L 関数の微分値と志村多様体上のサイクル

千田雅隆 *

概要

Gross-Zagier 公式はモジュラー曲線上の Heegner 点の高さと Rankin-Selberg L 関数の微分値を結びつける公式であった．この公式の高次元への一般化である数論的 Gan-Gross-Prasad 予想について解説する．

1 Gross-Zagier 公式と Waldspurger 公式

本稿では保型表現に伴う L 関数の一階微分値と志村多様体のサイクルの高さを関係付ける数論的 Gan-Gross-Prasad 予想について解説する．保型表現に伴う L 関数の特殊値は保型表現の周期などと関係付けることで, 現在でも盛んに研究が行われている．一方で代数多様体 (のコホモロジー) から定まる Hasse-Weil L 関数の特殊値に関しても類数公式や BSD 予想をはじめとして, 様々な予想が定式化され, 研究が行われてきた．これまでの記事でも紹介されたように Langlands 対応の研究を通して, 保型 L 関数は (今回のサマースクールのテーマである) 志村多様体の Hasse-Weil L 関数として捉えられる場合があり, そのような場合には L 関数の特殊値は志村多様体の幾何と関係付けられることが期待できる．このような場合に Hasse-Weil L 関数や保型 L 関数の特殊値に関する結果や予想をより統一的な視点で扱おうという試みが Kudla や Gross によって始められ, 近年になって徐々に理解が進みつつあるように感じられる．本稿の主題は Gan-Gross-Prasad や Wei Zhang たちによる, そのような試みに関する最近の進展を紹介することにある．

一般的な状況を考える前に今回の話の出発点となる Gross-Zagier 公式がどのようなものであったかということを復習しておこう．f を重さが 2 でレベル $\Gamma_0(N)$ の尖点的 (cuspidal) で Hecke 固有な新形式 (newform) とし, E を判別式が $-d$ の虚二次

* 東京電機大学未来科学部数学系列　e-mail: chida@mail.dendai.ac.jp

体とする．E のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(E)$ の指標 $\chi : \mathrm{Cl}(E) \to \mathbb{C}^\times$ を一つ固定し，この指標 χ から定まる重さ 1，レベル $\Gamma_1(d)$ の保型形式を g_χ と書くことにする．このとき，この保型形式 g_χ は

$$g_\chi(z) = \sum_{A \in \mathrm{Cl}(E)} \chi(A)\theta_A(z)$$

と表すことができる．ここで，θ_A は $\theta_A(z) = (\#\mathcal{O}_E^\times)^{-1} + \sum_{\mathfrak{a} \in A} e^{2\pi i \cdot N\mathfrak{a} \cdot z}$ によって定まるテータ関数とする．$L(f \otimes g_\chi, s) = L(\rho_f \otimes \mathrm{Ind}_E^{\mathbb{Q}}\chi, s)$ を f と g_χ から定まる Rankin-Selberg L 関数とする (ρ_f は f に付随する Galois 表現を表す)．さらに f と E は Heegner 条件を満たすとする (つまり ℓ が N の素因子ならば ℓ は E で分解すると仮定する)．このとき $L(f \otimes g_\chi, s)$ の関数等式の符号は -1 となることが ϵ 因子の計算によって分かる．ゆえに関数等式から $L(f \otimes g_\chi, s)$ の $s = 1$ での零点の位数は奇数となることが従い[*1]，特に $L(f \otimes g_\chi, s)$ の $s = 1$ での値は 0 になる．このとき Gross-Zagier は $L(f \otimes g_\chi, s)$ の $s = 1$ での一階微分値と Heegner 点の Néron-Tate 高さを結びつける次のような公式を示した．

定理 1.1（Gross-Zagier [GZ86]） f と E は Heegner 条件を満たすと仮定する．このとき

$$\langle P_\chi(f), P_\chi(f) \rangle_{NT} = \frac{\#\mathrm{Cl}(E) \cdot \#(\mathcal{O}_E^\times/\{\pm 1\})^2 \cdot d^{1/2}}{8\pi^2 \langle f, f \rangle_{Pet}} L'(f \otimes g_\chi, 1)$$

が成り立つ．但し，$P_\chi(f)$ はモジュラー曲線 $X_0(N)$ 上の Heegner 点の χ 部分の f 等型成分 (isotypic component)[*2]，$\langle\ ,\ \rangle_{NT}$ は Néron-Tate の高さペアリングであり，$\langle\ ,\ \rangle_{Pet}$ は Petersson 内積を表す．

この公式から特に $\langle P_\chi(f), P_\chi(f) \rangle_{NT} \neq 0$ と $L'(f \otimes g_\chi, 1) \neq 0$ が同値であることが分かる．さらに Kolyvagin らの仕事により，有理数体上の楕円曲線に対する BSD 予想への重要な応用が知られている．Gross-Zagier 公式はその後 Shou-Wu Zhang らによって総実代数体上の志村曲線の場合[*3] へと拡張されており，総実代数体上の楕円曲線に対する BSD 予想への応用も知られている．

[*1] $s = 1$ が L 関数 $L(f \otimes g_\chi, s)$ の関数等式の中心になっていることからこのことが分かる．

[*2] Hecke 作用素が f に対する固有値と同じ固有値で作用する部分のこと．

[*3] Yuan-Zhang-Zhang [YZZ13] はこの後で述べる Waldspurger の公式と同様の枠組みで Gross-Zagier 公式を定式化し証明している．

今回の話において，もう一つの出発点となるのが保型 L 関数の特殊値と周期の研究に大きな影響を与えた Waldspurger の公式である．Waldspurger の結果についても簡単に思い出しておこう．F を代数体として $\mathbb{A}_F$ を F 上のアデール環とする．B を F 上の四元数環とし，$G = B^\times$ とおく．π を中心指標 ω_π を持つ $G(\mathbb{A}_F)$ 上の既約 (irreducible) で尖点的かつ緩増加 (tempered) な保型表現とする．E/F を二次拡大とし，F 代数としての埋め込み $E \hookrightarrow B$ が存在すると仮定する．$\chi : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $\omega_\pi \cdot \chi|_{\mathbb{A}_F^\times} = 1$ を満たすような Hecke 指標とすると，斎藤 [Sai93] と Tunnell [Tun83] の結果により各素点 v に対し $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{E_v^\times}(\pi_v \otimes \chi_v, \mathbb{C}) \leqq 1$ であり，$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{E_v^\times}(\pi_v \otimes \chi_v, \mathbb{C}) = 1$ であることと

$$\epsilon(\pi_v \otimes \chi_v, 1/2) = \chi_v(-1)\eta_{E_v/F_v}(-1)\epsilon(B_v)$$

であることが同値となる．ここで η_{E_v/F_v} は拡大 E_v/F_v に対応する指標であり，$\epsilon(B_v)$ は B_v の Hasse 不変量である．以下，全ての素点 v に対して $\mathrm{Hom}_{E_v^\times}(\pi_v \otimes \chi_v, \mathbb{C})$ の次元が 1 であると仮定する．このとき $f \in \pi$ に対して

$$\mathscr{P}_E(f \otimes \chi) = \int_{E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / \mathbb{A}_F^\times} f(t)\chi(t)dt$$

と定め，$\pi \otimes \widetilde{\pi}$ (ここで $\widetilde{\pi}$ は π の反傾表現) 上の線型形式 $\ell_{E,\pi}$ を

$$\ell_{E,\pi}(f \otimes f') = \mathscr{P}_E(f \otimes \chi)\overline{\mathscr{P}_E(f' \otimes \chi^{-1})}$$

($f \in \pi$, $f' \in \widetilde{\pi}$) により定める．この線型形式と L 関数の中心値の関係を与えるのが次の Waldspurger による結果である．

定理 1.2 (Waldspurger [Wal85]) π を中心指標 ω_π を持つ $G(\mathbb{A}_F)$ 上の既約で尖点的かつ緩増加な保型表現とし，(E, χ) は上で述べた条件を満たすと仮定する．$\pi_{0,E}$ を $\pi_0 = \mathrm{JL}(\pi)$ (ここで JL は Jacquet-Langlands 対応を表す) の E への基底変換とする．このとき次は同値．

(1) $\ell_{E,\pi} \neq 0$.

(2) $L(\pi_{0,E} \otimes \chi, 1/2) \neq 0$.

注意 1.3 Waldspurger の議論から実際にはより精密な公式が得られるがここでは詳しくは述べないことにする．

Gan-Gross-Prasad [GGP12] はこの Waldspurger の結果の一般化にあたる公式を古典群などの場合に予想した．これが (大域) Gan-Gross-Prasad 予想と呼ばれるものである．本稿で紹介する数論的 Gan-Gross-Prasad 予想は Gross-Zagier 公式を Gan-Gross-Prasad 予想の枠組みで捉えることで Gross-Zagier 公式を高次元に拡張したものと考えることができる．数論的 Gan-Gross-Prasad 予想の定式化には Beilinson-Bloch の高さペアリングが必要であるため 2 節ではこの高さペアリングの構成について解説する．さらに 3 節では, この予想の背景にある局所及び大域 Gan-Gross-Prasad 予想について復習し, 数論的 Gan-Gross-Prasad 予想の定式化を述べる．4 節では Yuan-Zhang-Zhang による $G = \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(3)$ の場合の数論的 Gan-Gross-Prasad 予想の結果について紹介する．5 節では Wei Zhang による数論的基本補題を紹介し, 最後の 6 節では L 関数の微分値と部分志村多様体のなすサイクルの高さを結びつけるための有効な手段である (と期待されている) 数論的相対跡公式について説明する．

謝辞　この原稿に関して有益なコメントを頂きました大下達也氏と三枝洋一氏にこの場を借りて感謝を申し上げます．

2　Beilinson-Bloch の高さペアリング

2.1　BSD 予想の一般化

X を代数体 F 上の滑らかで射影的な代数多様体とする．$d = \dim X$ とおき, i を $0 \leqq i \leqq d$ を満たす整数とする．

$$CH^i(X) = \{Z : \text{余次元が } i \text{ の } X \text{ の代数的サイクル}\}/\sim_{\mathrm{rat}}$$

を X の Chow 群と呼ぶ ($\sim_{\mathrm{rat}}$ は有理同値を表す)．$CH^i(X)$ の部分群 $CH^i(X)_0$ を

$$CH^i(X)_0 = \mathrm{Ker}\left(CH^i(X) \to H^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell(i))\right)$$

によって定める．$CH^i(X)_0$ は有限生成アーベル群になると予想されている．古典的には 0-サイクルと因子 (divisor) の間には高さペアリングが定義されていたが, それを任意の余次元に拡張したのが Beilinson-Bloch の高さペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle_{BB} : CH^i(X)_0 \times CH^{d+1-i}(X)_0 \to \mathbb{R}$$

である．Beilinson [Bei87] と Bloch [Blo84] はそれぞれ独立に (いくつかの予想や仮定の下で) 高さペアリングを構成しているが, それらは同じペアリングを定めると予想されている．Bloch の構成は K 理論的であり, Beilinson の構成はコホモロジー的である．また, Scholl [Sch91, Sch94] はこの高さペアリングのモチーフ的解釈を与えている．このような高さペアリングを考える動機として BSD 予想の一般化である Beilinson-Bloch 予想を思い出しておこう．$L(h^i(X),s)$ を $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{F}},\mathbb{Q}_\ell)$ への $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の作用から定まる Hasse-Weil L 関数とする．

予想 2.1 (Swinnerton-Dyer [SD67], Bloch [Blo84], Beilinson [Bei87]) X を代数体 F 上の滑らかで射影的な代数多様体とし, i を $1 \leqq i \leqq d$ を満たす整数とする．

(1) Hasse-Weil L 関数 $L(h^{2i-1}(X),s)$ は全複素平面上に正則に解析接続され,

$$\mathrm{ord}_{s=i}\, L(h^{2i-1}(X),s) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, CH^i(X)_0$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{ord}_{s=i}$ は $s=i$ における零点の位数を表す．

(2) $r = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, CH^i(X)_0$ とおく．このとき

$$\lim_{s\to i} \frac{L(h^{2i-1}(X),s)}{(s-i)^r} \equiv \det(\langle\ ,\ \rangle_{BB}) \cdot \Omega \quad \mathrm{mod}\ \mathbb{Q}^\times$$

となる．但し, $\det(\langle\ ,\ \rangle_{BB})$ は $CH^i(X)_0 \otimes \mathbb{Q}$ の基底 $Z_1,\dots,Z_r$ を固定したとき定まる行列 $(\langle Z_i, Z_j\rangle_{BB})_{i,j}$ の行列式を表し, Ω は Deligne の周期

$$\det\nolimits_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{\sigma:F\hookrightarrow\mathbb{C}} H^{2i-1}_{\mathrm{B}}(X_\sigma(\mathbb{C}),\mathbb{Q}(i))^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to (H^{2i-1}_{\mathrm{dR}}(X/F)/\mathrm{Fil}^i)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\right)$$

を表す．ここで $X_\sigma = X \times_{F,\sigma} \mathbb{C}$ であり, $H^i_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}(j))^+$ は $X(\mathbb{C})$ への複素共役の作用から定まるコホモロジーへの作用で固定される部分を表し, $\det_{\mathbb{R}}$ は Betti コホモロジーと de Rham コホモロジーの $\mathbb{Q}$-基底に関する表現行列の行列式を表す (これは $\mathbb{R}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の元を定める).

予想 2.1は X が楕円曲線で $i=1$ のときが BSD 予想に一致する．BSD 予想のように Taylor 展開の先頭項に関するより精密な予想 (Bloch-加藤の玉河数予想など) も定式化されているが, その詳細を述べるのは本稿の主題から外れるのでここではこれ以上詳しくは述べないでおこう．

2.2 Beilinson による高さペアリングの構成

ここでは Beilinson による高さペアリングの構成について簡単に復習する．大域高さペアリングは局所高さペアリングの和を用いて定義される．まずはじめに非アルキメデス局所体上の局所高さペアリングを説明しよう．R_v を強 Hensel 環 (strictly Henselian ring) とし, $C_v = \operatorname{Spec} R_v$ とおく．F_v を R_v の商体, k_v をその剰余体とし, $\eta_v = \operatorname{Spec} F_v$, $\overline{\eta}_v = \operatorname{Spec} \overline{F}_v$ とおく．X_v を η_v 上の滑らかで射影的なスキームとし, d を X_v の次元とする．X_v の $\overline{\eta}_v$ への基底変換 (base change) を $X_{\overline{v}}$ と書き, ℓ を k_v の標数と異なる素数とする．以下 $H^*(X_v, \mathbb{Q}_\ell)$ により X_v の ℓ 進エタールコホモロジーを表すことにする．0 以上の整数 d_1, d_2 を $d_1 + d_2 = d + 1$ となるようにとる．$i = 1, 2$ に対し, 余次元 d_i のサイクル $Z_i \in Z^{d_i}(X_v)$ を取り, Y_i を Z_i の台 (support), $U_i = X_v \setminus Y_i$ とおく．以下, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ とし, Z_i の $H^{2d_i}(X_v, \mathbb{Q}_\ell(d_i))$ での像は 0 と仮定する．$\delta : H^{2d_i-1}(U_i, \mathbb{Q}_\ell(d_i)) \to H^{2d_i}_{Y_i}(X_v, \mathbb{Q}_\ell(d_i))$ を局所化完全系列の境界写像とし, $\alpha_i \in H^{2d_i-1}(U_i, \mathbb{Q}_\ell(d_i))$ を $\delta(\alpha_i) = \widetilde{\mathrm{cl}}(Z_i)$ となるようにとる．但し, $\widetilde{\mathrm{cl}}(Z_i)$ は Z_i の基本類 (fundamental class) を表す．このとき, $\langle Z_1, Z_2 \rangle_v$ を $\alpha_1 \cup \widetilde{\mathrm{cl}}(Z_2)$ の

$$H^{2d+1}_{Y_2}(U_1, \mathbb{Q}_\ell(d+1)) \to H^{2d+1}(X_v, \mathbb{Q}_\ell(d+1)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} H^1(\eta_v, \mathbb{Q}_\ell(1)) = \mathbb{Q}_\ell$$

の下での像とする．この $\langle\ ,\ \rangle_v$ を局所高さペアリングと呼ぶ．上で定義された局所高さペアリング $\langle\ ,\ \rangle_v$ は次のような性質を満たす．$\eta_{v'}/\eta_v$ を n 次拡大, X_v を η_v 上の滑らかで射影的なスキームとし $X_{v'} = X_v \times_{\eta_v} \eta_{v'}$ とおく．さらに $Y_{v'}$ を $\eta_{v'}$ 上の滑らかで射影的なスキームとし, Y_v を $Y_{v'}$ を η_v 上のスキームと思ったものとする．X_v 上のサイクル Z_1, Z_2 は自然な埋め込み $Z^*(X_v) \hookrightarrow Z^*(X_{v'})$ により $Z^*(X_{v'})$ の元とみなすことができる．また, $Y_{v'}$ 上のサイクル W_1, W_2 は自然な同一視 $Z^*(Y_{v'}) = Z^*(Y_v)$ により $Z^*(Y_v)$ の元とみなすことができる．このとき,

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle_v = \frac{1}{n} \langle Z_1, Z_2 \rangle_{v'},\ \langle W_1, W_2 \rangle_{v'} = \langle W_1, W_2 \rangle_v$$

となる．これによって $X_{\overline{\eta}_v}$ 上のサイクルに対して局所高さペアリングが定義できることが分かる．

交叉ペアリングとの比較は次のようになっている．X_{C_v} を X_v の C_v 上の正則 (regular) で射影的なモデルとする．$CH^i(X_{C_v})_0$ を

$$CH^i(X_{C_v})_0 = \operatorname{Ker}\left(CH^i(X_{C_v}) \to H^{2i}(X_{C_v}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \right)$$

によって定める. 先ほどと同様に 0 以上の整数 d_1, d_2 を $d_1 + d_2 = d + 1$ となるようにとる. Z_{i,C_v} を $CH^{d_i}(X_{C_v})$ の元とし, $Z_i = Z_{i,C_v} \cap X_v$ とおく.

命題 2.2 もし, Z_{i,C_v} のどちらかが $CH^{d_i}(X_{C_v})_0$ に入っていれば

$$(Z_{1,C_v}, Z_{2,C_v})_v = \langle Z_1, Z_2 \rangle_v.$$

但し, $(\ ,\ )_v$ は交叉ペアリングを表す.

あとで大域的な高さペアリングを定めるためには次のような予想が必要となる.

