Hermite 対称領域

阿部 紀行 *

1 はじめに

豊富な対称性を持つ Riemann 多様体を Riemann 対称空間と呼び，さらに複素構造を持つものを Hermite 対称空間，その中で「非コンパクト型」という条件を満たすものを Hermite 対称領域という．その代表的な例は上半平面に Poincaré 計量を入れたものであり，その合同部分群による商としてモジュラー曲線が得られる．この一般化として，志村多様体（の複素数値点）は Hermite 対称空間の数論的商の和として実現される．

本稿ではこの Hermite 対称領域に関する解説を試みる．Riemann 対称空間はその豊富な対称性故にその等長同型群が推移的に作用し，またこの等長同型群が Lie 群になることがわかる．更に非コンパクト型の場合に限れば，等長同型群が半単純代数群と呼ばれる $\mathbb{R}$ 上の代数群から得られる．一方で，$\mathbb{R}$ 上の半単純代数群から出発して非コンパクト型の対称空間を得ることもでき，ある意味での一対一対応が成り立つ．最初の節ではここまでの解説を行う．3 節では，Hermite 対称領域の例を扱う．3.1 には本文中（3 節以外の場所にも）現れる群の定義をまとめておいたので，適宜参照してほしい．

4 節では，Deligne [Del79] に従い，Hodge 構造と Hermite 対称領域の関係について述べる．例えば $\mathbb{R}^2$ の複素構造（これは Hodge 構造の一例である）J に対して，J の $\mathbb{C}^2$ 内の固有値 $-\sqrt{-1}$ の固有空間を考えることにより $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の元を与えることができるが，この像はちょうど $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ と一致し，Hermite 対称領域の構造を持つ．この状況の一般化となる．

既に述べたとおり，非コンパクト型 Riemann 対称空間は半単純代数群から得るこ

* 東京大学 大学院数理科学研究科　e-mail: abenori@ms.u-tokyo.ac.jp

とができる．5 節では，半単純代数群，さらにより一般に簡約代数群の構造論を解説する．ここでは $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上の代数群と仮定しているが，5.12 項までは基本的に $\mathbb{R}$ を標数 0 の体上に変えても成り立つ．志村多様体の理論には代数体上の簡約代数群が現れる．その際に参考になればよいと思う．

4 節を除き証明は殆どつけていないが，その代わり定理や命題には引用をつけている．しかし，記号の違いはもちろんのこと，論理展開や理論，設定の違いなどによりそのものずばりの引用となっていないことも多いため，自力で証明をつけるのは難しいマークくらいに捕らえてもらった方がよいかもしれない．なお，主な引用先として [KN96a, KN96b, Hel01, Spr09, Kna02] を使っている．体系的な理解にはこのあたりを読むと良いであろう．

記号

以下の記号を常に使う．

- 多様体といえば実解析的多様体である．
- 本稿で単に代数群といった場合は線型なもののみを考える．
- 群や多様体などの対象 X に対して，$\mathrm{Aut}(X)$ でその自己同型全体を表す．
- 群 G の単位元を e と書く．
- G の単位元を含む連結成分を，G が Lie 群ならば G^+ と，代数群ならば G^0 と書く．
- 代数群，群，Lie 環らの中心を $Z(\cdot)$ と書く．例えば代数群 G の中心は $Z(G)$ である．
- Riemann 多様体 X の等長同型全体を $\mathrm{Is}(X)$ と書く．
- $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間や代数群など X に対して，$X_{\mathbb{C}}$ で $\mathbb{C}$ への底変換を表す．
- $\mathbb{C}$ 上の代数群 G に対して，$\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G)$ で $\mathbb{R}$ への Weil 制限を表す．これは $R \mapsto G(R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ により定義される $\mathbb{R}$ 上の代数群である．
- 群 G が多様体 X に作用している時，$x \in X$ における固定部分群を $\mathrm{Stab}_G(x)$ と書く．
- ベクトル空間 V に対して，その線型同型全体を $\mathrm{GL}(V)$（代数群ないし Lie 群）と書く．V 上に対称双線型形式 B が与えられているとき，$\mathrm{O}(V, B) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid B(gx, gy) = B(x, y)\ (x, y \in V)\}$ とおく．

