志村多様体の正準モデルの構成
- 20:00–21:00 講演の補足, Q&A 等

8月19日 (水)

- 9:00–12:15 清水康司 (ハーバード大)
志村多様体の整モデル
- 13:15–15:15 松本雄也 (東大数理)
志村多様体と $K3$ 曲面: Tate 予想への応用

8月20日 (木)

- 9:00–11:00 伊藤哲史 (京大理)
志村多様体のエタールコホモロジーと大域ラングランズ対応
- 11:15–12:15 津嶋貴弘 (千葉大理)
モジュラー曲線の Lefschetz 数 (1)
- 13:15–14:15 津嶋貴弘 (千葉大理)
モジュラー曲線の Lefschetz 数 (2)
- 14:30–17:15 三枝洋一 (東大数理)
志村多様体を用いた Galois 表現の構成
- 17:30–19:00 大下達也 (愛媛大理工)
アーベル多様体の周期への応用
- 20:00– 来年度以降のサマースクールについて

8月21日 (金)

- 9:00–10:30 中村健太郎 (北大理)
 p 進保型形式と志村多様体
- 10:45–12:15 千田雅隆 (東北大理)
 L 関数の微分値と志村多様体上の代数的サイクル

参加者リスト

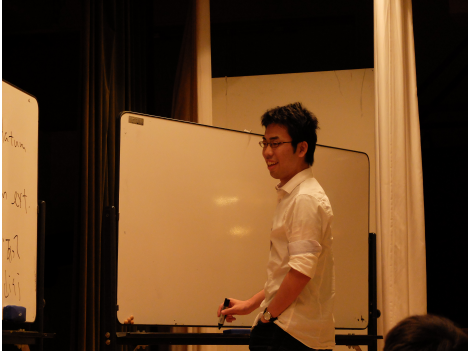
相川勇輔	北海道大学	越川皓永	シカゴ大学
青木宏樹	東京理科大学	小林真一	東北大学
赤木和真	大阪大学	齋藤正顕	早稲田大学
跡部発	京都大学	酒井祐貴子	北里大学
阿部紀行	北海道大学	坂田裕	早稲田大学高等学院
石川勲	京都大学	佐藤信夫	京都大学
石川佳弘	岡山大学	佐野薫	京都大学
石塚裕大	京都大学	清水康司	ハーバード大学
伊藤哲史	京都大学	杉山真吾	九州大学
今井直毅	東京大学	勢力稔也	大阪大学
植木潤	九州大学	関真一郎	大阪大学
植松哲也	豊田工業高等専門学校	関典史	東京大学
内田幸寛	首都大学東京	高田芽味	九州大学
梅崎直也	東京大学	谷口隆	神戸大学
大井雅雄	東京大学	千田雅隆	東北大学
大川幸男	東京大学	津嶋貴弘	千葉大学
大下達也	愛媛大学	対馬龍司	明治大学
大島芳樹	東京大学	時本一樹	東京大学
奥村喜晶	九州大学	内藤浩忠	香川大学
小澤友美	東北大学	中島幸喜	東京電機大学
小関祥康	京都大学	中村健太郎	北海道大学
尾高悠志	京都大学	並川健一	東京電機大学
小野雅隆	慶應義塾大学	成田宏秋	熊本大学
小原まり子	東北大学	萩原啓	北海道大学
甲斐亘	東京大学	長谷川武博	滋賀大学
桂田英典	室蘭工業大学	原隆	東京電機大学
川島誠	大阪大学	原下秀士	横浜国立大学
木村巖	富山大学	平川義之輔	慶應義塾大学
軍司圭一	千葉工業大学	平野雄一	東京大学
源嶋孝太	大阪大学	広瀬稔	京都大学

古澤昌秋	大阪市立大学
堀永周司	京都大学
槇山賢治	京都産業大学
松岡勇氣	名古屋大学
松村英樹	慶應義塾大学
松本雄也	東京大学
三枝洋一	東京大学
三柴善範	小山工業高等専門学校
南範彦	名古屋工業大学
宮崎弘安	東京大学
森本和輝	京都大学
谷田川友里	東京大学
八尋耕平	東京大学
矢不俊文	北海道大学
山縣幸司	名古屋工業大学
山上敦士	創価大学
山下剛	京都大学
吉川祥	東京大学
若林功	元成蹊大学

以上 79 名

敬称略, 所属は参加申請時のとおり





目次

前書き	iii
プログラム	v
参加者リスト	vii
写真	ix
プレサマースクール	1
伊藤 哲史 (京都大学) 述 三枝 洋一 (東京大学) 記	
Abel 多様体の基礎	21
石塚 裕大 (京都大学)	
Siegel モジュラー多様体	51
越川 皓永 (京都大学)	
Hermite 対称領域	79
阿部 紀行 (東京大学)	
Hermite 対称領域の数論的商と保型形式	147
大島 芳樹 (大阪大学)	
志村多様体入門	169
今井 直毅 (東京大学)	
志村多様体の整モデル	205
清水 康司 (Institute for Advanced Study)	
志村多様体と K3 曲面 : Tate 予想への応用	289
松本 雄也 (東京理科大学)	

本田・テイト理論とモジュラー曲線のレフシェッツ数	323
津嶋 貴弘 (千葉大学)	
志村多様体のエタールコホモロジー	351
三枝 洋一 (東京大学)	
志村多様体を用いた Galois 表現の構成	455
三枝 洋一 (東京大学)	
アーベル多様体の周期への応用	503
大下 達也 (慶應義塾大学)	
p-進保型形式と志村多様体	579
中村 健太郎 (佐賀大学)	
L 関数の微分値と志村多様体上のサイクル	615
千田 雅隆 (東京電機大学)	
練習問題	663