予想 2.3 $CH^i(X_v)_0 = \mathrm{Ker}\left(CH^i(X_v) \to H^{2i}(X_v, \mathbb{Q}_\ell(i))\right)$ は

$$CH^i(X_v)'_0 = \mathrm{Ker}\left(CH^i(X_v) \to H^{2i}(X_{\overline{v}}, \mathbb{Q}_\ell(i))\right)$$

に一致する.

予想 2.3 は X_{C_v} が良い還元を持つときや $i = 1$ または $i = d - 1$ のときは成立する.

予想 2.4 $\langle\ ,\ \rangle_v$ は $\mathbb{Q}$ に値をとり, ℓ の取り方に依らない.

これらの予想は自然な写像 $CH^i(X_{C_v}) \to CH^i(X_v)$ が全射であれば正しいことが分かる.

アルキメデス局所体, つまり $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上の局所高さペアリングについては ℓ 進コホモロジーを考える代わりに絶対 Hodge-Deligne コホモロジーを考えることで非アルキメデス局所体のときと全く同様に $\mathbb{R}$ に値をとる局所高さペアリング $\langle\ ,\ \rangle_v$ が定義される (絶対 Hodge-Deligne コホモロジーについては [Bei86] などを参照のこと). アルキメデス局所体の場合は非アルキメデス局所体の場合と違い, 先ほどのような予想 (予想 2.3, 2.4) を仮定する必要がないことを注意しておこう. また Arakelov 交叉ペアリングとの比較も同様に与えられる.

上で述べた局所高さペアリングを用いて大域的な場合に高さペアリングを考えよう. F を代数体とする. v を F の素点として F_v を F の v での完備化とし, q_v をその剰余体の位数とする. F_v^{ur} を F_v の最大不分岐拡大とし, $X_v = X \times_{\mathrm{Spec}\, F} \mathrm{Spec}\, F_v^{ur}$ とおく. さらに

$$r_v = \begin{cases} \log q_v & F_v \text{ が非アルキメデス局所体のとき}, \\ 1 & F_v = \mathbb{R} \text{ のとき}, \\ 2 & F_v = \mathbb{C} \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．X を F 上の滑らかで射影的な代数多様体とし, 各素点 v に対し, X_v は予想 2.3, 2.4 を満たすと仮定する．今までと同様に 0 以上の整数 d_1, d_2 を $d_1+d_2=d+1$ となるように取り, Z_i を X の余次元 d_i のサイクルとして Z_1 と Z_2 の台は交わりを持たないと仮定する．Z_i の $CH^{d_i}(X)$ での像を $[Z_i]$ と書くことにする．このとき

$$\langle Z_1, Z_2\rangle = \sum_{v:F \text{ の素点}} r_v \langle Z_{1,v}, Z_{2,v}\rangle_v \in \mathbb{R}$$

と定める (ほとんど全ての素点 v で $\langle Z_{1,v}, Z_{2,v}\rangle_v = 0$ となる)．移動補題 (moving lemma) を用いることで次のことが分かる．

定理 2.5（Beilinson [Bei87]） F の各素点 v に対し, 予想 2.3, 2.4 を仮定する．このとき, 双線型なペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle_{BB} : CH^i(X)_0 \times CH^{d+1-i}(X)_0 \to \mathbb{R}$$

が唯一つ存在して, 台が交わりを持たないようなサイクル Z_1, Z_2 に対して

$$\langle [Z_1], [Z_2]\rangle_{BB} = \langle Z_1, Z_2\rangle$$

が成り立つ．

注意 2.6 X が F の整数環 $\mathcal{O}_F$ 上の射影的かつ正則なモデル $\mathscr{X}$ を持つとき,

$$CH^i(\mathscr{X})_0 = \mathrm{Ker}\left(CH^i(\mathscr{X}) \to \prod_v H^{2i}(\mathscr{X}_{\mathcal{O}_v}, \mathbb{Q}_\ell(i))\right)$$

とおき, $CH^i(X)_0$ の代わりに

$$CH^i(X)_0' = \mathrm{Im}\left(CH^i(\mathscr{X})_0 \to CH^i(X)\right)$$

を用いると $CH^i(X)_0'$ 上の大域高さペアリングは予想 2.3, 2.4 を仮定することなく定義される．特に各素点で $CH^i(\mathscr{X}_{\mathcal{O}_v})_0 \to CH^i(X_v)_0$ が全射であれば $CH^i(X)_0' = CH^i(X)_0$ となる．

3 数論的 Gan-Gross-Prasad 予想

この節では本稿の主題である数論的 Gan-Gross-Prasad 予想の定式化について紹介する．前半では保型表現の周期と保型 L 関数の中心値を結びつける Gan-Gross-Prasad 予想について説明し, 後半で志村多様体上のサイクルと保型 L 関数の中心微

分値の関係を予想した数論的 Gan-Gross-Prasad 予想について述べる．Gan-Gross-Prasad 予想は局所版と大域版があり, 共に深く関係している．また, 局所 Gan-Gross-Prasad 予想は局所 Langlands 対応を用いて定式化されるため, 準備として局所 Langlands 対応について必要な事実の復習を行い, その後で局所 Gan-Gross-Prasad 予想を述べる．その次に大域版の予想を述べ, 最後に数論的 Gan-Gross-Prasad 予想を定式化するという順番で説明を行う．

3.1 直交群とユニタリ群

Gan-Gross-Prasad 予想は任意の代数体上の古典群またはメタプレクティック群上の保型表現に伴う L 関数の中心値と周期を結びつける予想であるが, ここでは後で必要となる代数体上の直交群またはユニタリ群の場合に限って説明を行う．より一般の場合の予想の定式化に興味のある方は原論文である [GGP12] を参照して頂きたい．

F を標数が 2 とは異なる体とし, E/F を二次拡大[*4]または $E = F$ とする．E が F の二次拡大のとき, σ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元とし ($E = F \times F$ の場合は σ は $\sigma(x, y) = (y, x)$ $(x, y \in F)$ という involution を表すことにする), $E = F$ のときは $\sigma = \mathrm{id}$ とする．V を E 上の有限次元ベクトル空間 ($E = F \times F$ の場合は自由 E 加群) として, $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to E$ を V 上の σ-双線型対称形式とする．つまり $\langle\ ,\ \rangle$ は $\langle \alpha v + \beta w, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle + \beta\langle w, u\rangle$ 及び $\langle u, v\rangle^\sigma = \langle v, u\rangle$ を満たすとする．このとき F 上の代数群 $G(V)$ を

$$G(V) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \,|\, v, w \in V \text{ に対して } \langle gv, gw\rangle = \langle v, w\rangle\}^\circ$$

によって定める．但し $\circ$ は単位元を含む連結成分を表す．$E = F$ のときは $G(V) = \mathrm{SO}(V)$ は特殊直交群となり, $E \neq F$ かつ $E \neq F \times F$ のときは $G(V) = \mathrm{U}(V)$ はユニタリ群となる．また $E = F \times F$ のときは $\langle\ ,\ \rangle$ は $V = V_0 \oplus V_0^*$ (V_0^* は V の双対) という分解を定め, これを用いて $G(V) = \mathrm{GL}(V_0)$ となる．

W を $\langle\ ,\ \rangle$ が非退化な V の部分空間とし, $W^\perp$ は 1 次元であると仮定する[*5]．以下, このような空間の組 (V, W) を固定し $G = G(V) \times G(W)$, $H = G(W)$ とおく．$H = G(W)$ は $G = G(V) \times G(W)$ に対角に埋め込むことで G の部分群とみなすことにする．

[*4] $E = F \times F$ の場合も考える．

[*5] Gan-Gross-Prasad 予想はより一般の余次元の場合も扱っている．

F を標数 0 の局所体とする. $G' = G(V') \times G(W')$ を G の純内部形式 (pure inner form) とする. W' が V' の非退化な部分空間で $(W')^{\perp} \cong W^{\perp}$ ($\langle\ ,\ \rangle$ を保つ同型) となっているとき G' は G の適切 (relevant) な純内部形式であるという. F が非アルキメデス局所体のときは G 以外にちょうど一つ適切な純内部形式が存在する.

3.2 Weil-Deligne 群の表現

ここでは局所 Gan-Gross-Prasad 予想を述べるための準備として Weil-Deligne 群の表現について復習しておく.

E を標数 0 の局所体として, W_E を Weil 群, L_E を Weil-Deligne 群とする (Weil-Deligne 群 L_E は E がアルキメデス局所体のときは $L_E = W_E$, E が非アルキメデス局所体のときは $L_E = W_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ と定義されるのであった).

$$\phi : L_E \to GL(M)$$

を L_E の表現とする (M は有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間). E がアルキメデス局所体のときは ϕ は完全可約な連続準同型とし, E が非アルキメデス局所体のときは次の性質を満たすものを考える:

- ϕ は惰性群 I_E のある開部分群上自明になる.
- $\phi(\mathrm{Frob}_E)$ は半単純.
- $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は代数的.

但し, Frob_E は幾何的 Frobenius 元を表す.

L_E の表現 ϕ の表現空間 M (以下, ϕ と M を同一視する) が非退化な双線型形式 $B : M \times M \to \mathbb{C}$ を持ち,

(1) 全ての $\tau \in L_E$ に対し $B(\tau m, \tau n) = B(m, n)$,
(2) $B(n, m) = B(m, n)$

を満たすとき, M は直交的 (orthogonal) であるという. また, M が非退化な双線型形式 $B : M \times M \to \mathbb{C}$ を持ち,

(1) 全ての $\tau \in L_E$ に対し $B(\tau m, \tau n) = B(m, n)$,
(2) $B(n, m) = -B(m, n)$

を満たすとき, M はシンプレクティック (symplectic) であるという．これらの場合, 双線型形式 B は M と M の双対の間の同型 $f: M \to M^\vee$ を与えることから, M が直交的またはシンプレクティックのとき M は自己双対的 (selfdual) になっている．

次に E は非自明な対合 σ を持つと仮定する．σ による固定体を F とおく．W_F の元で $W_F/W_E = \mathrm{Gal}(E/F)$ での像が生成元になるようなものを一つとり, それを s とおく．L_E の表現 M に対し, M^s を s による共役表現, つまり (E が非アルキメデス局所体のときは) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の作用はそのままで W_E の作用が $\tau_s(m) = s\tau s^{-1}(m)$ ($\tau \in W_E$) で与えられるような表現とする．L_E の表現 M が非退化な双線型形式 $B: M \times M \to \mathbb{C}$ を持ち,

(1) 全ての $\tau \in L_E$ に対し $B(\tau m, s\tau s^{-1}n) = B(m, n)$,
(2) $B(n, m) = B(m, s^2 n)$

を満たすとき, M は共役直交的 (conjugate-orthogonal) であるという．また, M が非退化な双線型形式 $B: M \times M \to \mathbb{C}$ を持ち,

(1) 全ての $\tau \in L_E$ に対し $B(\tau m, s\tau s^{-1}n) = B(m, n)$,
(2) $B(n, m) = -B(m, s^2 n)$

を満たすとき, M は共役シンプレクティック (conjugate-symplectic) であるという．これらの場合, 双線型形式 B は M^s と M の双対の間の同型 $f: M^s \to M^\vee$ を与えることから, M が共役直交的または共役シンプレクティックのとき M は共役自己双対的 (conjugate-selfdual) になっている．

M が自己双対的または共役自己双対的であると仮定する．双線型形式 B を保つような M の自己同型のなす群 $\mathrm{Aut}(M, B) \subset \mathrm{GL}(M)$ の部分群 $C_M = C(M, B)$ を $C_M = \mathrm{Cent}_{\mathrm{Aut}(M,B)}(\mathrm{Im}(\phi))$ ($\mathrm{Im}(\phi)$ の中心化群) によって定義する．このとき C_M は次のような形に書ける:

$$C_M \cong \prod_i \mathrm{O}(V_i) \times \prod_j \mathrm{Sp}(W_j) \times \prod_k \mathrm{GL}(U_k).$$

特に C_M の連結成分のなす群は $A = \pi_0(C_M) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^t$ (t は上の分解に現れる V_i の個数) となる．C_M の半単純な元 a に対して,

$$M^a = \{m \in M \mid am = -m\}$$

とおく．また M が直交的なとき

$$C_M^+ = \mathrm{Cent}_{\mathrm{SO}(M,B)}(\mathrm{Im}(\phi)) = \{a \in C_M \mid \det(a|M) = 1\}$$

とおき, M がシンプレクティックなときは $C_M^+ = C_M$ とおく．

ψ を E 上の非自明な加法的指標 (additive character) とし, E 上の Haar 測度 dx を ψ に関する Fourier 変換が自己双対になるようにとる．W_E の表現 M に対し

$$\epsilon(M,\psi) = \epsilon(M,\psi,dx,1/2)$$

とおく．E が非アルキメデス局所体のとき, 我々の仮定の下で $L_E = W_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現 M は

$$M = \bigoplus_{n \geqq 0} M_n \otimes \mathrm{Sym}^n$$

(各 M_n は W_E の表現, Sym^n は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現とみている) と書くことができるので, このとき M の ϵ 定数を

$$\epsilon(M,\psi) = \prod_{n \geqq 0} \epsilon(M_n,\psi)^{n+1} \det(-\mathrm{Frob}_E | M_n^{I_E})^n$$

によって定める．

M, N を共役自己双対的とし $\psi^\sigma = \psi^{-1}$ となる ψ を固定する．先ほどのように $C_M \subset \mathrm{Aut}(M,B)$ を $\mathrm{Im}(\phi)$ の中心化群とする．このとき C_M の半単純な元 a に対し

$$\chi_N(a) = \epsilon(M^a \otimes N, \psi)$$

とおけば, $\chi_N(a)$ は a の $A_M = \pi_0(C_M)$ での像 (と ψ) のみによって決まり, 指標

$$\chi_N : A_M \to \{\pm 1\}$$

を定める．χ_M も同様に定めることができる．

次に M, N が自己双対的でどちらも偶数次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする．このときは半単純な $a \in C_M^+$ に対し,

$$\chi_N(a) = \epsilon(M^a \otimes N, \psi) \cdot \det(M^a)(-1)^{\dim(N)/2} \cdot \det(N)(-1)^{\dim(M^a)/2}$$

とおく．A_M^+ を C_M^+ の A_M での像とすると, $\chi_N(a)$ は a の A_M^+ での像のみによって決まり, 指標

$$\chi_N : A_M^+ \to \{\pm 1\}$$

を定める．χ_M も同様に定める．この場合は χ_N, χ_M は ψ の取り方に依らずに定まる．

3.3 古典群の局所 Langlands 対応

標数 0 の局所体 F 上の簡約代数群 G に対して Langlands 双対群 ${}^LG$ を ${}^LG = \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$ により定める．但し, $\widehat{G}$ は G の双対群, K は G の準分裂的な内部形式の分裂体 (splitting field) を表す．G が一般線型群, 特殊直交群またはユニタリ群の場合, ${}^LG$ は次のようになる:

- $G = \mathrm{GL}_n$ のときは $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であり, ${}^LG = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ となる．
- $G = \mathrm{SO}(V)$ で $\dim V = 2n+1$ のときは $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ であり, ${}^LG = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ となる．
- $G = \mathrm{SO}(V)$ で $\dim V = 2n$ のときは $\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ であり, V の判別式 $\mathrm{disc}\, V$ が $(F^\times)^2$ の元であれば ${}^LG = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ となり, $\mathrm{disc}\, V$ が $(F^\times)^2$ の元でなければ ${}^LG = \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{C})$ となる．
- $G = \mathrm{U}(V)$ で $\dim V = n$ のときは $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であり ${}^LG = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$ となる．

また, G がこれらの積になっている場合は $\widehat{G}$ は各々の双対群の積によって定義し, ${}^LG$ はその $\widehat{G}$ を用いて ${}^LG = \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$ と定義する．

F を標数 0 の局所体とし F 上の代数群 $G = G(V)$ を考える．G の L パラメータ[*6] $\varphi : L_F \to {}^LG$ に対し, $S_\varphi \subset \widehat{G}$ を $S_\varphi = \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\mathrm{Im}(\varphi))$ と定め, $\mathscr{S}_\varphi = S_\varphi / S_\varphi^\circ$ とおく．ここで S_φ° は S_φ の単位元の連結成分を表す．このとき, 局所 Langlands(-Vogan) 対応によって次のような自然な 1 対 1 の対応が存在すると予想されている[*7]:

$$\coprod_{G' : G \text{ の純内部形式}} \mathrm{Irr}(G') \xleftrightarrow{1:1} \Phi(G).$$

ここで $\mathrm{Irr}(G')$ は G' の既約許容表現の同型類の集合であり, $\Phi(G)$ は G の L パラメータ $\varphi : L_F \to {}^LG$ と $\mathscr{S}$ 群の表現 $\eta : \mathscr{S}_\varphi \to \{\pm 1\}$ の組 (φ, η) の同型類の集合である．L パラメータ φ を一つ固定したとき, 同じ L パラメータ φ を持つ G の純内部形式 G' たちの表現全体を Π_φ と書き, φ の Vogan L パケットと呼ぶ.

ここで考えているような古典群の場合の局所 Langlands 対応のより正確な定式化

[*6] L パラメータについては [伊藤 13, 三枝 20] などを参照のこと

[*7] Vogan による局所 Langlands 対応についても [伊藤 13] などを参照のこと.

や最近の進展については他の記事に譲ることにして, 以下では $G = G(V)$ に対する局所 Langlands 対応を仮定して話を進める.

古典群の局所 Langlands 対応はエンドスコピー指標関係式 (endoscopic character relation) によって特徴付けられ, そのためには移送因子 (transfer factor) の正規化が必要である. 移送因子は Whittaker データと呼ばれるデータを決めることで正規化が定まることが知られている. このあと説明を行う局所 Gan-Gross-Prasad 予想も Whittaker データの選び方に関係していることから, Whittaker データにも少し触れておくことにしよう. G を準分裂的な連結簡約群とし, Z を G の中心とする. B を F 上定義された G の Borel 部分群とし, N を B の冪単根基 (unipotent radical) とする. このときトーラス $T = B/N$ は $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{C}^\times)$ に作用し, 指標 $\theta : N(F) \to \mathbb{C}^\times$ の ($T(F)$ の中での) 固定化群が $Z(F)$ に等しいとき θ は生成的 (generic) であるという. N 上 の生成的指標 θ の $T(F)$-軌道のことを Whittaker データといい, Whittaker データの集合を D と書く. 我々が考えている $G = G(V)$ の場合には, V 上の双線型形式 $\langle , \rangle$ を用いることで D は次のような集合と一対一対応を持つことが知られている.