- 群 G とその元 $g \in G$ に対して，$h \mapsto ghg^{-1}$ により与えられる G の自己同型を $\mathrm{Ad}(g)$ と書く．
- Lie 群 G に対して，その Lie 環を $\mathrm{Lie}(G)$ と書く．$g \in G$ に対して $\mathrm{Ad}(g)\colon G \to G$ が引き起こす $\mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$（随伴表現）を同様に $\mathrm{Ad}(g)$ と書く．G が代数群でも同様の記号を使う．
- 多様体 X に対して，$x \in X$ での接空間を T_xX と書く．
- $n \times n$ 行列全体を M_n と書き，$1_n \in M_n$ を単位行列とする．
- 行列 A に対して，その転置行列を ${}^tA$ と書く．
- $R \mapsto R$ で与えられる代数群を $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$，$R \mapsto R^\times$ で与えられる代数群を $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ と書く．

2 対称空間

2.1 定義

定義 2.1 連結な Riemann 多様体 X が **Riemann 対称空間**であるとは，以下の同値な条件を満たすことである．

(1) $X \neq \emptyset$ であり，任意の点 $x \in X$ に対して x が s_x の孤立固定点となるような対合 $s_x \in \mathrm{Is}(X)$ が存在する．
(2) ある点 $x \in X$ に対して (1) のような s_x が存在し，また $\mathrm{Is}(X)$ は X に推移的に作用する．

更に X が複素多様体の構造を持ち，その計量が複素構造に関して不変である時，X を **Hermite 対称空間**と呼ぶ[*1]．

s_x は x を固定するので，接空間 T_xX の自己同型を引き起こすが，これが -1 倍であることに注意しよう．実際，s_x は対合，つまり $s_x^2 = \mathrm{id}$ を満たすので，T_xX は s_x の固有値 1 及び -1 の固有空間へと分解される．しかし，もし固有値 1 の固有ベクトルが存在すれば，s_x はその方向に自明に作用することになり，x が孤立固定点であるという仮定に反する．よって s_x は T_xX 上 -1 倍である．特に，γ を x を始点とする測地線とすれば $s_x(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ が成り立つ．

[*1] 定義内の s_x は正則になる [KN96b, Chapter XI, §9].

定義内の同値性について簡単に述べておく．(2) から (1) が従うのはほぼ明らかであるので，逆を示そう．まず，このとき X が完備であることを示そう．γ を $[0,t_0]$ で定義されている測地線とし，$t\in[t_0,2t_0]$ に対して $\gamma(t)=s_{\gamma(t_0)}(\gamma(2t_0-t))$ と定めると，これは $[t_0,2t_0]$ 上で定義された測地線となることがわかる．よって測地線は常に $\mathbb{R}$ 上で定義され，従って X は完備となる．Hopf-Rinow の定理 [KN96a, Chapter IV, Theorem 4.2] から，$x,y\in X$ に対して，ある測地線 γ であって $\gamma(0)=x$，$\gamma(t_0)=y$ ($t_0\in\mathbb{R}$) となるものが存在する．このとき $s_{\gamma(t_0/2)}(x)=y$ となり，$\mathrm{Is}(X)$ は X に推移的に作用することがわかる．

命題 2.2 Riemann 対称空間は完備である．

定義から $\mathrm{Is}(X)$ は X に推移的に作用する．この $\mathrm{Is}(X)$ はコンパクト開位相，つまり $\{\{g\in\mathrm{Is}(X)\mid g(C)\subset U\}\mid C\subset M$ はコンパクト，$U\subset M$ は開 $\}$ を開基とする位相により Hausdorff な位相群となり，$\mathrm{Is}(X)$ の X への作用は連続となる．

定理 2.3 ([Hel01, Chapter IV, Lemma 3.2]) 位相群 $\mathrm{Is}(X)$ は唯一の実解析的 Lie 群の構造を持つ．

X は連結と仮定していたので，$\mathrm{Is}(X)^+$ も X に推移的に作用する．$x\in X$ を固定しよう．すると，$X\simeq\mathrm{Is}(X)/\mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)}(x)\simeq\mathrm{Is}(X)^+/\mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)^+}(x)$ である．$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)}(x)$ は接空間 T_xX に等長的に作用する，つまり $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)}(x)\to\mathrm{O}(T_xX)$ を与える．さらにこれは単射である．実際 $g\in\mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)}(x)$ が T_xX の全ての元を止めていたとすると，x を始点とする全ての測地線を固定する．しかし X は完備であったので，これは g が X に自明に作用することを意味する．$\mathrm{O}(T_xX)$ はコンパクトであるので，$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)}(x)$ もコンパクトとなる．

更に $s_x\colon X\to X$ を使い，$\mathrm{Is}(X)$ 上の対合 θ を $g\mapsto s_xgs_x^{-1}$ と定めよう．

補題 2.4 $\{g\in\mathrm{Is}(X)\mid\theta(g)=g\}^+\subset\mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)}(x)\subset\{g\in\mathrm{Is}(X)\mid\theta(g)=g\}$.

証明 $\theta(g)=g$ ならば $g(x)=s_xg(x)$ である．x は s_x の孤立固定点であるので，g が単位元に十分近ければ $g(x)=x$．一般に連結位相群は単位元の近傍で生成される[*2]ので，これより一つ目の包含関係がわかる．次に $g(x)=x$ とし，$s'=gs_xg^{-1}$

*2 $U\subset G$ を単位元を含む開集合，H を U の生成する G の部分群とすると $H=\bigcup_{h\in H}hU$ より H は開．一方 $H=G\setminus\bigcup_{g\in G\setminus H}gH$ より H は閉でもあるので，G が連結ならば $G=H$.

とおく．これは x を孤立固定点とする対合であり，x を始点とする測地線 γ に対して $s'(\gamma(t)) = \gamma(-t) = s_x(\gamma(t))$ を満たす．X は完備であったから，$\gamma(t)$ は任意の点を表すことができ，よって $s' = s_x$． □

$G = \mathrm{Is}(X)^+$，$K = \mathrm{Stab}_G(x)$，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ とおこう．θ は $\mathfrak{g}$ の対合を与え，上の補題から $\mathfrak{k}$ は θ の固定部分と一致する．

定義 2.5 $X \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ で定めると，これは Lie 環の間の準同型 $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を定める．これから定まる $\mathfrak{g}$ の表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ を**随伴表現**という．

定義 2.6 $\mathbb{R}$ 上の有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその上の対合 θ の組 $(\mathfrak{g}, \theta)$ が**直交対称 Lie 環**であるとは，$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$ 不変な内積が $\mathfrak{g}$ 上に存在することである．ただし $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ に ad を通じて作用し，内積 $(\cdot, \cdot)$ が $\mathfrak{k}$ 不変であるとは，$(\mathrm{ad}(X)Y, Z) = -(Y, \mathrm{ad}(X)Z)$ が $X \in \mathfrak{k}$，$Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して成立することである．更に $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} = 0$ の時**効果的**であるという．

X が Riemann 対称空間であり，$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta$ が上の手順で得られるとき，$\mathfrak{k}$ はコンパクト Lie 群の Lie 環である．一般にコンパクト Lie 群の任意の有限次元表現は群作用に関して不変な内積を持つため，$\mathfrak{g}$ 上に $\mathfrak{k}$ 不変な内積を定めることができる．従って $(\mathfrak{g}, \theta)$ は直交対称 Lie 環である．更に次の補題から，$(\mathfrak{g}, \theta)$ は効果的でもある．

補題 2.7 $Z(\mathrm{Is}(X)^+) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)^+}(x) = 1$.

証明 $g \in Z(\mathrm{Is}(X)^+) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{Is}(X)^+}(x)$ とする．$\mathrm{Is}(X)^+$ が X に推移的に作用することから，任意の $y \in X$ に対して $y = h(x)$ となる $h \in \mathrm{Is}(X)^+$ が存在する．よって $gy = gh(x) = hg(x) = h(x) = y$ となり，g は y を固定する．従って $g = 1$． □

2.2 Lie 群と Lie 環

Lie 群と Lie 環に関する諸概念を導入する．

定義 2.8 $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ 上の双線型形式 B を $B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$ と定める．これを **Killing 形式**という．

練習 2.9 (1) Killing 形式 B は $\mathfrak{g}$ 不変, つまり $B(\mathrm{ad}(X)Y, Z) = -B(Y, \mathrm{ad}(X)Z)$

を満たすことを示せ．

(2) $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を同型写像とすると，$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $B(f(X), f(Y)) = B(X, Y)$ となることを示せ．