(1) $G = G(V)$ が一般線型群のとき, D は唯一つの元からなる.
(2) $G = G(V)$ が奇数次の直交群のとき, D は唯一つの元からなる.
(3) $G = G(V)$ が偶数次の直交群のとき, D は非等方的直線 (non-isotropic line) $L \subset V$ で $V^\perp$ が分裂的であるようなものの $\mathrm{SO}(V)$-軌道の集合と一対一対応を持つ.
(4) $G = G(V)$ が奇数次のユニタリ群のとき, D は唯一つの元からなる.
(5) $G = G(V)$ が偶数次のユニタリ群のとき, D は非自明な加法的指標

$$\psi : E/F \to \mathbb{C}^\times$$

の $\mathbb{N}E^\times$-軌道の集合と一対一対応を持つ.

Whittaker データ θ を決めると一対一対応 $J(\theta) : \Pi_\varphi \to \mathrm{Hom}(\mathscr{S}_\varphi, \{\pm 1\})$ が定まる.

$G = G(V)$ の場合には各 L パラメータ φ に対して (E の) Weil-Deligne 群の表現 $\phi : L_E \to \mathrm{GL}(M)$ (と双線型形式 B) を自然に対応させることができる. $G = \mathrm{SO}(V)$ で $\dim V = 2n+1$ のときは M は次元が $2n$ でシンプレクティックになり, $\dim V = 2n$ のときは M の次元は $2n$ で直交的になる. このとき $A_M^+ \cong \mathscr{S}_\varphi$ となる. また, $G = \mathrm{U}(V)$ で $\dim V = 2n+1$ のときは M の次元は $2n+1$ で共役直交的

になり, $\dim V = 2n$ のときは M は次元が $2n$ で共役シンプレクティックになる．このときは $A_M \cong \mathscr{S}_\varphi$ となる．M が直交的で M を既約分解したときの直和成分が全て偶数次元になるような場合[*8]以外のときは ϕ から φ の同型類を復元することもできる．

局所 Gan-Gross-Prasad 予想の状況設定に戻ろう．再び E を標数 0 の局所体とし, V と W を §3.1 のようにとる．はじめに $G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(W)$ の場合を考える．この場合は L パラメータ φ から L_E の表現

$$\phi : L_E \to \mathrm{Sp}(M) \times \mathrm{O}(N)$$

が定まり, M, N の次元はどちらも偶数となる．また, この場合 Whittaker データ θ は偶数次直交空間の非等法的直線 L (で $L^\perp$ が分裂的になるようなもの) の軌道によって決まるのであった．この場合は L を判別式が $\mathrm{SO}(V)$ または $\mathrm{SO}(W)$ のうち奇数次になる方の判別式と等しくなるように選ぶ．このとき $\mathscr{S}$ 群の指標 $\chi : A_M \times A_N^+ \to \{\pm 1\}$ を $\chi = \chi_M \times \chi_N$ によって定める．

次に $G = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W)$ の場合を考える．この場合は L パラメータ φ から L_E の表現

$$\phi : L_E \to \mathrm{GL}(M) \times \mathrm{GL}(N)$$

が定まる．M は偶数次元で共役シンプレクティックであり, N は奇数次元で共役直交的となる．偶数次ユニタリ群の Whittaker データは非自明な加法的指標 $\psi : E/F \to \mathbb{C}^\times$ の軌道と対応するのであった．ψ を一つ固定し, θ_0 を ψ と対応する Whittaker データとする．δ を奇数次ユニタリ群の判別式とするとき, $\theta(x) = \theta_0(-2\delta x)$ とおき, 偶数次ユニタリ群の局所 Langlands 対応の特徴付けに使われる Whittaker データとして θ を用いることにする[*9]．このとき $\mathscr{S}$ 群の指標 $\chi : A_M \times A_N \to \{\pm 1\}$ を $\chi = \chi_M \times \chi_N$ によって定める．但し, χ_M 及び χ_N を定める際に使われる ϵ 因子には上で固定した加法的指標 ψ を用いることにする．

局所 Langlands 対応の下で (φ, χ) に対応する G の純内部形式の表現を $\pi(\varphi, \chi)$ と書くことにする．

[*8] この場合は M に対応する $\mathrm{SO}(V)$ の L パラメータ φ の同型類の可能性は二通りある．

[*9] この場合, θ は加法的指標 $\psi_{-2\delta}(x) = \psi(-2\delta x)$ に対応する Whittaker データとなる．

3.4 局所 Gan-Gross-Prasad 予想

まずは局所版の Gan-Gross-Prasad 予想の定式化から始めよう．F を標数 0 の局所体とし，$G = G(V) \times G(W)$, $H = G(W)$ とする．

予想 3.1（局所 Gan-Gross-Prasad 予想 [GGP12]） G の L パラメータ $\varphi : L_F \to {}^L G$ を一つ固定する．このとき Vogan L パケット Π_φ の元 π に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{H'}(\pi, \mathbb{C}) = \begin{cases} 1 & \pi = \pi(\varphi, \chi) \text{ のとき}, \\ 0 & \pi \neq \pi(\varphi, \chi) \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．但し，π は G の純内部形式 $G' = G(V') \times G(W')$ の既約許容表現として，$H' = G(W')$ とおいた．さらに $\pi(\varphi, \chi)$ は G の適切な純内部形式の表現となる．

注意 3.2 (1) F が非アルキメデス局所体のときは $\chi(-1, 1) = \chi(1, -1)$ の値を用いて $\pi(\varphi, \chi)$ がどの (適切な) 純内部形式の表現になっているかを決定することができる．

(2) 市野-池田 [II10, Conjecture 1.3] によって，さらに π が緩増加な表現のときは $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{H'}(\pi, \mathbb{C}) = 1$ であることと，ある $v \in \pi$ と $v' \in \widetilde{\pi}$ に対して行列係数の H' に沿った積分が 0 にならない，つまり

$$\int_{H'} \langle \pi(h)v, v' \rangle dh \neq 0$$

となることが同値であると予想されている．

冒頭で述べた斎藤 [Sai93] と Tunnell [Tun83] の結果は予想 3.1 の $G = \mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1)$ の場合とみなすことができる．特殊直交群の場合は Waldspurger [Wal12], Mœglin-Waldspurger [MW12] (F が非アルキメデス局所体の場合)，ユニタリ群の場合は Beuzart-Plessis [Beu15] (F がアルキメデス局所体の場合も含む任意の標数 0 の局所体の場合) が予想 3.1 を解決している．本稿では扱っていない場合ではあるが，歪エルミート (skew-hermitian) のときは Gan-市野 [GI16], シンプレクティック-メタプレクティック (symplectic-metaplectic) のときは跡部 [Ato15] による結果も知られている．

3.5 大域 Gan-Gross-Prasad 予想

F を代数体とし, E を F の二次拡大体または $E = F$ とする. $\mathbb{A}$ を F のアデール環とする. $G = G(V) \times G(W)$, $H = G(W)$ とおく. $\pi = \pi_V \otimes \pi_W$ を $G(\mathbb{A})$ の既約で尖点的かつ緩増加な保型表現とする. 局所成分への分解 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ を考える. 局所 Langlands 対応により各 π_v は L パラメータ $\varphi_v : L_{F_v} \to {}^L G_v$ と $\mathscr{S}$ 群の指標 $\eta_v : \mathscr{S}_{\varphi_v} \to \{\pm 1\}$ の組 (φ_v, η_v) に対応するのであった.

予想を述べるために必要な局所 L 因子や局所 ϵ 因子を定義するために, ${}^L G_v$ の有限次元表現 R を次のようにして定める:

- ($G_v = \mathrm{SO}(V_v) \times \mathrm{SO}(W_v)$ で $\dim V_v = 2n+1$ の場合) この場合は ${}^L G_v \subset \mathrm{Sp}(M) \times \mathrm{O}(N)$ となるのであった. ここで M, N は $\dim M = \dim N = 2n$ となる $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間である. このとき, $R = M \otimes N$ とおく.
- ($G_v = \mathrm{SO}(V_v) \times \mathrm{SO}(W_v)$ で $\dim V_v = 2n$ の場合) このときは ${}^L G_v \subset \mathrm{O}(M) \times \mathrm{Sp}(N)$ となるのであった. ここで M, N は $\dim M = 2n$, $\dim N = 2n-2$ となる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である. この場合も $R = M \otimes N$ とおく.
- ($G_v = \mathrm{U}(V_v) \times \mathrm{U}(W_v)$ の場合) このときは ${}^L G_v = (\mathrm{GL}(M) \times \mathrm{GL}(N)) \rtimes \mathrm{Gal}(E_v/F_v)$ であり, $\dim V_v = n$ のとき M, N は $\dim M = n$, $\dim N = n-1$ となる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である. このときは $R = \mathrm{Ind}_{G_v}^{{}^L G_v}(M \otimes N)$ とおく.
- ($G_v = \mathrm{GL}(V_{v,0}) \times \mathrm{GL}(W_{v,0})$ の場合) このときは ${}^L G_v = \mathrm{GL}(M) \times \mathrm{GL}(N)$ であり, $\dim V_{v,0} = n$ のとき M, N は $\dim M = n$, $\dim N = n-1$ となる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である. このときは $R = M \otimes N$ とおく.

上のようにして定めた R を用いて局所 L 因子 $L_v(\pi, R, s) = L(R \circ \varphi_v, s)$ 及び局所 ϵ 因子 $\epsilon_v(\pi, R, \psi, s) = \epsilon(R \circ \varphi_v, \psi_v, s)$ が定まる. これにより π に伴う大域 L 関数を

$$L(\pi, R, s) = \prod_v L_v(\pi, R, s),$$

大域 ϵ 因子を

$$\epsilon(\pi, R, s) = \prod_v \epsilon_v(\pi, R, \psi, s)$$

によって定める.

$\mathscr{A}_0(G)$ を $G(\mathbb{A})$ 上の尖点形式 (cusp form) のなす空間とする. $\mathscr{P}_H : \mathscr{A}_0(G) \to \mathbb{C}$

を

$$\mathscr{P}_H(f) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} f(h)\, dh$$

によって定め, 線型形式 $\ell_H : \mathscr{A}_0(G) \otimes \mathscr{A}_0(G) \to \mathbb{C}$ を $f \otimes f' \mapsto \mathscr{P}_H(f)\overline{\mathscr{P}_H(f')}$ によって定義する．この線型形式と大域 L 関数 $L(\pi, R, s)$ の中心値を結びつけるのが次の大域 Gan-Gross-Prasad 予想である．

予想 3.3（大域 Gan-Gross-Prasad 予想 [GGP12]） $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ を重複度 1 で $\mathscr{A}_0(G)$ に現れる $G(\mathbb{A})$ 上の既約で緩増加な尖点的保型表現とする．ℓ_H の $\pi \otimes \widetilde{\pi}$ への制限を $\ell_{H,\pi}$ と書くことにする．このとき次は同値．

(1) $\ell_{H,\pi} \neq 0$.
(2) 全ての F の素点 v に対して $\mathrm{Hom}_{H(F_v)}(\pi_v, \mathbb{C}) \neq 0$ かつ $L(\pi, R, 1/2) \neq 0$.

注意 3.4 (1) ここで考えている設定の下では全ての F の素点 v に対して $\mathrm{Hom}_{H(F_v)}(\pi_v, \mathbb{C}) \neq 0$ となるという条件は $\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi, \mathbb{C}) \neq 0$ という条件と同値であることが知られている．

(2) G が今回の設定のように特殊直交群またはユニタリ群の場合は市野-池田 [II10] や Neal Harris [Har14] によって, より精密な予想 (市野-池田予想) が定式化されている．$G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(W)$, $H = \mathrm{SO}(W)$ で $\dim V = 3$ または $G = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W)$, $H = \mathrm{U}(W)$ で $\dim V = 2$ の場合は Waldspurger の公式から予想 3.3 及び市野-池田予想が従う．また, $G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(W)$, $H = \mathrm{SO}(W)$ で $\dim V = 4$ のときは市野 [Ich11] の結果より予想 3.3 及び市野-池田予想が従う．G がユニタリ群の場合は Wei Zhang [Zha14b, Zha14a] や Beuzart-Plessis, Liu, Zhang 及び Zhu [BLZZ19] による結果がある．$W \subset V$ の余次元がより一般の場合に対しても Liu [Liu14, Liu16] や Xue [Xue16] らによる結果が知られている．

局所 Gan-Gross-Prasad 予想の仮定の下で予想 3.3 は次のように書き直すことができる．上の状況と同様に, F を代数体とし, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ を F 上のアデール環とする．E を F の二次拡大体または $E = F$ とする．E が F の二次拡大体のとき, σ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元とし, $E = F$ のときは $\sigma = \mathrm{id}$ とする．V_0 を σ-双線型対称形式 $\langle\ ,\ \rangle_0 : V_0 \times V_0 \to E$ を持つ E 上の有限次元ベクトル空間として, W_0 を V_0 の余次元 1 の非退化な部分空間とする．$G_0 = G(V_0) \times G(W_0)$, $H_0 = G(W_0)$ とお

く. $\pi_0 = \bigotimes'_v \pi_{0,v}$ を $G_0(\mathbb{A})$ 上の既約で緩増加な尖点的保型表現とし, $\pi_{0,v}$ に対応する L パラメータを φ_v とする. このとき $\mathscr{S}_{\varphi_v}$ の指標 χ_v を以前のように定義すると, Vogan L パケットの元 $\pi_v(\varphi_v, \chi_v)$ が定まるのであった. ここで $\pi_v(\varphi_v, \chi_v)$ は $G_{0,v}$ の適切な純内部形式 $G_v = G(V_v) \times G(W_v)$ の既約許容表現であり, これを用いて $\mathbb{G} = \prod'_v G_v(F_v)$ の表現 $\pi_\chi = \bigotimes'_v \pi_v(\varphi_v, \chi_v)$ を考えることができる. $\mathbb{G}$ がある E 上の (σ-双線型形式付きの) ベクトル空間 V とその非退化な余次元 1 の部分空間 W によって, $\mathbb{G} = G(\mathbb{A})$ ($G = G(V) \times G(W)$ とおいた) と書けるかどうかということが自然な疑問として考えられるが, 実は (局所 Gan-Gross-Prasad 予想の仮定の下で) これは大域的な ϵ 定数 $\epsilon(\pi_\chi, R, 1/2) = \prod_v \epsilon_v(\pi_\chi, R, 1/2)$ が $+1$ であることと同値であることが分かる. このようなとき $\mathbb{G}$ は整合的 (coherent) な $\mathbb{A}$ 上の代数群であるという.

次に問題となるのが表現 π_χ が $G(\mathbb{A})$ 上の尖点形式の空間 $\mathscr{A}_0(G)$ に現れるかどうかということになるが, これも (Arthur 予想の仮定の下で) ϵ 因子に関する条件で書くことができる. 以上から大域 Gan-Gross-Prasad 予想は次のようにも述べることができる.

予想 3.5（大域 Gan-Gross-Prasad 予想 [GGP12]） $\epsilon(\pi_\chi, R, 1/2) = 1$ と仮定する. このとき次は同値.

(1) π_χ は重複度 1 で $\mathscr{A}_0(G)$ に現れ, $\ell_{H,\pi_\chi} \neq 0$ となる.
(2) $L(\pi_\chi, R, 1/2) \neq 0$.

$\mathbb{G}$ が非整合的 (incoherent) な場合, つまり大域 ϵ 定数が -1 になるときにも同様の予想を定式化することができるであろうか? この疑問に答えるのが次に述べる数論的 Gan-Gross-Prasad 予想である.

3.6 数論的 Gan-Gross-Prasad 予想

以下, F は総実代数体とし, E を F の CM 二次拡大体または $E = F$ とする. π_0 は生成的 (generic) な $G_0(\mathbb{A})$ の (既約で緩増加な) 尖点的保型表現とし, さらに $\varepsilon(\pi_0, R, 1/2) = -1$ と仮定する. この仮定の下では $L(\pi_0, R, s)$ の関数等式の符号は -1 になり, 自動的に $L(\pi_0, R, 1/2) = 0$ となる. このとき $\mathbb{G}(\mathbb{A}) = \prod'_v G_v(F_v)$ ($G_v = G(V_v) \times G(W_v)$ とおいた) 及び $\mathbb{H}(\mathbb{A}) = \prod'_v H_v(F_v)$ ($H_v = G(W_v)$ とおいた) は非整合的な $\mathbb{A}$ 上の代数群である. つまり F 上定義された代数群の基底変換に

はなっていない. $\mathbb{G}(\mathbb{A})$ の既約許容表現 $\pi = \pi_\chi$ について考える.

以下, 次のことを仮定する.

(1) 全ての無限素点 v に対し, G_v はコンパクト.

(2) 全ての無限素点 v に対し, $\pi_{0,v}$ は離散系列表現で π_v は自明表現になる.

大域的な対象との関係を付けるため $\mathbb{G}$ 及び $\mathbb{H}$ を少しだけ変形した代数群を考え, それを用いて志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$ 及び $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ を定義する.

まず始めに特殊直交群の場合を考えよう. $\dim V_0 \geqq 3$ と仮定し, F の実素点 w を一つ固定する. $V_w \supset W_w$ の符号がそれぞれ $(n,0)$, $(n-1,0)$ のとき $V_w^* \supset W_w^*$ を符号が $(n-2,2)$, $(n-3,2)$ の空間とし, $V_w \supset W_w$ の符号がそれぞれ $(0,n)$, $(0,n-1)$ のときは $V_w^* \supset W_w^*$ を符号が $(2,n-2)$, $(2,n-3)$ の空間とする. F 上の空間の組 $V(w) \supset W(w)$ を素点 v での局所化が $V_v \supset W_v$ ($v \neq w$ のとき), $V_w^* \supset W_w^*$ ($v = w$ のとき) となるようにとる (Witt 不変量の計算からこのような大域的な空間が存在することが分かる). このとき $H(w)(\mathbb{A}_f) = \mathbb{H}(\mathbb{A}_f)$, $G(w)(\mathbb{A}_f) = \mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ となっている. これにより F 上の代数群 $H(w) = G(W(w)) \hookrightarrow G(w) = G(V(w)) \times G(W(w))$ が定まり, さらに志村多様体の埋め込み $\mathrm{Sh}_{H(w),\infty} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{G(w),\infty}$ を得る[*10]. このとき各実素点 w に対して $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty} \times_F w(F) \cong \mathrm{Sh}_{H(w),\infty}$ となるという性質で特徴付けられる F 上の志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ が存在することが分かる. 同様に志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$ も定めることができる. このとき $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$ の次元は $2n-5$, $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ の次元は $n-3$ となる. この場合は $m = n-1$ とおく.

次にユニタリ群の場合を考える. $\dim V_0 \geqq 2$ と仮定し, 埋め込み $w : E \hookrightarrow \mathbb{C}$ を一つ固定する. $V_w \supset W_w$ の符号がそれぞれ $(n,0)$, $(n-1,0)$ のとき, $V_w^* \supset W_w^*$ を符号が $(n-1,1)$, $(n-2,1)$ の空間とし, $V_w \supset W_w$ の符号がそれぞれ $(0,n)$, $(0,n-1)$ のときは $V_w^* \supset W_w^*$ を符号が $(1,n-1)$, $(1,n-2)$ の空間とする. E 上の空間の組 $V(w) \supset W(w)$ を各素点での局所化が $V_v \supset W_v$ ($v \neq w$ のとき), $V_w^* \supset W_w^*$ ($v = w$ のとき) となるようにとる. これにより, 特殊直交群の場合と同様に F 上の代数群の組 $H(w) = G(W(w)) \hookrightarrow G(w) = G(V(w)) \times G(W(w))$ が定まり, 志村多様体の埋め込み $\mathrm{Sh}_{H(w),\infty} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{G(w),\infty}$ が得られる[*11]. この場合も全ての埋め込み w に対し

[*10] これらの志村多様体のリフレックス体は $w(F)$ となる

[*11] これらの志村多様体は後の 3.7 節でも説明するようにユニタリ群 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U}(H(w))$ 及び $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{U}(G(w))$ の志村多様体である. これらの志村多様体のリフレックス体は $n > 3$ または $F \neq \mathbb{Q}$ のときは $w(E)$ となる. $n = 2$ で $F = \mathbb{Q}$ のときはリフレックス体は $\mathbb{Q}$ になる.

て $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}\times_E w(E)\cong \mathrm{Sh}_{H(w),\infty}$ となるという性質で特徴付けられる E 上の志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ が存在する．同様に志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$ も定めることができる．このとき $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$ の次元は $2n-3$, $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ の次元は $n-2$ となる．この場合は $m=n$ とおく．

以下, $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$, $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ のトロイダルコンパクト化も再び $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$, $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ と書くことにする．$\pi_\chi=\pi=\pi_f\otimes\pi_\infty$ と書き, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, H^{2m-3}(\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty},\mathbb{C}))\neq 0$ と仮定する．$\mathcal{CH}=\varinjlim_K CH^{m-1}(\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},K})_0\otimes\mathbb{C}$ への $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ の作用を考える．この作用は許容的 (adimissible) になると期待されている*12. 保型表現 π_0 に対する BSD 予想の一般化 (Beilinson-Bloch 予想) は次のように定式化される*13.

予想 3.6

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f,\mathcal{CH})=\mathrm{ord}_{s=1/2}L(\pi_0,R,s).$$

部分志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ は余次元 $m-1$ の $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$ のサイクルを定める．このサイクルの定める $\mathcal{CH}$ の元を $[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]$ と書くことにする．

$$\mathrm{cl}:\mathcal{CH}\to H^{2m-2}(\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty},\mathbb{C})=\varinjlim_{K} H^{2m-2}(\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},K},\mathbb{C})$$

(K は $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)=\prod'_{v\nmid\infty}G_v(F_v)$ の開コンパクト部分群を動く) をサイクル写像とする．$f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{G}(\mathbb{A}))$ に対し, $R(f)$ を f から定まる Hecke 対応とする (以下では $f_\infty=1_{\mathbb{G}(\mathbb{A}_\infty)}$ となるものしか扱わない)．また各無限素点 v に対し, $\mathbb{G}(F_v)=G_v(F_v)$ の Haar 測度を $\mathbb{G}(F_v)$ 全体の測度が 1 になるようにとる．さらに Π を $H^{2m-3}(\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty},\mathbb{C})$ に現れる $\mathbb{G}(\mathbb{A})$ の既約許容表現の全体の集合とする (但し, $\mathbb{G}(\mathbb{A}_\infty)$ は自明に作用しているとする)．$\tau\in\Pi$ とし, $\phi\otimes\widetilde{\phi}\in\tau\otimes\widetilde{\tau}$ (ここで $\widetilde{\tau}$ は τ の反傾表現) の自然な全射

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{G}(\mathbb{A}))\to\bigoplus_{\tau\in\Pi}\mathrm{End}(\tau)\cong\bigoplus_{\tau\in\Pi}\tau\otimes\widetilde{\tau}$$

の下でのリフト $f_{\phi\otimes\widetilde{\phi}}\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{G}(\mathbb{A}))$ を一つ固定する．このとき, 次のような予想が自然に考えられる．

予想 3.7（[Zha12], Conjecture 3.7） (1) サイクル写像 cl は $\mathbb{G}(\mathbb{A})$-同変な分裂を持つ．このことから定まる $\mathbb{G}(\mathbb{A})$-同変な射影 $\mathcal{CH}\to\mathcal{CH}_0=\mathrm{Ker}(\mathrm{cl})$ の下での $[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]$ の像を $[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0$ と書くことにする．

---

*12 これは Chow 群の有限次元性に対応し, 非常に難しい予想であると考えられる．

*13 ここでは L 関数 $L(\pi_0,R,s)$ は関数等式の中心が $\frac{1}{2}$ になるように正規化されており, 予想 2.1 の定式化で使われている L 関数とは関数等式の中心がずれていることに注意する．

(2) $R(f_{\phi\otimes\widetilde{\phi}})[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0$ はリフト $f_{\phi\otimes\widetilde{\phi}}$ の取り方に依らない.

以下, E の各素点 v について $X_v=\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}\times_{\mathrm{Spec}\,E}\mathrm{Spec}\,E_v$ に対する予想 2.3, 2.4 が成立すると仮定する. さらに予想 3.7 の下で Beilinson-Bloch の高さペアリング $\langle\ ,\ \rangle_{BB}$ を用いて $\pi\otimes\widetilde{\pi}$ 上の線型形式 $\ell'_{\mathbb{H},\pi}$ を次のようにして定める. まず $\mathbb{H}(\mathbb{A})$ 上の Haar 測度を固定し, K を $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群とし, $K'=K\cap\mathbb{H}(\mathbb{A}_f)$ とおく. このとき $\phi\otimes\widetilde{\phi}\in\pi\otimes\widetilde{\pi}$ のリフト $f_{\phi\otimes\widetilde{\phi}}\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{G}(\mathbb{A}))$ に対し

$$\langle R(f_{\phi\otimes\widetilde{\phi}})[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0,[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0\rangle_{BB}=\mathrm{Vol}(K')^2\langle R(f_{\phi\otimes\widetilde{\phi}})[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},K'}]_0,[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},K'}]_0\rangle_{BB}$$

とおくと, 十分小さな K に対し右辺は K の取り方に依らないことが分かる. これを用いて $\pi\otimes\widetilde{\pi}$ 上の線型形式 $\ell'_{\mathbb{H},\pi}$ を

$$\ell'_{\mathbb{H},\pi}(\phi\otimes\widetilde{\phi})=\langle R(f_{\phi\otimes\widetilde{\phi}})[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0,[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0\rangle_{BB}$$

によって定める. $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ は $\mathbb{H}(\mathbb{A})$-不変であり, Beilinson-Bloch の高さペアリング $\langle\ ,\ \rangle_{BB}$ は関手的なので $\ell'_{\mathbb{H},\pi}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}(\mathbb{A})\times\mathbb{H}(\mathbb{A})}(\pi\otimes\widetilde{\pi},\mathbb{C})$ となることが分かる. 以上の準備の下で数論的 Gan-Gross-Prasad 予想は次のように述べられる.

予想 3.8（数論的 Gan-Gross-Prasad 予想 [GGP12], [Zha12]） 予想 3.7 を仮定する. このとき次の二つは同値となる.

(1) 表現 π_f は $\mathcal{CH}$ に重複度 1 で現れ, $\ell'_{\mathbb{H},\pi}\neq 0$ となる.
(2) $\mathrm{ord}_{s=1/2}\,L(\pi_0,R,s)=1$.

注意 3.9 (1) この予想についても大域 Gan-Gross-Prasad 予想の場合と類似の精密化ができる ([Xue19]).
(2) 予想 3.7 のような技術的な仮定をしない定式化も与えられている ([RSZ17])[*14].
(3) Yifeng Liu [Liu18] により, サイズが同じユニタリ群の場合に対しても数論的 Gan-Gross-Prasad 予想が定式化されている.

G_0 が $\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(1)$ の場合が Gross-Zagier 公式 (の志村曲線に対する類似) にあたる[*15]. 数論的 Gan-Gross-Prasad 予想と Gross-Zagier 公式は少し見た目が違うので, 説明を加えておこう. G_0 がユニタリ群で $n=2$ のとき $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$ の次元は

[*14] 後でこの定式化について説明する.
[*15] もちろんユニタリ群と一般線型群なので違う群であるが, 非常に近いケースと考えることができる.

1 であり, $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ の次元は 0 である. よって, この場合の志村多様体の埋め込み $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty}$ は志村曲線 (のいくつかの disjoint union) の上の CM 点の集合を考えることと同じである. これは GL(2) の場合にモジュラー曲線の上の Heegner 点 (CM 点) を考えることに相当する. また, $\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1)$ 上の保型表現 π に対し, 線型形式 $\ell'_{\mathbb{H},\pi}$ は CM 点の π_f 等型成分の高さペアリング (この場合は Néron-Tate 高さペアリングに等しい) から決まるものなので, モジュラー曲線の場合の Heegner 点 (の $f \otimes g_\chi$ 等型成分) の Néron-Tate 高さペアリングの類似になっている.

G_0 が $\mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(3)$ の場合*16についての Yuan-Zhang-Zhang による結果を次の章で紹介する. また, Xue [Xue19] は数論的テータリフトと呼ばれるものを用いて, G_0 が $\mathrm{U}(3) \times \mathrm{U}(2)$ の特殊な場合*17の数論的 Gan-Gross-Prasad 予想を示している. G_0 がより一般のユニタリ群の場合は Wei Zhang [Zha12] による数論的基本補題と相対跡公式を用いたアプローチがあり, これについては 5 節と 6 節で詳しく述べる.

3.7 Rapoport-Smithling-Zhang による数論的 Gan-Gross-Prasad 予想の定式化

ここではユニタリ群の場合のみ考える. E を CM 体とし, F を E に含まれる最大の総実代数体とする. $E = F(\sqrt{\Delta})$ となる総虚な元 $\Delta \in F$ を固定し, Φ を $\sqrt{\Delta}$ から定まる CM タイプとする (つまり, $\Phi = \{\varphi : E \to \mathbb{C} \mid \varphi(\sqrt{\Delta}) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot \sqrt{-1}\}$ とおく). σ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元とし, V を E 上の n 次元ベクトル空間, $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to E$ を V 上の σ-双線型対称形式とする. また W を $\langle\ ,\ \rangle$ が非退化な V の部分空間とし, $W^\perp$ は 1 次元とする. $W^\perp$ の生成元 u を固定し, 全ての $\varphi \in \Phi$ に対し $\varphi(\langle u, u\rangle) < 0$ と仮定する. $w \in \Phi$ を一つ固定し, V_w の符号は $(1, n-1)$, それ以外の $\varphi \in \Phi$ に対しては V_φ の符号は $(0, n)$ とする. さらに, W_w の符号は $(1, n-2)$ とし, それ以外の $\varphi \in \Phi$ に対しては W_φ の符号は $(0, n-1)$ と仮定する. このとき $G' = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{U}(V)$ とおき, $h_{G'} : \mathbb{C}^\times \to G'(\mathbb{R}) = \prod_{\varphi\in\Phi} \mathrm{U}(V_\varphi)(\mathbb{R})$ を $\varphi = w$ 成分に対しては $z \mapsto \mathrm{diag}(z/\overline{z}, 1, \ldots, 1)$, それ以外の φ に対しては $z \mapsto \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$ によって定める. $h_{G'}$ の共役類を $\{h_{G'}\}$ と書くことにすると $(G', \{h_{G'}\})$ は志村データになる. 同様に $H = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{U}(W)$ に対して, $\{h_H\}$ を定める. さらに $G = G' \times H$

*16 実際は志村多様体として志村曲線の 3 つの直積を考える. この場合は Gross-Kudla による予想であった.

*17 U(3) 及び U(2) の保型表現がどちらも準分裂な $U(2)$ からのテータリフトとして得られる場合.

とおき, $\{h_G\} = \{(h_{G'}, h_H)\}$ と定める. このとき志村多様体 $\mathrm{Sh}(G, \{h_G\})$ は 3.6 節で扱った $\mathrm{Sh}_{G(w),\infty}$ に一致する.

残念ながら, これらの志村多様体は PEL 型ではないので整モデルなどを考える際に技術的な困難が生じる. そこで Rapoport-Smithling-Zhang [RSZ17] ではより扱いやすい PEL 型の志村多様体を導入し, 数論的 Gan-Gross-Prasad 予想の variant を与えた. 彼らの定式化では予想 3.7 を仮定せずに予想が定式化できるなど技術的に様々な利点がある. 以下では, この志村多様体について説明する.

以下, 一般ユニタリ群 $\mathrm{GU}(V)$, $\mathrm{GU}(W)$ の similitude 指標を c と書くことにする. このとき,

$$\begin{aligned} Z^{\mathbb{Q}} &= \left\{ z \in \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \,\middle|\, \mathrm{N}_{E/F}(z) \in \mathbb{G}_m \right\}, \\ G'^{\mathbb{Q}} &= \left\{ g \in \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathrm{GU}(V) \,\middle|\, c(g) \in \mathbb{G}_m \right\}, \\ \widetilde{G'} &= Z^{\mathbb{Q}} \times_{\mathbb{G}_m} G'^{\mathbb{Q}} = \left\{ (z, g) \in Z^{\mathbb{Q}} \times G'^{\mathbb{Q}} \,\middle|\, \mathrm{N}_{E/F}(z) = c(g) \right\} \end{aligned}$$

($H^{\mathbb{Q}}$, $\widetilde{H}$ も同様に定める) と定義し,

$$\widetilde{G} = \widetilde{H} \times_{Z^{\mathbb{Q}}} \widetilde{G'} = \left\{ (z, g) \in Z^{\mathbb{Q}} \times H^{\mathbb{Q}} \times G'^{\mathbb{Q}} \,\middle|\, \mathrm{N}_{E/F}(z) = c(h) = c(g) \right\}$$

とおく. このとき, $\widetilde{G'} \to Z^{\mathbb{Q}} \times G'$ を $(z, g) \mapsto (z, z^{-1}g)$ によって定めると同型を与える ($h_{\widetilde{H}}$ も同様). また, $\widetilde{G} \to Z^{\mathbb{Q}} \times H \times G'$ を $(z, g) \mapsto (z, z^{-1}h, z^{-1}g)$ によって定めるとこれも同型を与える. 次に,

$$h_{Z^{\mathbb{Q}}} : \mathbb{C}^\times \to Z^{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \cong \left\{ (z_\varphi) \in (\mathbb{C}^\times)^\Phi \,\middle|\, \text{全ての } \varphi, \varphi' \in \Phi \text{ に対し } |z_\varphi| = |z_{\varphi'}| \right\}$$

を複素共役と対角埋め込みの合成 $z \mapsto \mathrm{diag}(\overline{z}, \ldots, \overline{z})$ によって定めることにする. また,

$$h_{G'^{\mathbb{Q}}} : \mathbb{C}^\times \to G'^{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \subset \prod_{\varphi \in \Phi} \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V_\varphi)$$

を $\varphi = w$ 成分に対しては $z \mapsto \mathrm{diag}(z, \ldots, z, \overline{z})$ により定め, それ以外の φ 成分に対しては $z \mapsto \mathrm{diag}(z, \ldots, z)$ とおくことで定める ($h_{H^{\mathbb{Q}}}$ も同様). このとき, $h_{\widetilde{G'}} : \mathbb{C}^\times \to \widetilde{G'}(\mathbb{R})$ を $h_{\widetilde{G'}} = (h_{Z^{\mathbb{Q}}}, h_{G'^{\mathbb{Q}}})$ によって定め ($h_{\widetilde{H}}$ も同様), さらに, $h_{\widetilde{G}} : \mathbb{C}^\times \to \widetilde{G}(\mathbb{R})$ を $h_{\widetilde{G}} = (h_{Z^{\mathbb{Q}}}, h_{H^{\mathbb{Q}}}, h_{G'^{\mathbb{Q}}})$ と定義する. いま $E_{\Phi,w} \subset \mathbb{C}$ を $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E_{\Phi,w}) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \,|\, \sigma \circ \Phi = \Phi, \sigma \circ w = w\}$ によって定まる体とすると, 志村多様体 $\mathrm{Sh}(\widetilde{G'}, h_{\widetilde{G'}})$, $\mathrm{Sh}(\widetilde{H}, h_{\widetilde{H}})$, $\mathrm{Sh}(\widetilde{G}, h_{\widetilde{G}})$ のリフレックス体は全て $E_{\Phi,w}$ と

なる[*18]. また, 埋め込み $\widetilde{H} \hookrightarrow \widetilde{G'}$ を $(z,h) \mapsto (z, \mathrm{diag}(h,z))$, 埋め込み $\widetilde{H} \hookrightarrow \widetilde{G}$ を $(z,h) \mapsto (z,h,\mathrm{diag}(h,z))$ によって定めると, これらは志村多様体の埋め込み $\mathrm{Sh}(\widetilde{H}, h_{\widetilde{H}}) \hookrightarrow \mathrm{Sh}(\widetilde{G'}, h_{\widetilde{G'}})$, $\mathrm{Sh}(\widetilde{H}, h_{\widetilde{H}}) \hookrightarrow \mathrm{Sh}(\widetilde{G}, h_{\widetilde{G}})$ を誘導する. これらの志村多様体は PEL 型であり, モジュライ解釈が存在する. 上で説明した志村多様体の埋め込みもモジュライ解釈を用いて記述することができる (詳しくは [RSZ17] を参照).

K を $\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群とし, $\mathcal{H}_K = \mathcal{H}(K\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)/K, \mathbb{Q})$ を $\mathbb{Q}$ に値をとる両側 K 不変なコンパクト台を持つ $\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)$ 上の滑らかな関数のなす Hecke 環とする. このとき Morel-Suh により, 次のような結果が知られている.

定理 3.10 ([MS19, RSZ17]) $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を固定する. このとき, ある $f^{\varepsilon} \in \mathcal{H}(K\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)/K, \mathbb{Q})$ が存在して, f^{ε} から定まる Hecke 対応は全ての次数についてのコホモロジーの直和を奇数次部分または偶数次部分に分ける射影子

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(\mathrm{Sh}_K(\widetilde{G}, h_{\widetilde{G}}), \mathbb{Q}) \to \bigoplus_{i\equiv\varepsilon \bmod 2} H^i(\mathrm{Sh}_K(\widetilde{G}, h_{\widetilde{G}}), \mathbb{Q})$$

を誘導する.