対称空間の文脈では次で定義される半単純 Lie 環が重要である．

定義 2.10 $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする．

(1) $\mathfrak{g}$ が **Abel** であるとは，任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $[X, Y] = 0$ となることである．
(2) $\mathfrak{g}$ が Abel でなく $\{0\}$ および全体以外のイデアルを持たない時**単純**であると言う．
(3) 単純 Lie 環の直和と同型な Lie 環を**半単純 Lie 環**という．
(4) 半単純 Lie 環と Abel な Lie 環の直和と同型な Lie 環を**簡約 Lie 環**という．

練習 2.11 (1) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ は単純 Lie 環であることを示せ．
(2) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ は半単純ではないが簡約であることを示せ．

命題 2.12（[Kna02, Theorem 1.45, Theorem 1.54]） 標数 0 の体上の Lie 環に対して以下は同値．

(1) 半単純．
(2)（**Cartan 判定法**）Killing 形式が非退化．
(3) 0 でない可解なイデアルを持たない．

定義 2.13 連結 Lie 群 G は，その Lie 環 $\mathrm{Lie}(G)$ が単純，半単純である時それぞれ**単純**，**半単純**であるという．

代数群に対する諸概念の定義も与えておこう．これらについては節 5 で詳しく論じる．志村多様体の理論においては簡約な代数群が中心的な役割を果たす．

定義 2.14 (1) 連結代数群が**単純**であるとは，可換でなく，更に $\{e\}$ および全体以外の連結正規閉部分群を持たないことである．
(2) 連結代数群が**半単純**であるとは，$\{e\}$ 以外の連結可解正規閉部分群を持たないことである．
(3) 連結代数群が**簡約**であるとは，$\{e\}$ 以外の連結冪単正規閉部分群を持たないこ

とである．

(4) 連結半単純代数群が**随伴型**であるとは，その中心が自明なことである．

2.3 対称空間の分解

直交対称 Lie 環を分解することで，対称空間の分解を行おう．以下この項では $(\mathfrak{g},\theta)$ を直交対称 Lie 環とし，$\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式を B，$\mathfrak{k},\mathfrak{p}$ を θ のそれぞれ固有値 $1,-1$ の固有空間とする．次は簡単に確認できる．

補題 2.15 (1) $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k}$，$[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{k}$，$[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$.

(2) $B(\mathfrak{k},\mathfrak{p})=0$.

定義 2.16 $(\mathfrak{g},\theta)$ が効果的であるとする．

(1) $(\mathfrak{g},\theta)$ が **Euclid 型**であるとは B が $\mathfrak{p}$ 上 0 であること．

(2) $(\mathfrak{g},\theta)$ が**コンパクト型**であるとは，B が $\mathfrak{p}$ 上負定値であること．

(3) $(\mathfrak{g},\theta)$ が**非コンパクト型**であるとは，$\mathfrak{g}\neq\mathfrak{k}$ かつ B が $\mathfrak{p}$ 上正定値であること．

注意 2.17 $(\mathfrak{g},\theta)$ が直交対称 Lie 環である，つまり $\mathfrak{g}$ 上に $\mathfrak{k}$ 不変な内積があると仮定する．すると $\mathfrak{k}$ 不変の定義から，$Y\in\mathfrak{k}$ に対して $\mathrm{ad}(Y)=-{}^t\mathrm{ad}(Y)$ が $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の元として成立する．(^{t} はこの内積に関する随伴行列．）よって $B(Y,Y)=-\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{ad}(Y)\,\mathrm{ad}(Y))\leq 0$ であり，B は $\mathfrak{k}$ 上半負定値．また $B(Y,Y)=0$ ならば $\mathrm{ad}(Y)=0$，つまり $Y\in Z(\mathfrak{g})$ である．特に $(\mathfrak{g},\theta)$ が効果的ならば $Y=0$．つまり B は $\mathfrak{k}$ 上負定値である．特に B は $\mathfrak{k}$ 上非退化．

更に $(\mathfrak{g},\theta)$ がコンパクト型または非コンパクト型であるとすると，B は $\mathfrak{p}$ 上でも非退化であるので，B は $\mathfrak{k}+\mathfrak{p}=\mathfrak{g}$ 上非退化となる．（補題 2.15 から，B に関して $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ は直交している．）従って Cartan の判定法から $\mathfrak{g}$ は半単純である．