この結果を用いることで, 予想 3.7 のようなことを仮定せずに数論的 Gan-Gross-Prasad 予想の定式化を行うことができる. 以下 $f^+ = f^0$, $f^- = f^1$ とおく. $M_K(\widetilde{G})$ を $\mathrm{Sh}_K(\widetilde{G}, h_{\widetilde{G}})$ の正準モデルとする. $K_{\widetilde{H}}$ を $\widetilde{H}(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群で $K \cap \widetilde{H}(\mathbb{A}_f)$ に含まれるようなものとすると, 有限な不分岐射 $M_{K_{\widetilde{H}}}(\widetilde{H}) \to M_K(\widetilde{G})$ が定まり, これにより Chow 群の元 $[M_{K_{\widetilde{H}}}(\widetilde{H})] \in CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))$ が定まる. $\widetilde{H}(\mathbb{A}_f)$ 上の Haar 測度を $\mathrm{vol}(K_{\widetilde{H}}) \in \mathbb{Q}$ となるように取り, $z_K = \mathrm{vol}(K_{\widetilde{H}})[M_{K_{\widetilde{H}}}(\widetilde{H})] \in CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{Q}}$ とすると z_K は $K_{\widetilde{H}}$ の取り方に依らずに定まることが分かる.

サイクル写像 $\mathrm{cl} : CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{Q}} \to H^{2n-2}(\mathrm{Sh}_K(\widetilde{G}, h_{\widetilde{G}}), \mathbb{Q})$ を考えたとき, $\mathrm{Im}(\mathrm{cl})$ の任意の元は f^- から定まる Hecke 対応 ($R(f^-)$ と書くことにする) によって零化される. よって $z_{K,0} = R(f^-)z_K$ は $\mathrm{Ker}(\mathrm{cl}) = CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{Q},0}$ に入ることが分かる. $\mathcal{Z}_{K,0}$ を $z_{K,0}$ によって生成される $CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{Q},0}$ の部分 Hecke 加群とする. π を $\widetilde{G}(\mathbb{A})$ の既約で緩増加な尖点的保型表現とし, 上で説明した同型 $\widetilde{G} \cong Z^{\mathbb{Q}} \times H \times G'$ の下で π を $Z^{\mathbb{Q}}(\mathbb{A})$ に制限したものが自明になっているようなも

[*18] E が F と虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ の合成であって Φ が w を含むような $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ の CM タイプから誘導される唯一の CM タイプの場合, w によって E と $E_{\Phi,w}$ は同一視できる. しかし, 一般の場合はリフレックス体 $E_{\Phi,w}$ は E よりも真に大きくなる.

のとする[*19]. また, 前と同様に $\pi=\pi_f\otimes\pi_\infty$ と書いたとき, π_f は $\widetilde{G}(\mathbb{A}_f)$ の既約許容表現として, $H^i(\mathrm{Sh}(\widetilde{G},h_{\widetilde{G}}),\mathbb{C})$ に現れると仮定する.

予想 3.11（[RSZ17]） π は上の通りとする. このとき以下の条件は同値になる.

(1) $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}(\pi_f^K,\mathcal{Z}_{K,0})=1$.

(2) $\mathrm{ord}_{s=1/2}L(\pi,R,s)=1$ が成り立ち, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{H}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f,\mathbb{C})$ は 1 次元で, この空間の生成元を π_f^K に制限しても 0 にならない.

もし $E_{\Phi,w}=E$ ならば, これらの条件は次とも同値になる.

(3) $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}(\pi_f^K,CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{C},0})=1$ が成り立ち, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{H}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f,\mathbb{C})$ は 1 次元で, この空間の生成元を π_f^K に制限しても 0 にならない.

注意 3.12 $E_{\Phi,w}=E$ のときの (2) と (3) の同値性は Beilinson-Bloch 予想の特殊な場合に他ならない. また, $E_{\Phi,w}\neq E$ なら $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}(\pi_f^K,CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{C},0})=1$ となることは一般には期待できない. 例えば, (ユニタリ群ではないが) $G'=\mathrm{GL}(2)$, $H=\mathrm{GL}(1)$ で $F=\mathbb{Q}$ とし, 有理数体上の楕円曲線 A から定まる保型形式で生成される保型表現を虚二次体 E 上へ基底変換したものを $\pi_{G'}$ と書くことにする. さらに π_H を自明表現とし, $\pi=\pi_{G'}\otimes\pi_H$ とおき, K を $\dim_{\mathbb{C}}\pi_f^K=1$ となるようにとると $M=\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}(\pi_f^K,CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{C},0})$ は $A(E_{\Phi,w})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ と同型になる. 但し, $A(E_{\Phi,w})$ は A の $E_{\Phi,w}$ 上の Mordell-Weil 群を表す. もし $E_{\Phi,w}=E$ ならば $A(E_{\Phi,w})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ は Gross-Zagier 公式と Kolyvagin の結果から Heegner 点で生成されることが知られているので, $\dim_{\mathbb{C}}M=1$ となるが, $E_{\Phi,w}\neq E$ の場合は一般には $A(E_{\Phi,w})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ の次元は $A(E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ の次元よりも大きくなってしまうので, 必ずしも $\dim_{\mathbb{C}}M=1$ であるとは期待できない.

前と同様に Beilinson-Bloch の高さペアリングを用いた定式化も以下のように与えることができる[*20]. まず, 線型汎関数 $\ell_K:CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{C},0}\to\mathbb{C}$ を $z\mapsto\langle z,z_{K,0}\rangle_{BB}$ により定める. さらに $\mathcal{Z}_{K,0}[\pi_f^K]$ を $\mathcal{H}_K$ 加群としての $\mathcal{Z}_{K,0}$ の π_f^K 等型成分, つまり自然な写像 $\pi_f^K\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}(\pi_f^K,\mathcal{Z}_{K,0})\to\mathcal{Z}_{K,0}$ の像とする. $CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{C},0}[\pi_f^K]$ も同様に定義する.

[*19] このとき π は $G(\mathbb{A})=H(\mathbb{A})\times G'(\mathbb{A})$ の保型表現とみることができる.

[*20] ここでも予想 2.3, 2.4 は仮定する.

予想 3.13（[RSZ17]） π は先の通りとする．このとき以下の条件は同値になる．

(1) $\ell_K|_{\mathcal{Z}_{K,0}[\pi_f^K]} \neq 0$.
(2) $\ell_K|_{CH^{n-1}(M_K(\widetilde{G}))_{\mathbb{C},0}[\pi_f^K]} \neq 0$.
(3) $\mathrm{ord}_{s=1/2} L(\pi, R, s) = 1$ が成り立ち, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{H}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, \mathbb{C})$ は 1 次元で, この空間の生成元を π_f^K に制限しても 0 にならない．

注意 3.14 Beilinson-Bloch の高さペアリング $\langle\ ,\ \rangle_{BB}$ が $\mathcal{Z}_{K,0}$ 上で非退化であるという仮定の下では予想 3.11 の条件 (1) から予想 3.13 の条件 (1) が従う．逆に予想 3.13 の条件 (1) からは (予想 3.11 の条件 (1) より弱いが) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_K}(\pi_f^K, \mathcal{Z}_{K,0}) \neq 0$ が従う．

4 $G = \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(3) \supset H = \mathrm{SO}(3)$ の場合

F を総実代数体とし, $\mathbb{A}$ を F 上のアデール環とする．S を F の素点の有限集合で全ての無限素点を含んでいるようなものとし, $\#S$ は奇数であると仮定する．$\mathbb{B}$ を S に含まれる素点で分岐し, それ以外の素点では不分岐な $\mathbb{A}$ 上の非整合的な四元数環とし, $\mathbb{G} = \mathbb{B}^\times \times \mathbb{B}^\times \times \mathbb{B}^\times$, $\mathbb{H} = \mathbb{B}^\times$ とおく．$K \subset \mathbb{H}(\mathbb{A}_f)$ を開コンパクト部分群とする．このとき K に対応する志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},K}$ (この場合は志村曲線になる) 及び $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},K\times K\times K}$ (この場合は志村曲線の 3 つの直積になる) が定まる．$i = 1, 2, 3$ に対し $\pi_i = \bigotimes'_v \pi_{i,v}$ を中心指標 ω_i を持つ $H(\mathbb{A})$ の既約許容表現で $\pi_{0,i} = \bigotimes'_v \mathrm{JL}_v(\pi_{i,v})$ (ここで JL_v は v での局所 Jacquet-Langlands 対応) が全ての無限素点で重さ 2 の離散系列になっているような $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約で緩増加な尖点的保型表現となり, さらに $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}(\mathbb{A}_f)}(\pi_{i,f}, H^1(\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},K}, \mathbb{C})) \neq 0$ となるようなものとする．$\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ 及び $\pi_0 = \pi_{0,1} \otimes \pi_{0,2} \otimes \pi_{0,3}$ とおき, $\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 = 1$ と仮定する．π_0 は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型表現となる．$L(\pi_0, s)$ を π_0 から定まる三重積 L 関数 (triple product L-function) とする．このとき Prasad [Pra90] と Loke [Lok01] の結果により $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\pi, \mathbb{C}) = 1$ であることと

$$S = \{v : F \text{ の素点} \mid \epsilon(\pi_v, 1/2) = -1\}$$

となることが同値となることが知られている．以下, この条件を仮定する[*21].

[*21] $\#S$ は奇数であったので, この条件から自動的に $\epsilon(\pi, 1/2) = -1$ となる．

Gross-Schoen [GS95] は対角サイクル $\Delta = \mathrm{Im}(\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},K} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathbb{G},K\times K\times K})$ を少し変形した代数的サイクル Δ_0 を構成し, この Δ_0 が $CH^2(\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},\infty})_0$ の元を定め, さらにこの場合は (適当な条件を満たす) 代数対応 τ, τ' に対して $\langle \tau_* \Delta_0, \tau'_* \Delta_0 \rangle_{BB}$ が unconditional に定義できることを示した. これを用いて $\pi \otimes \widetilde{\pi}$ 上の線型形式 $\ell'_{H,\pi}$ を

$$\ell'_{\mathbb{H},\pi}(\phi \otimes \widetilde{\phi}) = \langle R(f_{\phi\otimes\widetilde{\phi}})\Delta_0, \Delta_0 \rangle_{BB}$$

によって定める. この場合は予想 3.7 に対して次のような Yuan-Zhang-Zhang による結果が知られている.

定理 4.1 ([YZZ12]) S は少なくとも 2 つの有限素点を含み, π は S の外では不分岐であると仮定する. このとき次の二つは同値.

(1) $\ell'_{\mathbb{H},\pi} \neq 0$.
(2) $L'(\pi_0, 1/2) \neq 0$.

注意 4.2 Yuan-Zhang-Zhang [YZZ12] は実際には精密化された数論的 Gan-Gross-Prasad 予想 (市野-池田 [II10] による Gross-Prasad 予想の精密化の数論版) を証明している.

証明は GL(2) の場合の Gross-Zagier 公式の証明 [YZZ13] と同様に両辺を独立に計算して一致を示すのが基本的な方針である. 簡単に証明の方針を述べておこう. Garrett, Piatetski-Shapiro–Rallis による三重積 L 関数の積分表示を用いることにより, L 関数の中心点での微分は Siegel-Eisenstein 級数の $s = 0$ での微分 $E'(g, 0, \Phi)$ (Φ は $\mathbb{G}(\mathbb{A})$ 上の Schwartz 関数) と $\varphi \in \pi_0$ の内積で書くことができる. ここで現れる Siegel-Eisenstein 級数の微分 $E'(g, 0, \Phi)$ は解析的核関数と呼ばれる. 一方で変形した対角サイクル Δ_0 の高さに関する母関数 $Z(g, \Phi, \Delta_0) = \langle \Delta_0, Z(g, \Phi)\Delta_0 \rangle_{BB}$ が定義され, これは幾何的核関数と呼ばれる. ここで $Z(g, \Phi)$ は Hecke 対応についての母関数であり, $Z(g, \Phi, \Delta_0)$ も $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型関数になることが分かる. Yuan-Zhang-Zhang [YZZ12] の主定理は解析的核関数と幾何的核関数の比較 (数論的 Siegel-Weil 公式の弱い形)

$$(-E'(\,\cdot\,, 0, \Phi), \varphi) = (Z(\,\cdot\,, \Phi, \Delta_0), \varphi)$$

から従う. この幾何的核関数はそのままでは扱いが難しいので, もう少し扱いやすい幾何的核関数 $Z(g, \Phi, \Delta)$ と置き換えてもよいことをまず示す.

これらの核関数はそれぞれ局所成分 $E'_v(g,0,\Phi)$, $Z(g,\phi,\Delta)_v$ に分解することができる．まず, $v \notin S$ のときは考えている志村多様体が良い還元を持つことが分かり, この場合は Gross-Keating の結果を用いることで $E'_v(g,0,\Phi)$ と $Z(g,\Phi,\Delta)_v$ の比較を行うことができる．v が無限素点のときは志村多様体の複素一意化を用いて Green 関数を構成し, $Z(g,\Phi,\Delta)_v = -2E'_v(g,0,\Phi)_{hol}$ を直接示すことができる ($E'_v(g,0,\Phi)_{hol}$ は $E'_v(g,0,\Phi)$ の正則保型形式の空間への射影を表す)．さらに残りの有限素点 $v \in S$ に対しては Cerednik-Drinfeld の v 進一意化を用いることで $(Z(g,\Phi,\Delta)_v, \varphi_v) = 0$ が示せ, 解析的核関数の方でも $E'_v(g,0,\Phi) = 0$ がいえるので, これらの結果を合わせることで核関数の比較が導かれ, 主定理が証明される．

この議論ではテータ対応を用いて示される L 関数の積分表示がもとになっており, この証明法を一般の場合に拡張するのは難しいと考えられる．そこで, Wei Zhang によって提唱されたのが数論的基本補題*22と相対跡公式を用いた手法である*23．高次元の場合の数論的 Gan-Gross-Prasad 予想自体は, $\mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(3)$ の場合や $\mathrm{U}(3) \times \mathrm{U}(2)$ の特別な場合以外には証明されていないが, 数論的基本補題に関して近年様々な進展がある．以下の章では数論的基本補題を用いた数論的 Gan-Gross-Prasad 予想へのアプローチについて紹介する．

5 数論的基本補題

ここでは Wei Zhang による数論的基本補題の予想について述べる．数論的基本補題は軌道積分の微分値 $O'(\gamma, 1_{K_S}, 0)$ と Rapoport-Zink 空間の数論的交叉数の関係についての予想である．そのため, はじめに軌道積分の移送に関する Jacquet-Rallis の基本補題と Rapoport-Zink 空間について簡単に復習する．

5.1 記号と準備

F を体とし, E/F を分離二次拡大とする．σ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元とする．$\mathrm{GL}_{n-1}(E) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(E)$ を $g \mapsto \mathrm{diag}(g,1)$ により定める．$\mathrm{GL}_n(E)$ の元 $g = \begin{pmatrix} A & u \\ v & d \end{pmatrix}$ に対し, $A^i u$ $(i = 0,\ldots,n-2)$ が線型独立で, さらに vA^i $(i = 0,\ldots,n-2)$ も

*22 "補題" と名前がついているがこれは一般にはまだ予想である．しかし, 最近 Wei Zhang [Zha19] により大きな進展があった．

*23 後で述べるように Wei Zhang はユニタリ群の場合を扱っている．

線型独立になっているとき g は正則半単純 (regular semisimple) であるという．g が正則半単純であることと g の $\mathrm{GL}_{n-1}(E)$ の作用の下での固定化群が自明で g の $\mathrm{GL}_{n-1}(\overline{E})$-軌道が $\mathrm{GL}_n(\overline{E})$ の中で Zariski 閉部分集合になることは同値である．$H(F)$ を $\mathrm{GL}_n(E)$ の中の $\mathrm{GL}_{n-1}(F)$ の像とする．$g \mapsto \overline{g}$ を σ により引き起こされる対合 (involution) とし,

$$S_n(F) = \{s \in \mathrm{GL}_n(E) \mid s\overline{s} = 1\}$$

とおく．$H(F)$ の $S_n(F)$ への作用を $h \circ s = hsh^{-1}$ $(h \in H(F))$ によって定める．$S_n(F)$ への $H(F)$ の作用による軌道の空間を

$$\mathbb{O}(S_n) = H(F) \mathbin{\backslash\!\backslash} S_n(F)$$

と書く[*24]．また $\mathrm{Herm}_n(E)$ をサイズが $n \times n$ の Hermite 行列のなす空間とする．非退化な $J \in \mathrm{Herm}_n(E)$ に対し

$$U(J) = \{g \in \mathrm{GL}_n(E) \mid gJg^* = J\}$$

とおく．ここで $g^* = {}^t\overline{g}$ とおいた．$U(J)$ は $U(J \oplus 1)$ の部分群と見ることができるので, $U(J)$ を $U(J \oplus 1)$ へ共役で作用させ, その軌道全体の空間を

$$\mathbb{O}(U(J \oplus 1)) = U(J)(F) \mathbin{\backslash\!\backslash} U(J \oplus 1)(F)$$

と書くことにする．$J_1, J_2 \in \mathrm{Herm}_{n-1}(E)$ に対し, ある $h \in \mathrm{GL}_{n-1}(E)$ があって $J_1 = hJ_2h^*$ となるとき J_1 と J_2 は同値であるという．J_1 と J_2 が同値なとき, $\mathbb{O}(U(J_1 \oplus 1))$ と $\mathbb{O}(U(J_2 \oplus 1))$ は $g \mapsto hgh^*$ によって自然に同一視できる．$S_n(F)$, $U(J \oplus 1)$ は $\mathrm{GL}_n(E)$ の部分集合なので元の正則半単純性について考えることができる．$H(F)$, $U(J)$ は $\mathrm{GL}_{n-1}(E)$ の部分集合なので, さらに $S_n(F)$ の元の $H(F)$-軌道や $U(J \oplus 1)$ の元の $U(J)$-軌道の正則半単純性について考えることができる．$\gamma \in \mathbb{O}(S_n)$, $\delta \in \mathbb{O}(U(J \oplus 1))$ に対し, ある $h \in \mathrm{GL}_{n-1}(E)$ があって $\delta = h\gamma h^{-1}$ となるとき $\gamma \leftrightarrow \delta$ と書いて, γ と δ はそれぞれ互いの移送 (transfer) であるという．軌道の移送は正則半単純な軌道の間の 1 対 1 対応

$$\coprod_J \mathbb{O}(U(J \oplus 1))_{\mathrm{rs}} \cong \mathbb{O}(S_n)_{\mathrm{rs}}$$

を定める．ここで J は全ての非退化な $\mathrm{Herm}_{n-1}(E)$ の元の同値類を動き, 添字の rs は正則半単純な元のなす部分集合を表す.

[*24] 以下, 共役による群への作用の商を $\mathbin{\backslash\!\backslash}$ という記号を用いて表すことにする.

5.2 Jacquet-Rallis の基本補題

F を局所体とし, F が非アルキメデス局所体のとき $\mathcal{O}_F$ を整数環, ϖ を F の一意化元, q を F の剰余体 κ の位数とする．先ほどと同様 E/F を分離二次拡大とする．$f \in \mathcal{C}_c^\infty(S_n(F))$ と正則半単純な $\gamma \in S_n(F)$ に対し, 軌道積分

$$O(\gamma, f, s) = \int_{H(F)} f(h\gamma h^{-1})|\det(h)|^{-s}\eta(\det(h))dh$$

を考える．ここで η は E/F に対応する二次指標とし, F が非アルキメデス局所体のときは $H(F)$ 上の Haar 測度を $\mathrm{Vol}(\mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F)) = 1$ となるように正規化する．γ が正則半単純であることから γ の $H(F)$-軌道は $S_n(F)$ の閉部分集合になることが分かるので f を γ の $H(F)$-軌道に制限したものも滑らかでコンパクトな台を持つ．よって F が非アルキメデス局所体のときはこの軌道積分は有限和であり, q^s と q^{-s} の多項式になる．また, F がアルキメデス局所体のときはこの積分は絶対収束することも分かる．同様に $f \in \mathcal{C}_c^\infty(U(J \oplus 1))$ と正則半単純な $\delta \in U(J \oplus 1)$ に対して,

$$O(\delta, f) = \int_{U(J)} f(h^{-1}\delta h)dh$$

とおく．以下, F は非アルキメデス的局所体とし, 剰余体の標数は 2 と異なると仮定する．また, E/F を不分岐二次拡大とする．$K = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_E)$, $K_S = K \cap S_n(F)$ とおき, 1_{K_S} によって K_S の特性関数を表す．F は非アルキメデス的なので $\mathrm{Herm}_{n-1}(E)$ の $\mathrm{GL}_{n-1}(E)$-同値類は二つあることがわかり, それらを J_0, J_1 と書くことにする．但し, J_0 は判別式の $F^\times/N_{E/F}E^\times$ での像が単位元になるようなものとし, J_1 はそうでないようなものとする．E/F は不分岐なので $J_0 \oplus 1$ の定める n 次元 Hermite 空間の中に自己双対な格子をとることができる．その固定化群を $K_{J_0\oplus 1} \subseteq U(J_0 \oplus 1)$ と書くことにすると, $K_{J_0\oplus 1}$ と $K_{J_0} = K_{J_0\oplus 1} \cap U(J_0)$ はそれぞれ $U(J_0 \oplus 1)$ 及び $U(J_0)$ の超特殊部分群 (hyperspecial subgroup) となる．$U(J_0)$ 上の測度を $\mathrm{Vol}(K_{J_0}) = 1$ となるように正規化する．ord_ϖ を F 上の正規化された付値とし, $e_n = {}^t(0, \ldots, 0, 1) \in F^n$ とおく．

予想 5.1（Jacquet-Rallis の基本補題 [JR11, Beu19]） $\gamma \in \mathbb{O}(S_n)_{\mathrm{rs}}$ に対し,

$$O(\gamma, 1_{K_S}, 0) = \begin{cases} \omega(\gamma)O(\delta, 1_{K_{J_0\oplus 1}}) & \gamma \leftrightarrow \delta \in \mathbb{O}(U(J_0 \oplus 1))_{\mathrm{rs}} \text{のとき}, \\ 0 & \gamma \leftrightarrow \delta \in \mathbb{O}(U(J_1 \oplus 1))_{\mathrm{rs}} \text{のとき} \end{cases}$$

となる．ここで $\omega(\gamma)=(-1)^{\mathrm{ord}_{\varpi}(\det((\gamma^i e_n)_{i=0,\ldots,n-1}))}$ とおいた．

注意 5.2 F の標数が $p>0$ で $p>n$ のときは Yun [Yun11] が Ngô [Ngô10] による基本補題の証明の類似の手法を用いることで予想 5.1 を示している．さらにこの論文の appendix において Gordon が Yun の結果から剰余標数が十分大きな (標数 0 の) 非アルキメデス局所体 F に対する予想 5.1 が導かれることを示している．最近, Beuzart-Plessis [Beu19] が標数が 0 の任意の非アルキメデス局所体の場合に証明を与えた．

実は $\gamma \leftrightarrow \delta \in \mathbb{O}(U(J_1 \oplus 1))_{\mathrm{rs}}$ となっているとき $O(\gamma, 1_{K_S}, 0)=0$ となることは簡単に示すことができる [Zha12, Lemma 2.5]．このとき,

$$O'(\gamma, 1_{K_S}, 0)=\frac{d}{ds}O(\gamma, 1_{K_S}, s)|_{s=0}$$

とおく．

5.3 ユニタリ型 Rapoport-Zink 空間

以下, F を標数 0 の非アルキメデス局所体で剰余標数 p は 2 でないと仮定する．E を F の不分岐二次拡大とし σ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元とする．ϖ を F の一意化元とし, κ を F の剰余体とする．$\breve{F}$ を F の最大不分岐拡大体 F^{ur} の完備化とし, W をその整数環とする．このとき $\breve{F}$ の剰余体は $\bar{\kappa}$ となる．Nilp_W を W 上のスキーム S で ϖ が S の構造層の中で局所冪零であるようなもののなす圏とする．S を Nilp_W の対象として, 3 つ組 (X,ι,λ) を S 上のユニタリ型 (p-可除) 形式 $\mathcal{O}_F$-加群と呼ぶ．ここで X は S 上の高さが $2n$ の (p-可除) 形式 $\mathcal{O}_F$-加群, $\iota:\mathcal{O}_E\to\mathrm{End}(X)$, $\lambda: X\to X^\vee$ は X の主偏極 (principal polarization) で任意の $a\in\mathcal{O}_E$ に対し $\iota(a)^\vee\circ\lambda=\lambda\circ\iota(\sigma(a))$ を満たすようなものである[*25]．さらにユニタリ型形式 $\mathcal{O}_F$-加群 (X,ι,λ) が

$$\mathrm{charpoly}(\iota(a)\mid \mathrm{Lie}(X))(T)=(T-a)^r(T-\sigma(a))^{n-r}\in\mathcal{O}_S[T]$$

を満たすとき符号 $(r,n-r)$ を持つという．但し, charpoly は特性多項式を表す．符号 $(1,0)$ を持つ $\bar{\kappa}$ 上のユニタリ型形式 $\mathcal{O}_F$-加群 $\mathbb{E}=(\mathbb{E},\iota_{\mathbb{E}},\lambda_{\mathbb{E}})$ を一つ固定する．こ

---

*25 $F=\mathbb{Q}_p$ のとき, $X^\vee$ は X の Cartier 双対である．一般の場合の $X^\vee$ の定義については [Mih16] を見よ．

のようなものは同種のずれを除き一意に存在する．$\overline{\mathbb{E}} = (\mathbb{E}, \iota_{\mathbb{E}} \circ \sigma, \lambda_{\mathbb{E}})$ とおき，

$$\mathbb{X}_n = \mathbb{E} \times \overline{\mathbb{E}}^{n-1}$$

とおくとこれは符号 $(1, n-1)$ を持つ $\overline{\kappa}$ 上のユニタリ型形式 $\mathcal{O}_F$-加群になる．但し，$\mathcal{O}_E$ の作用と主偏極は対角的に定義する．Nilp_W の対象 S に対し，$\overline{S} = S \times_W \overline{\kappa}$ とおく．このとき関手 $\mathcal{N}_n : \mathrm{Nilp}_W \to \mathrm{Sets}$ を

$$\mathcal{N}_n(S) = \left\{ (X, \iota, \lambda, \rho) \;\middle|\; \begin{array}{l} (X, \iota, \lambda) \text{ は符号 } (1, n-1) \text{ を持つ } S \text{ 上のユニタリ型} \\ \text{形式 } \mathcal{O}_F\text{-加群}, \rho : X \times_S \overline{S} \to \mathbb{X}_n \times_{\overline{\kappa}} \overline{S} \text{ は } \mathcal{O}_E\text{-線型} \\ \text{な高さ 0 の準同種写像で } \rho^\vee \circ \lambda_{\mathbb{X}_n} \circ \rho \text{ は局所的に } \lambda \\ \text{の } \mathcal{O}_F^\times \text{ 倍になっているようなもの.} \end{array} \right\}_{/\cong}$$

と定める．但し，四つ組 $(X, \iota, \lambda, \rho)$ と $(X', \iota', \lambda', \rho')$ に対し，$\mathcal{O}_E$-線型な同型写像 $\alpha : X \to X'$ があって $\rho \circ (\alpha \times_W \overline{\kappa}) = \rho'$ となるときこれらは同型になるといい，$(X, \iota, \lambda, \rho) \cong (X', \iota', \lambda', \rho')$ と書く．Rapoport-Zink [RZ96] の結果により，この関手 $\mathcal{N}_n$ は $\mathrm{Spf}\, W$ 上の相対次元 $n-1$ の形式的に滑らか (formally smooth) な形式スキームによって表現される．この形式スキームも $\mathcal{N}_n$ と書くことにする．

$(\mathcal{E}, \iota_0, \lambda_0)$ を $\mathcal{N}_1$ の上の普遍対象 (universal object) とし[*26]，$(\overline{\mathcal{E}}, \overline{\iota_0}, \overline{\lambda_0}) = (\mathcal{E}, \iota_0 \circ \sigma, \lambda_0)$ とおく．このとき

$$\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_{n-1} \times (\overline{\mathcal{E}} \times_{\mathrm{Spec}\, W} \mathrm{Spec}\, \overline{k})$$

となっているので，これを用いて埋め込み $\delta : \mathcal{N}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{N}_n$ を

$$\delta((X, \iota, \lambda, \rho)) = (X \times \overline{\mathcal{E}}, \iota \times \overline{\iota_0}, \lambda \times \overline{\lambda_0}, \rho \times \mathrm{id})$$

によって定める．δ は $\Delta : \mathcal{N}_n \hookrightarrow \mathcal{N}_{n-1} \times_{\mathrm{Spf}\, W} \mathcal{N}_n$ を誘導する．さらに

$$G_n = \left\{ g \in \mathrm{End}_E(\mathbb{X}_n) \otimes \mathbb{Q} \,\middle|\, g g^\dagger = 1 \right\}$$

とおく．但し，$\dagger$ は Rosati 対合を表す．G_n は $\mathcal{N}_n$ に $\rho \mapsto g \circ \rho$ によって作用する．このとき $G_{n-1} \times G_n$ は $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{n-1} \times_{\mathrm{Spf}\, W} \mathcal{N}_n$ に自己同型として作用する．$D = \mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(\mathbb{E}) \otimes \mathbb{Q}$ とおくと，これは F 上の四元数体となり，これを用いると $M_n(D) = \mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(\mathbb{X}_n) \otimes \mathbb{Q}$ という同一視が得られる．また，$\mathcal{O}_E$ の $\mathbb{E}$ への作用から $E \hookrightarrow D$ という埋め込みが得られる．$\widetilde{\varpi} \in \mathcal{O}_D = \mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(\mathbb{E})$ を $\widetilde{\varpi}^\dagger = -\widetilde{\varpi}$, $\widetilde{\varpi}^2 = \varpi$,

[*26] $\mathcal{E}$ は $\mathbb{E}$ の canonical lift と呼ばれる．

$\widetilde{\varpi}a = \sigma(a)\widetilde{\varpi}$ $(a \in E)$ となるように選ぶ. このとき $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{E}, \overline{\mathbb{E}}) = \widetilde{\varpi}\mathcal{O}_E$ という同一視ができるので, 以上のことを合わせると

$$M_n(E) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{X}_n) \otimes \mathbb{Q}, x \mapsto \mathrm{diag}(\widetilde{\varpi}, 1, \ldots, 1) \cdot x \cdot \mathrm{diag}(\widetilde{\varpi}^{-1}, 1, \ldots, 1)$$

という同型が得られる. これにより, $J_1 = \mathrm{diag}(-\varpi, 1, \ldots, 1)$ とおいたとき G_n は $U(J_1 \oplus 1)$ と同一視できることが分かる.

5.4 数論的基本補題

$\pi : \mathcal{N} \to \mathrm{Spf}\, W$ を構造射とし, $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$-加群 $\mathscr{F}$ に対して

$$\chi(\mathscr{F}) = \sum_i (-1)^i \, \mathrm{length}_W \, R^i \pi_* \mathscr{F}$$

とおく. さらに $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$-加群の層の有界な複体 $\mathscr{F}^\bullet$ に対して,

$$\chi(\mathscr{F}^\bullet) = \sum_j (-1)^j \chi(\mathscr{F}^j)$$

とおく. このとき, $g \in G_n$ に対し数論的交叉数 (arithmetic intersection number) を

$$\langle \Delta(\mathcal{N}_{n-1}), (\mathrm{id}_{\mathcal{N}_{n-1}} \times g)\Delta(\mathcal{N}_{n-1}) \rangle = \chi(\mathcal{O}_{\Delta(\mathcal{N}_{n-1})} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{(\mathrm{id}_{\mathcal{N}_{n-1}} \times g)\Delta(\mathcal{N}_{n-1})}) \log q$$

によって定義し,

$$O'(g, 1_{K'}) = \langle \Delta(\mathcal{N}_{n-1}), (\mathrm{id}_{\mathcal{N}_{n-1}} \times g)\Delta(\mathcal{N}_{n-1}) \rangle$$

とおく. 但し, $K' = K_{J_1 \oplus 1}$ とおいた. このとき数論的基本補題は次のように定式化される.

予想 5.3（数論的基本補題 [Zha12]） $\gamma \in S_n(F)_{\mathrm{rs}}$ は $g \in \mathbb{O}(U(J_1 \oplus 1))_{\mathrm{rs}}$ の移送になっているとする. このとき, 数論的交叉数 $O'(g, 1_{K'}) = \langle \Delta(\mathcal{N}_{n-1}), (\mathrm{id}_{\mathcal{N}_{n-1}} \times g)\Delta(\mathcal{N}_{n-1}) \rangle$ は有限で

$$O'(\gamma, 1_{K_S}, 0) = -\omega(\gamma) O'(g, 1_{K'})$$

が成り立つ.

Wei Zhang [Zha19] は $F=\mathbb{Q}_p$ で $p>n$ のときに強正則半単純 (strongly regular semisimple)[*27]な γ に対し数論的基本補題を証明した[*28]．また，数論的基本補題の Lie 代数版も定式化されており，Mihatsch [Mih15] は $n=3$ のときに Lie 代数版を示し，それが群の場合の数論的基本補題を導くことを示している．また，Rapoport-Smithling-Zhang [RSZ15, RSZ16] は E/F が分岐するときにも数論的移送予想 (arithmetic transfer conjecture) を定式化しており，$n=2$ のときに予想を確かめている．

6 数論的相対跡公式

この節では数論的基本補題と数論的 Gan-Gross-Prasad 予想を結びつけるために必要な数論的相対跡公式について説明し，最後に L 関数の微分値と関係すると期待される積分の局所成分が (数論的基本補題が成立するという仮定の下で) 実際に数論的 Gan-Gross-Prasad 予想に現れるサイクルの高さペアリングの局所成分と一致するという Wei Zhang の結果を紹介する．

6.1 Jacquet-Rallis の相対跡公式

F を代数体とし，E/F を二次拡大とする．今までと同様に $\mathbb{A}$ を F 上のアデール環とする．$G'=\mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_{n-1}\times\mathrm{GL}_n)$ とおく．H_1' を $\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_{n-1}$ の G' への対角埋め込みの像とし，$H_2'=\mathrm{GL}_{n-1,F}\times\mathrm{GL}_{n,F}$ とおく．以下，F 上の代数群 H に対し Z_H によって H の中心の極大分裂トーラスを表すことにする．上の状況では $Z_{G'}=Z_{H_2'}$ となっている．$f'\in\mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ に対して，

$$K_{f'}(x,y)=\int_{Z_{G'}(F)\backslash Z_{G'}(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in G'(F)}f'(x^{-1}z\gamma y)dz=\sum_{\gamma\in Z_{G'}(F)\backslash G'(F)}\widetilde{f'}(x^{-1}\gamma y)$$

とおく．但し，$\widetilde{f'}(h)=\int_{Z_{G'}(\mathbb{A})}f'(zh)dz$ とおいた．このとき $K_{f'}$ は $G'(\mathbb{A})\times G'(\mathbb{A})$ 上の連続関数を定める．$\eta_{E/F}:F^\times\backslash\mathbb{A}^\times\to\{\pm1\}$ を E/F に対応する指標とし，

[*27] 正則半単純な元 γ が半単純なとき γ は強正則半単純であるという．

[*28] 数論的 Gan-Gross-Prasad 予想への応用上は強正則半単純な元について示せば十分である．

$\eta : H_2'(\mathbb{A}) \to \{\pm 1\}$ を $h = (h_1, h_2) \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ に対し,

$$\eta(h) = \begin{cases} \eta_{E/F}(\det(h_1)) & n \text{ が奇数のとき}, \\ \eta_{E/F}(\det(h_2)) & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

によって定義する. $H_1'(\mathbb{A})$, $H_2'(\mathbb{A})$ 及び $Z_{H_2'}(\mathbb{A})$ 上の Haar 測度を固定し, $s \in \mathbb{C}$ に対し $G'(\mathbb{A})$ 上の超関数 (distribution) を

$$I(f', s) = \int_{H_1'(F)\backslash H_1'(\mathbb{A})} \int_{Z_{H_2'}(\mathbb{A}) H_2'(F)\backslash H_2'(\mathbb{A})} K_{f'}(h_1, h_2)\eta(h_2)|\det(h)|^s dh_1 dh_2$$

と定める. $I(f', s)$ を $s = 0$ で微分した値は数論的 Gan-Gross-Prasad 予想に現れる保型 L 関数の微分値と関連付けられることが期待される. 例えば, 次のような結果が知られている.