Riemann 対称空間はそこから項 2.1 の手続きで作られる直交対称 Lie 環がコンパクト型，非コンパクト型，Euclid 型である時，それぞれコンパクト型，非コンパクト型，Euclid 型であるという．非コンパクト型 Hermite 対称空間を **Hermite 対称領域**と呼ぶ．志村多様体の理論においてはこれが重要である．なお，「対称空間」と「対称領域」が少しややこしいようにも思えるので，ここでは常に「非コンパクト型 Hermite 対称空間」と呼ぶことにする．(Hermite 対称領域という名前も非常によく

使われる．）

注意 2.18 名前の通り，Riemann 対称空間 X に対して，X がコンパクト型ならばコンパクト，非コンパクト型ならば非コンパクトである [KN96b, Chapter XI, Theorem 8.6]．

定義の幾何学的意味は次の通り．

定理 2.19（[Hel01, Chapter V, Theorem 3.1]） X を Riemann 対称空間とする．

(1) X が Euclid 型ならば断面曲率は全ての点で 0．
(2) X がコンパクト型ならば断面曲率は全ての点で非負．
(3) X が非コンパクト型ならば断面曲率は全ての点で非正．

さて，$(\mathfrak{g},\theta)$ が効果的であるとする．$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0\oplus\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{p}_-$ を $\mathfrak{k}$ 不変な分解であって，B が $\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-$ 上それぞれ 0，正定値，負定値となっているようなものとする．更に $\mathfrak{k}_+=[\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_+]$，$\mathfrak{k}_-=[\mathfrak{p}_-,\mathfrak{p}_-]$ とおき，$\mathfrak{k}_0$ を $\mathfrak{k}$ における B に関する $\mathfrak{k}_+\oplus\mathfrak{k}_-$ の直交補空間とする．（注意 2.17 で述べたとおり B は $\mathfrak{k}$ 上負定値である．）$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0$，$\mathfrak{g}_+=\mathfrak{k}_+\oplus\mathfrak{p}_+$，$\mathfrak{g}_-=\mathfrak{k}_-\oplus\mathfrak{p}_-$ とおく．

定理 2.20 ([Hel01, Chapter V, Theorem 1.1]) Lie 環としての分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-$ が成り立ち，θ はこの分解を保つ．θ の $\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_+,\mathfrak{g}_-$ への制限をそれぞれ $\theta_0,\theta_+,\theta_-$ とすると，$(\mathfrak{g}_0,\theta_0)$ は Euclid 型，$(\mathfrak{g}_-,\theta_-)$ はコンパクト型，$(\mathfrak{g}_+,\theta_+)$ は非コンパクト型の効果的な直交対称 Lie 環である．

X を Riemann 対称空間とし，$G=\mathrm{Is}(X)^+$ とおく．$\pi\colon\widetilde{G}\to G$ を G の普遍被覆群とすると，上の分解に応じて $\widetilde{G}=\widetilde{G}_0\times\widetilde{G}_+\times\widetilde{G}_-$ と分解する．$x\in X$ の固定部分群 $K=\mathrm{Stab}_G(x)$ に対して $\widetilde{K}=\pi^{-1}(K)^+$ とおくとこれも $\widetilde{K}=\widetilde{K}_0\times\widetilde{K}_+\times\widetilde{K}_-$ と分解する．$\widetilde{G}/\widetilde{K}\twoheadrightarrow G/K=X$ は被覆写像であり，もし X が単連結ならばこれは同型となる．よって $X=\widetilde{G}_0/\widetilde{K}_0\times\widetilde{G}_+/\widetilde{K}_+\times\widetilde{G}_-/\widetilde{K}_-$ となり，各々は Euclid 型，非コンパクト型，コンパクト型である．

定理 2.21（[Hel01, Chapter V, Proposition 4.2]） 単連結な Riemann 対称空間は Euclid 型，コンパクト型，非コンパクト型の直積に分解される．