定理 6.1 ([RSZ17]) $f' = \bigotimes_v f_v' \in \mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ とし, ある F の素点 v に対して, f_v' は次のような性質を満たすと仮定する: 全ての $Z_{G'}(F_v)$ 上の指標 χ_v に対し, 関数 $f'_{v,\chi_v} : G'(F_v) \to \mathbb{C}$ を $f'_{v,\chi_v}(g) = \int_{Z_{G'}(F_v)} f_v'(zg)\chi_v(z)^{-1} dz$ によって定めたとき, f'_{v,χ_v} は超尖点表現の行列係数の和として書ける. このとき, 積分 $I(f', s)$ は全ての s に対して絶対収束し, さらに

$$I(f', s) = \sum_{\Pi} L(1, \eta)^2 \frac{L(s + \frac{1}{2}, \Pi_1 \boxtimes \Pi_2)}{L(1, \pi, \mathrm{Ad})} \prod_v I_{\Pi_v}(f_v', s)$$

が成り立つ. ここで Π は準分裂ユニタリ群上の保型表現 π の基底変換として得られる $G'(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 $\Pi = \Pi_1 \boxtimes \Pi_2$ 全体を動き, $I_{\Pi_v}(f_v', s)$ は [RSZ17, (7.5)] で定義されている局所超関数である. よって, このとき特に

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(f', s)\Big|_{s=0} = &\sum_{\Pi : \epsilon(1/2, \Pi) = -1} L(1, \eta)^2 \frac{L'(\frac{1}{2}, \Pi_1 \boxtimes \Pi_2)}{L(1, \pi, \mathrm{Ad})} \prod_v I_{\Pi_v}(f_v', 0) \\ &+ \sum_{\Pi : \epsilon(1/2, \Pi) = 1} L(1, \eta)^2 \frac{L(\frac{1}{2}, \Pi_1 \boxtimes \Pi_2)}{L(1, \pi, \mathrm{Ad})} \prod_v \frac{d}{ds} I_{\Pi_v}(f_v', s)\Big|_{s=0} \end{aligned}$$

となる.

この積分 $I(f', s)$ は一般には収束しないので, 扱いを簡単にするために f' に以下のような条件をつける. まず, $H_1'\backslash G'$ を $\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathrm{GL}_n$ と同一視し, 自然な同型 $\mathrm{GL}_n(E)/\mathrm{GL}_n(F) \cong S_n(F)$ を用いると

$$\mathbb{O}(G'(F)) = H_1'(F)\backslash G'(F)/H_2'(F)$$

と

$$\mathbb{O}(S_n(F)) = \mathrm{GL}_{n-1}(F) \mathbin{\backslash\!\backslash} S_n(F)$$

が自然に同一視されることが分かる．$g \in \mathrm{GL}_{n-1}(F)$ の $\mathbb{O}(S_n(F))$ での像が正則半単純のとき, g は正則半単純であるという．F や E が局所体のときも同様に定義する．$f' = \bigotimes_v f'_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ に対して, $f'_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G'(F_v))$ の台が正則半単純部分 (regular semisimple locus) に含まれているとき f' は素点 v で正則半単純台を持つという．f' がある素点 v で正則半単純台を持つとき, $H'_1(\mathbb{A}) \times H'_2(\mathbb{A})$ 上の関数として $K_{f'}(h_1, h_2)$ は mod $H'_1(F) \times Z_{H'_2}(\mathbb{A})H'_2(F)$ でコンパクト台を持ち, 特に $I(f', s)$ は絶対収束することが示せる．以下, f' はある素点 v で正則半単純台を持つと仮定する．この仮定の下で, $I(f', s)$ は

$$I(f', s) = \sum_{\gamma \in \mathbb{O}(G'(F))_{\mathrm{rs}}} O(\gamma, f', s)$$

と分解することができる．但し,

$$O(\gamma, f', s) = \int_{H'_1(\mathbb{A})} \int_{H'_2(\mathbb{A})} f'(h_1^{-1}\gamma h_2)|\det(h_1)|^s \eta(h_2) dh_1 dh_2$$

は (変数 s 付きの) 軌道積分を表す．この積分は有限和になっており, さらに $H'_i(\mathbb{A})$ 上の Haar 測度の局所 Haar 測度への分解を固定すると軌道積分の局所成分への分解

$$O(\gamma, f', s) = \prod_v O(\gamma, f'_v, s)$$

が得られる．

6.2 移送因子と軌道積分の微分

滑らかな関数の族 $\{\Omega_v : G'(F_v)_{\mathrm{rs}} \to \mathbb{C}^\times\}_v$ が

- $g \in G'(F)$ が正則半単純なら, 有限個を除く全ての素点 v に対し $\Omega_v(g) = 1$ で $\prod_v \Omega_v(g) = 1$,
- 任意の $h_1 \in H'_1(F_v)$, $h_2 \in H'_2(F_v)$ と $g \in G'(F_v)$ に対し, $\Omega_v(h_1 g h_2) = \eta(h_2)\Omega_v(g)$

を満たすとき $\{\Omega_v\}_v$ を移送因子 (transfer factor) という．上で述べた条件から移送因子は一意には定まらないが次のように具体的に構成することができる．まず

$\eta' : E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $\eta'|_{\mathbb{A}^\times} = \eta$ を満たす指標で, E が v で不分岐なら $\eta'_v(x) = (-1)^{\mathrm{ord}_v(x)}$ となるようなものとする. $g = (g_1, g_2) \in G'(F_v)$ に対し, $s = \nu(g_1g_2^{-1}) \in S_n(F_v)$ とおく. n が偶数のとき,

$$\Omega_v(g) = \eta'_v(\det(g_1g_2^{-1}))\eta'_v(\det(s)^{-\frac{n}{2}}\det(({}^te_ns^i)_{i=0,\ldots,n-1}))$$

とおき, n が奇数のときは

$$\Omega_v(g) = \eta'_v(\det(s)^{-\frac{n-1}{2}}\det(({}^te_ns^i)_{i=0,\ldots,n-1}))$$

とおくと Ω_v は移送因子の条件を満たすことが確かめられる. 但し, ${}^te_n = (0,\ldots,0,1) \in F_v^n$ であった. 以下では上で構成した移送因子を用いる.

次に E/F を局所体の二次拡大とする. $E = F\times F$ のときも含めて考えることにする. Eu を $\langle u,u\rangle = 1$ となる双線型形式を持つ 1 次元 Hermite 空間とする. W を次元が $n-1$ の非退化な Hermite 空間とし, $V = W\oplus Eu$ とおく. $\mathrm{U}(V)$, $\mathrm{U}(W)$ を V, W から定まるユニタリ群とすると, 自然な埋め込み $\mathrm{U}(W)\hookrightarrow\mathrm{U}(V)$ が定まる. $G = G_W = \mathrm{U}(W)\times\mathrm{U}(V)$ とおき, $H = H_W$ を $\mathrm{U}(W)$ の対角埋め込みの像とする. このとき, $H(F)\backslash G(F)/H(F)$ は $\mathrm{U}(W)(F)\backslash\!\backslash\,\mathrm{U}(V)(F)$ と $(\delta_1,\delta_2)\mapsto\delta_1^{-1}\delta_2$ という対応の下で同一視できる. $\delta = (\delta_1,\delta_2)\in\mathrm{U}(W)(F)\times\mathrm{U}(V)(F)$ に対し, $\delta_1^{-1}\delta_2\in\mathrm{U}(V)(F)$ が正則半単純のとき, δ は正則半単純であるという.

正則半単純な $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2)\in G'(F)$ と $\delta = (\delta_1,\delta_2)\in G(F)$ に対し, $\nu(\gamma_1^{-1}\gamma_2)\in S_n(F)$ と $\delta_1^{-1}\delta_2\in\mathrm{U}(V)(F)$ が互いの移送になっているとき, $\gamma\leftrightarrow\delta$ と書き, γ と δ は互いの移送になっているという. 正則半単純な $\delta\in G(F)$ と $f\in\mathcal{C}_c^\infty(G(F))$ に対し,

$$O(\delta,f) = \int_{H(F)}\int_{H(F)} f(h_1^{-1}\delta h_2)dh_1dh_2$$

とおく.

定義 6.2 $f'\in\mathcal{C}_c^\infty(G'(F))$ と $f_W\in\mathcal{C}_c^\infty(G_W(F))$ (W は次元が $n-1$ の F 上の Hermite 空間の等長類 (isometric class)) の族 $(f_W)_W$ に対し, f' と $(f_W)_W$ が互いの滑らかな移送 (smooth transfer) であるとは, $\delta\in G_W(F)$ が正則半単純な $\gamma\in G'(F)$ の移送のとき,

$$O(\delta,f_W) = \Omega(\gamma)O(\gamma,f',0)$$

となることをいう. 但し, $\Omega(\gamma) = \prod_v\Omega_v(\gamma)$ は上で定めた移送因子の積を表す.

$E = F \times F$ のときは簡単に移送が存在することを示すことができる．さらに Wei Zhang により次の結果が知られている．

定理 6.3（[Zha14b]） E/F が非アルキメデス局所体の拡大ならば移送が存在する．

$f' \in \mathcal{C}_c^\infty(G'(F))$ に対し，ある滑らかな移送 $(f_{W'})_{W'}$ が存在し，$W' \not\cong W$ なら $f_{W'} = 0$ となるとき f' はタイプ W の純 (pure of type W) であるといい，f' は f_W の滑らかな移送であるという．例えば E/F が不分岐二次拡大のとき，Jacquet-Rallis の基本補題により $f' = 1_{G'(\mathcal{O}_F)}$ は $f_{W_1} = 1_K$，$f_{W_2} = 0$ というペアに対する移送になっていることが分かる．ここで W_1 は自己双対な格子 L を持つような唯一の W，K は L の固定化群であり，W_2 は W_1 と等長でない類を表す．よって，$f' = 1_{G'(\mathcal{O}_F)}$ はタイプ W_1 の純である．

大域的な状況設定に戻ろう．E/F を代数体の二次拡大，W を E 上の $n-1$ 次元の Hermite 空間とし，先ほどと同様に G_W, H_W を定義する．アデール的な Hermite 空間 $\mathbb{W} = \prod'_v \mathbb{W}_v$ の判別式が $F^\times$ に入っていないとき，$\mathbb{W}$ は E 上の Hermite 空間からの基底変換にはならないことが分かる．このような $\mathbb{W}$ を非整合的 (incoherent) な Hermite 空間という．$\mathbb{W}$ が非整合的なとき，$\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{A}_E u$ (ここで $\mathbb{A}_E u$ は 1 次元のアデール的 Hermite 空間で $\langle u, u \rangle = 1$ とする) は非整合的な Hermite 空間と整合的 (coherent) な Hermite 空間の直和であり，これも非整合的になる．

以下，非整合的な Hermite 空間 $\mathbb{W}$ を固定する．$f' = \bigotimes_v f'_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ に対し，全ての素点 v で f'_v がタイプ W_v の純であるとき f' はタイプ $\mathbb{W}$ の純であるという．タイプ $\mathbb{W}$ の純な f' で張られる $\mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ の部分空間を $\mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}))^{\mathbb{W}}$ と書くことにする．W を E 上の Hermite 空間とするとき，

$$\Sigma(W, \mathbb{W}) = \{v : F \text{ の素点} \mid W_v \not\cong \mathbb{W}_v\}$$

とおく．$\mathbb{W}$ は非整合的なので $\Sigma(W, \mathbb{W})$ は空集合にはならない．非分解な有限素点 v に対し，W が $\Sigma(W, \mathbb{W}) = \{v\}$ を満たすとき，(その等長類を) $W(v)$ と書いて[*29] $W(v)$ を $\mathbb{W}$ の素点 v での隣接 Hermite 空間と呼ぶ．

また，正則半単純な $\gamma \in G'(F)$ に対し，$\delta \in G_W(F)$ を γ の移送とすると，γ はある Hermite 空間 W を決めていると考えることができる．この W (の等長類) を $W(\gamma)$ と書き，$\Sigma(\gamma, \mathbb{W}) = \Sigma(W(\gamma), \mathbb{W})$ と書くことにする．このとき次のことが示せる．

[*29] このような等長類 $W(v)$ は唯一つ存在する．

命題 6.4 $f' = \bigotimes_v f'_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}))^{\mathbb{W}}$ とする.

(1) $\gamma \in G'(F)$ を正則半単純な元とするとき,

$$\mathrm{ord}_{s=0}\, O(\gamma, f', s) \geqq |\Sigma(\gamma, \mathbb{W})|$$

となる.

(2) ある素点 v_0 で f'_{v_0} は正則半単純台を持つと仮定すると $I(f', 0) = 0$ となる．さらに $s = 0$ での $I(f', s)$ の一階微分を $I'(f', 0)$ と書くことにすると, 局所成分への分解

$$I'(f', 0) = \sum_v I'_v(f', 0)$$

ができ, v が分解するとき $I'_v(f', 0) = 0$, v が非分解のときは

$$I'_v(f', 0) = \sum_{W : \Sigma(W, \mathbb{W}) = \{v\}} \sum_{\gamma \in \mathbb{O}(G'(F))_{\mathrm{rs}}, W(\gamma) = W} O(\gamma, f'^v, 0) \cdot O'(\gamma, f'_v, 0)$$

となる．特に v が非分解な有限素点ならば

$$I'_v(f', 0) = \sum_{\gamma \in \mathbb{O}(G'(F))_{\mathrm{rs}}, W(\gamma) = W(v)} O(\gamma, f'^v, 0) \cdot O'(\gamma, f'_v, 0)$$

となる．但し, $O(\gamma, f'^v, 0) = \prod_{v' \neq v} O(\gamma, f'_{v'}, 0)$ とおいた.

この命題は今まで述べてきたことを用いて簡単に示すことができる.

6.3 局所高さペアリングと数論的相対跡公式

最後に部分志村多様体の定めるサイクルの局所高さペアリングと $I'_v(f', 0)$ の関係を述べる．ここでは簡単のため $F = \mathbb{Q}$ とし, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ を判別式 $-d$ を持つ虚二次体とする．$\mathbb{W}$ を Hermite 形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ非整合的 Hermite 空間とし, $\mathbb{G} = G_{\mathbb{W}}$, $\mathbb{H} = H_{\mathbb{W}}$ とおく．以下, 予想 2.3 と予想 3.7(1) を仮定する．$f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{G})$ に対し,

$$J(f) = \langle R(f)[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0, [\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0 \rangle_{BB}$$

とおく．Beilinson-Bloch の高さペアリングの構成よりサイクル $R(f)[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0$ と $[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0$ の台が交わりを持たないとき, 高さペアリングは

$$J(f) = \sum_v J_v(f)$$

と局所成分に分解できる．以下, $v = p \neq 2$ は不分岐な有限素点とする．つまり,

- $p \neq 2$ は E で不分岐,
- $\mathbb{W}_p$ は自己双対格子 L を持ち, K'_p を L の固定化群としたとき $f_p = 1_{K'_p}$

と仮定する. このとき, p での局所成分 $J_p(f)$ は次のような項に分けることができる:

(1) コンパクト化されていない部分志村多様体の定めるサイクルに対する局所高さペアリング $\langle R(f)[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}], [\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]\rangle_p$ からの寄与.
(2) コンパクト化することによって新しく現れる部分の寄与.
(3) $[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]$ と $[\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}]_0$ の違いから生まれる寄与.

(1) に対応する項を $J_p^m(f)$ (m は main の頭文字), (2) と (3) に対応する項を $J_p^b(f)$ (b は boundary の頭文字) と書くことにし, $J_p(f) = J_p^m(f) + J_p^b(f)$ と分解する.

$J_p^m(f)$ のより正確な定義を与えるために志村多様体 $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},\infty}$ の整モデルについて思い出しておこう. p は不分岐で $\mathbb{W}_p$ は自己双対格子 L を持つとする. K'_p を L の固定化群とすると $\mathbb{H}(\mathbb{Q}_p)$ の超特殊極大コンパクト部分群になるのであった. 同様に K_p を $\mathbb{G}(\mathbb{Q}_p)$ の超特殊極大コンパクト部分群とする. K^p を $\mathbb{G}(\mathbb{A}^{\infty,p})$ の開コンパクト部分群とし, $K'^p = K^p \cap \mathbb{H}(\mathbb{A}^{\infty,p})$ とおく. $\mathcal{O}_{E,(p)}$ を $\mathcal{O}_E$ の p での局所化とし, 埋め込み $\mathcal{O}_{E,(p)} \hookrightarrow W = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を固定する. Witt 環 W は $\widehat{\mathbb{Z}}^p(1) = \left\{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}_p \middle| \text{ある } p \text{ と素な } n \text{ があって} \zeta^n = 1\right\}$ を含んでいることに注意して, $\widehat{\mathbb{Z}}^p(1)$ の自明化 $\widehat{\mathbb{Z}}^p(1) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^p$ を固定する. このとき $\mathscr{S}_{\mathbb{H},K'_p} : \mathrm{Sch}_W \to \mathrm{Sets}$ を

$$S \mapsto \{(A, \lambda_A, \iota_A, \overline{\eta_A^p}) \text{ で符号 } (n-2,1) \text{ の Kottwitz の行列式条件を満たすもの }\}_{/\cong}$$

により定める. 但し, A は S 上の相対次元 $n-1$ のアーベルスキーム, $\lambda_A : A \to A^\vee$ は $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$-偏極, $\iota_A : \mathcal{O}_{E,(p)} \to \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ は $\iota_A(\overline{a}) = \iota_A(a)^\dagger$ を満たす準同型[*30], $\overline{\eta_A^p} = \eta_A^p K'^p$ は (p の外での) レベル構造である (詳しくは [清水 20] を見よ). さらに, 全ての $a \in \mathcal{O}_{E,(p)}$ に対し

$$\mathrm{charpoly}(\iota_A(a) \,|\, \mathrm{Lie}\, A) = (T-a)^r (T-\overline{a})^s \in \mathcal{O}_S[T]$$

を満たすとき (A, ι_A) は符号 (r,s) の Kottwitz の行列式条件を満たすというのであった. K'^p が十分小さければ $\mathscr{S}_{\mathbb{H},K'^p}$ は W 上の滑らかな準射影的なスキームで表現されることが知られている. このとき $\mathscr{S}_{\mathbb{H},K'^p}$ は $\mathrm{Sh}_{\mathbb{H},K'^p K'_{p,0}} \otimes_E \mathrm{Frac}(W)$ のコピーの有限個の disjoint union の整モデルを与える. そのうちの一つを固定し $\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}$ と書

[*30] [清水 20] では $*$ 準同型と呼んでいる.

くことにする．同様にして $\mathrm{Sh}_{\mathbb{G},K^pK_{p,0}}\otimes_E\mathrm{Frac}(W)$ の整モデル $\mathscr{S}^0_{\mathbb{G},K^p}$ も構成される．$f=f_\infty\otimes f^{p,\infty}\otimes f_p\in\mathcal{H}(K\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})/K)=\{f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{G}(\mathbb{A}))\,|\,f$ は両側 K-不変 $\}$ (但し, $K=K^pK_p$ とおいた) で $f_p=1_{K_p}$ かつ $f_\infty=1_{\mathbb{G}(\mathbb{A}_\infty)}$ となるものに対し, $\mathscr{S}_{\mathbb{G},K^p}$ 上の Hecke 対応を $R(f)$ と表すことにする．

整モデルの埋め込み $i:\mathscr{S}_{\mathbb{H},K'^p}\hookrightarrow\mathscr{S}_{\mathbb{G},K^p}$ を次のように定義する．まず, $\mathcal{O}_E$ により虚数乗法を持つ W 上の楕円曲線 $\mathcal{E}_0$ を固定する．$\iota_0:\mathcal{O}_E\hookrightarrow\mathrm{End}(\mathcal{E}_0)$ を符号が $(1,0)$ であるようなものとし, λ_0 を主偏極とする．さらに E 上 1 次元のシンプレクティック空間の間の $\mathcal{O}_{E,(p)}$-線型な同型

$$\eta_0^p:H_1(\mathcal{E}_{0,s},\mathbb{A}^{\infty,p})\cong Eu\otimes\mathbb{A}^{\infty,p}$$

(s は W の幾何的点) を一つ固定する．但し, Eu 上にはシンプレクティック形式を $\mathrm{Tr}_{E/\mathbb{Q}}(\langle x,y\rangle)/\sqrt{-d})$ によって定める (ここで $\langle\,,\,\rangle$ は $\langle u,u\rangle=1$ となる Hermite 形式)．このとき

$$i((A,\lambda_A,\iota_A,\overline{\eta_A^p}))=((A,\lambda_A,\iota_A,\overline{\eta_A^p}),(A\times\mathcal{E}_0,\lambda_A\times\lambda_0,\iota_A\times\iota_0,\overline{\eta_A^p\times\eta_0^p}))$$

により埋め込み i を定める．p が惰性するとき,

$$J_p^m(f)=\mathrm{Vol}(K')^2\langle R(f)\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p},\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}\rangle_{\mathscr{S}^0_{\mathbb{G},K^p}}$$

とおく (但し, $\mathscr{S}^0_{\mathbb{G},K^p}$ は $\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}$ の i の下での像が入るような連結成分に取り直す)．ここで,

$$\langle R(f)\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p},\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}\rangle_{\mathscr{S}^0_{\mathbb{G},K^p}}=\chi(\mathcal{O}_{R(f)\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}}\otimes^{\mathbb{L}}\mathcal{O}_{\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}})\cdot\log p^2$$

とおいた．また, p が分解するときは p の上の素点 v_1, v_2 に対応する $\mathcal{O}_{E,(p)}$ の W への埋め込みを考え, この埋め込みごとに整モデルを考えて $J_{v_i}^m(f)$ を定め, その和で $J_p^m(f)$ を定義する．但し, 交叉数の定義では $\log p^2$ の代わりに $\log p$ を用いることにする．このとき, $I_p'(f',s)$ と $J_p^m(f)$ の関係は次のように述べられる．

定理 6.5（[Zha12]） $f=\bigotimes_v f_v\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{G}(\mathbb{A}))$ とし, $f'=\bigotimes_v f'_v\in\mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ はタイプ $\mathbb{W}$ の純で f の移送になっているとする．p を不分岐な有限素点とし, ある $v\neq p$ があって f' は v で正則半単純台を持つとする．さらに f は $f_\infty=1_{\mathbb{G}(\mathbb{A}_\infty)}$ を満たすと仮定する．このとき, p が分解していれば,

$$I_p'(f',0)=J_p^m(f)=0$$

となり, p が惰性しているときは予想 5.3 (数論的基本補題) の仮定の下で

$$I'_p(f',0) = -J_p^m(f)$$

となる.

証明は以下のようにして行われる. はじめに p が惰性しているときを考える. f がある素点 v で正則半単純台を持つことを用いると, 集合論的交叉 $R(f)\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p} \cap \mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}$ は超特異部分 (supersingular locus) の中のみで起こりうることが示せる. $\mathscr{S}^{0,ss}_{\mathbb{H},K'^p}$ を $\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}$ の超特異部分とし, $\widehat{\mathscr{S}}^0_{\mathbb{H},K'^p}$ を $\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}$ の $\mathscr{S}^{0,ss}_{\mathbb{H},K'^p}$ に沿った形式完備化 (formal completion) とする. このとき Rapoport-Zink [RZ96] により, 次のような W 上の形式スキームの同型がある:

$$H_{W(p)}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{N}_{n-1} \times \mathbb{H}(\mathbb{A}^{\infty,p})/K'^p \cong \widehat{\mathscr{S}}^0_{\mathbb{H},K'^p}.$$

但し, $H_{W(p)}$ と対応する超特異アーベル多様体の準同種写像のなす群を同一視している. 同様に

$$G_{W(p)}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{N} \times \mathbb{G}(\mathbb{A}^{\infty,p})/K^p \cong \widehat{\mathscr{S}}^0_{\mathbb{G},K^p}$$

となる. ここで $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{n-1} \times_{\mathrm{Spf}\, W} \mathcal{N}_n$ であった. $h \in \mathbb{H}(\mathbb{A}^{\infty,p})$ に対し, $G_{W(p)}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{N} \times \mathbb{G}(\mathbb{A}^{\infty,p})/K^p$ における $\Delta(\mathcal{N}_{n-1}) \times h$ の剰余類を $[\Delta(\mathcal{N}_{n-1}), h]$ と書くことにすると,

$$\chi(\mathcal{O}_{R(f)\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}}) = \sum_{g\in\mathbb{G}(\mathbb{A}^\infty)/K} \sum_{h_1,h_2\in H_{W(p)}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{H}(\mathbb{A}^{\infty,p})/K'} f^{\infty,p}(g)\chi(\mathcal{O}_{[\Delta(\mathcal{N}_{n-1}),h_1 g]} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{[\Delta(\mathcal{N}_{n-1}),h_2]})$$

(但し, $K' = K'^p K'_p$ とおいた) となることが分かる. $h_1 g \equiv \delta h_2 \mod K^p$ となるような $\delta \in G_{W(p)}(\mathbb{Q})$ があるとき以外は上の項は 0 になることから, 上の式は結局,

$$\sum_{\delta\in\mathbb{O}(G_{W(p)}(\mathbb{Q}))_{\mathrm{rs}}} \left(\sum_{h_1,h_2\in\mathbb{H}(\mathbb{A}^{\infty,p})/K'^p} f^{\infty,p}(h_1^{-1}\delta h_2) \right) \chi(\mathcal{O}_{\Delta(\mathcal{N}_{n-1})} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\delta\Delta(\mathcal{N}_{n-1})})$$

に一致する. 数論的基本補題の定式化において

$$O'(g, f_p) = \chi(\mathcal{O}_{\Delta(\mathcal{N}_{n-1})} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{(\mathrm{id}_{\mathcal{N}_{n-1}} \times g)\Delta(\mathcal{N}_{n-1})}) \log p^2$$

とおいたことを思い出して, これを $J_p^m(f)$ の定義に代入すると,

$$\begin{aligned} J_p^m(f) &= \mathrm{Vol}(K)^2 \sum_{\delta \in \mathbb{O}(G_{W(p)}(\mathbb{Q}))_{\mathrm{rs}}} \sum_{h_1, h_2 \in \mathbb{H}(\mathbb{A}^{\infty,p})/K'^p} f^{\infty,p}(h_1^{-1}\delta h_2) \cdot O'(\delta, f_p) \\ &= \sum_{\delta \in \mathbb{O}(G_{W(p)}(\mathbb{Q}))_{\mathrm{rs}}} O(\delta, f^{\infty,p}) O'(\delta, f_p) \end{aligned}$$

となり, f_∞ の選び方と Haar 測度の選び方から $O(\delta, f_\infty) = 1$ となるので

$$J_p^m(f) = \sum_{\delta \in \mathbb{O}(G_{W(p)}(\mathbb{Q}))_{\mathrm{rs}}} O(\delta, f^p) O'(\delta, f_p)$$

となることが分かる. さらに f と f' がそれぞれ互いの移送であったことと命題 6.4 及び数論的基本補題 (予想 5.3)[*31]から

$$J_p^m(f) = -I_p'(f', 0)$$

が得られる.

あとは p が分解するとき $J_p^m(f) = 0$ が言えればよい. この場合は集合論的交叉 $R(f)\mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p} \cap \mathscr{S}^0_{\mathbb{H},K'^p}$ は通常部分 (ordinary locus) の中のみで起こりうることが示せる. さらに $\mathbb{E}$ を $\mathcal{E}$ の還元とすると, p が分解していることから, これは通常還元 (ordinary reduction) となる. $\mathbb{X}_n = \overline{\mathbb{E}} \times \mathbb{E}^{n-1}$ (+ 付加構造) を考えると上の交叉は $\mathbb{X}_n$ の同種類 (isogeny class) の中に台を持つことが分かる. この類を ξ と書くことにする. この類の幾何的点はある Rapoport-Zink 空間 $\mathcal{M}$ を用いて,

$$I(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_p) \times \mathbb{G}(\mathbb{A}^{\infty,p})/K^p \cong \xi$$

と一意化されることが分かる. ここで $I(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{X}_n$ の準同種写像のなす群で, ある簡約代数群 I の $\mathbb{Q}$-有理点になっている. f_v は正則半単純台を持つとする. このとき自然な埋め込み $I(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{G}(F_v)$ を考えると, $I(\mathbb{Q})$ の元は $\mathbb{G}(F_v)$ の元と思ったときに正則半単純ではないことを示せば良い. I は $I = I_{n-1} \times I_n$ と分解でき, $\delta = (1, g) \in I_{n-1}(\mathbb{Q}) \times I_n(\mathbb{Q})$ という形の元について考えれば十分であることが分かる. $\mathbb{X}_n$ の付加構造を保つという条件から, $I_n(\mathbb{Q})$ は $\mathrm{GL}_n(E)$ の Levi 部分群 $\mathrm{GL}_1(E) \times \mathrm{GL}_{n-1}(E)$ の部分群とみなすことができる. $H_1(\mathbb{X}_n, \mathbb{Q}_v)$ と $\mathbb{W}_v \oplus E_v u$ を同一視し, u を E_v 加群としての $H_1(\mathbb{E}, \mathbb{Q}_v)$ $(\subset H_1(\mathbb{E}^{n-1}, \mathbb{Q}_v))$ の生成元とし

[*31] 数論的基本補題 (予想 5.3) から $O'(\gamma, f_p', 0) = -\Omega_p(\gamma) O'(\delta, f_p)$ が従うという事実も使っている.

て考える (つまり $H_1(\mathbb{X}, \mathbb{Q}_v) = H_1(\overline{\mathbb{E}} \times \mathbb{E}^{n-2}, \mathbb{Q}_v) \oplus E_v u$ とみなす). このとき, $g \in I_n(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{GL}_1(E) \times \mathrm{GL}_{n-1}(E)$ に対し, $g^i u$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ は上の同一視の下で $H_1(\mathbb{E}^{n-1}, \mathbb{Q}_v) = H_1(\mathbb{E}^{n-2}, \mathbb{Q}_v) \oplus H_1(\mathbb{E}, \mathbb{Q}_v)$ に入るので, 特に $H_1(\mathbb{X}_n, \mathbb{Q}_v)$ の生成系には成り得ないことが分かる. ゆえに $\delta = (1, g)$ は正則半単純ではないことが分かり, そもそもこの場合には交叉が起こらないことが言えるので $J_p^m(f) = 0$ が従う.

参考文献

[Ato15] H. Atobe, *The local theta correspondence and the local Gan-Gross-Prasad conjecture for the symplectic-metaplectic case*, Math. Ann. **371** (2018), no. 1-2, 225–295.

[Bei86] A. Beilinson, *Notes on absolute Hodge cohomology*, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), 35–68, Contemp. Math., 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[Bei87] A. Beilinson, *Height pairing between algebraic cycles*, Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), 1–24, Contemp. Math., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Beu15] R. Beuzart-Plessis, *A local trace formula for the Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups: the archimedean case*, arXiv:1506.01452.

[Beu19] R. Beuzart-Plessis, *A new proof of Jacquet-Rallis's fundamental lemma*, arXiv:1901.02653.

[BLZZ19] R. Beuzart-Plessis, Y. Liu, W. Zhang and X. Zhu, *Isolation of cuspidal spectrum, with application to the Gan–Gross–Prasad conjecture*, arXiv:1912.07169.

[Blo84] S. Bloch, *Height pairings for algebraic cycles*, Proceedings of the Luminy conference on algebraic K-theory (Luminy, 1983). J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), no. 2-3, 119–145.

[GGP12] W. T. Gan, B. Gross and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Sur les conjectures de Gross et Prasad. I. Astérisque No. 346 (2012), 1–109.

[GI16] W. T. Gan and A. Ichino, *The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence*, Invent. Math. **206** (2016), no. 3, 705–799.

[GS95] B. Gross and C. Schoen, *The modified diagonal cycle on the triple product of a pointed curve*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), no. 3, 649–679.

[GZ86] B. Gross and D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math. **84** (1986), no. 2, 225–320.

[Har14] R. N. Harris, *The refined Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2014, no. 2, 303–389.

[Ich11] A. Ichino, *Trilinear forms and the central values of triple product L-functions*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 281–307.

[II10] A. Ichino and T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture*, Geom. Funct. Anal. **19** (2010), no. 5, 1378–1425.

[伊藤 13] 伊藤哲史, 局所 Langlands 対応の幾何的構成, 第 21 回整数論サマースクール報告集 「p 進簡約群の表現論入門」(2013), 525–554.

[JR11] H. Jacquet and S. Rallis, *On the Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, (English summary) On certain L-functions, 205–264, Clay Math. Proc., 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[Liu14] Y. Liu, *Relative trace formulae toward Bessel and Fourier-Jacobi periods on unitary groups*, Manuscripta Math. **145** (2014), no. 1-2, 1–69.

[Liu16] Y. Liu, *Refined global Gan-Gross-Prasad conjecture for Bessel periods*, J. Reine Angew. Math. **717** (2016), 133–194.

[Liu18] Y. Liu, *Fourier-Jacobi cycles and arithmetic relative trace formula*, preprint, available at `https://gauss.math.yale.edu/~yl2269/FJcycle.pdf`.

[Lok01] H. Y. Loke, *Trilinear forms of* $\mathfrak{gl}_2$, Pacific J. Math. **197** (2001), no. 1, 119–144.

[三枝 20] 三枝洋一, 志村多様体のエタールコホモロジー, 本報告集.

[Mih15] A. Mihatsch, *On the arithmetic fundamental lemma through Lie algebras*, Math. Z. **287** (2017), no. 1-2, 181–197.

[Mih16] A. Mihatsch, *Relative unitary RZ-spaces and the arithmetic fundamen-*

tal lemma, arXiv:1611.06520.

[MW12] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les groupes spéciaux orthogonaux: le cas général*, Sur les conjectures de Gross et Prasad. II. Astérisque No. 347 (2012), 167–216.

[MS19] S. Morel and J. Suh, *The standard sign conjecture on algebraic cycles: The case of Shimura varieties*, J. Reine Angew. Math. **748** (2019), 139–151.

[Ngô10] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **111** (2010), 1–169.

[Pra90] D. Prasad, *Trilinear forms for representations of* GL(2) *and local* ϵ*-factors*, Compositio Math. **75** (1990), no. 1, 1–46.

[RSZ15] M. Rapoport, B. Smithling and W. Zhang, *On the arithmetic transfer conjecture for exotic smooth formal moduli spaces*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 12, 2183–2336.

[RSZ16] M. Rapoport, B. Smithling and W. Zhang, *Regular formal moduli spaces and arithmetic transfer conjectures*, Math. Ann. **370** (2018), no. 3-4, 1079–1175.

[RSZ17] M. Rapoport, B. Smithling and W. Zhang, *Arithmetic diagonal cycles on unitary Shimura varieties*, arXiv:1710.06962.

[RZ96] M. Rapoport and T. Zink, *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, 141. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. xxii+324 pp.

[Sai93] H. Saito, *On Tunnell's formula for characters of GL(2)*, Compositio Math. **85** (1993), no. 1, 99–108.

[Sch91] A. J. Scholl, *Remarks on special values of L-functions*, L-functions and arithmetic (Durham, 1989), 373–392, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 153, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[Sch94] A. J. Scholl, *Height pairings and special values of L-functions*, Motives (Seattle, WA, 1991), 571–598, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[清水 20] 清水康司, 志村多様体の整モデル, 本報告集.

[SD67] P. Swinnerton-Dyer, *The conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer,* *and of Tate*, 1967 Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) pp. 132–157 Springer, Berlin.

[Tun83] J. B. Tunnell, *Local ϵ-factors and characters of* GL(2), Amer. J. Math. **105** (1983), no. 6, 1277–1307.

[Wal85] J.-L. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie*, Compositio Math. **54** (1985), no. 2, 173–242.

[Wal12] J.-L. Waldspurger, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux*, Sur les conjectures de Gross et Prasad. II. Astérisque No. 347 (2012), 103–165.

[Xue16] H. Xue, *Fourier-Jacobi periods and the central value of Rankin-Selberg L-functions*, Israel J. Math. **212** (2016), no. 2, 547–633.

[Xue19] H. Xue, *Arithmetic theta lifts and the arithmetic Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, Duke Math. J. **168**, no. 1 (2019), 127–185.

[YZZ12] X. Yuan, S.-W. Zhang and W. Zhang, *Triple product L-series and Gross-Schoen cycles*, preprint, available at `http://math.mit.edu/~wz2113/math/online/triple.pdf`.

[YZZ13] X. Yuan, S.-W. Zhang and W. Zhang, *The Gross-Zagier formula on Shimura curves*, Annals of Mathematics Studies, 184. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013. x+256 pp.

[Yun11] Z. Yun, The fundamental lemma of Jacquet and Rallis, With an appendix by Julia Gordon. Duke Math. J. **156** (2011), no. 2, 167–227.

[Zha12] W. Zhang, *On arithmetic fundamental lemmas*, Invent. Math. **188** (2012), no. 1, 197–252.

[Zha14a] W. Zhang, *Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L-function*, J. Amer. Math. Soc. **27** (2014), no. 2, 541–612.

[Zha14b] W. Zhang, *Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, Ann. of Math. (2) **180** (2014), no. 3, 971–1049.

[Zha19] W. Zhang, *Weil representation and arithmetic fundamental lemma*, arXiv:1909.02697.