注意 2.22 この定理において，Euclid 型の部分は Euclid 空間となる．これを簡

単に見ておこう．X を単連結 Euclid 型 Riemann 対称空間とし，得られる効果的直交対称 Lie 環を $(\mathfrak{g}, \theta)$ とする．$X, Y \in \mathfrak{p}$ に対して $0 = -B(Y, [X, [X, Y]]) = B([X, Y], [X, Y])$ となる．$[X, Y] \in \mathfrak{k}$ であり，また B は $\mathfrak{k}$ 上負定値であるので $[X, Y] = 0$．よって $\mathfrak{p}$ は可換なイデアルとなり，$P = \exp(\mathfrak{p})$ は可換な正規部分群．これと G が $\exp(\mathfrak{p})K$ で生成されるという事実から[*3]，$G = PK$，つまり P は $X \simeq G/K$ に推移的に作用する．$\mathfrak{p} \simeq \mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(K) \simeq T_xX$ であることから $\mathrm{Stab}_P(x)$ は離散的，よって $P \to G/K = X$ は被覆写像である．$\exp\colon \mathfrak{p} \to P$ も被覆写像であり，X は単連結であるから $\mathfrak{p} \simeq X$ となる．

$(\mathfrak{g}, \theta)$ をコンパクト型または非コンパクト型の効果的直交対称 Lie 環とする．このとき $\mathfrak{g}$ は半単純であるので，単純 Lie 環の直和へと分解する：$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}'_r$．$\theta$ は $\{\mathfrak{g}'_i\}_{1 \leq i \leq r}$ の置換を引き起こす．$\theta(\mathfrak{g}'_i) = \mathfrak{g}'_i$ であるか否かで場合わけを行うことにより，分解 $(\mathfrak{g}, \theta) = \bigoplus_i (\mathfrak{g}_i, \theta_i)$ であって，各 i に対して

- $\mathfrak{g}_i$ は単純 Lie 環
- ある単純 Lie 環 $\mathfrak{g}'$ により $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'$，$\theta_i(X, Y) = (Y, X)$

のいずれかが成り立つものが存在する．一般に，Riemann 対称空間から節 2.1 の手続きで得られる直交対称 Lie 環が上のどちらかを満たすとき，その Riemann 対称空間を既約であると言う．

定理 2.23（[Hel01, Chapter VIII, Proposition 5.5]） コンパクト型または非コンパクト型の単連結 Riemann 対称空間は既約な Riemann 対称空間の直積へと分解する．

2.4 Cartan 対合

次が成り立つ．

定理 2.24 X を非コンパクト型対称空間とすると，$G(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Is}(X)^+$ となる連結随伴型半単純代数群 G が存在する．更に $x \in X$ に対して $\theta(g) = s_x g s_x^{-1}$ で与えられる $\theta\colon \mathrm{Is}(X)^+ \to \mathrm{Is}(X)^+$ は G 上の Cartan 対合（以下で定義する）にのびる．

[*3] $\exp(\mathfrak{p})K$ は原点を含む開集合を含む．

本定理に関する説明は次項に回すこととし，この項では Cartan 対合に関する説明を行う．

定義 2.25 G を $\mathbb{R}$ 上の代数群とする．対合 $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ が **Cartan 対合**であるとは

$$\{g \in G(\mathbb{C}) \mid \theta(c(g)) = g\}$$

がコンパクトとなることである．ただし $c\colon G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$ は複素共役．

例 2.26 $G \subset \mathrm{GL}_n$ とし，$g \in G$ ならば ${}^t g \in G$ であるとする．このとき $\theta(g) = {}^t g^{-1}$ とおくと，

$$\{g \in G(\mathbb{C}) \mid \theta(c(g)) = g\} \subset \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t c(g)^{-1} = g\} = \mathrm{U}(n)$$

となるので，$\mathrm{U}(n)$ がコンパクトであることから θ は Cartan 対合である．より一般に，$G \subset \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{GL}_n)$ であり $g \in G$ ならば ${}^t \overline{g} \in G$ であるとすると，$\theta(g) = {}^t \overline{g}^{-1}$ は Cartan 対合である．（ただし $\overline{g}$ は $\mathrm{GL}_n \subset \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{GL}_n)$ に関する複素共役．）

練習 2.27 $G = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{GL}_n)$，$\theta(g) = {}^t \overline{g}^{-1}$ とする．$G(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 上の θ 及び c を書き下すことにより，$\{g \in G(\mathbb{C}) \mid \theta(c(g)) = g\} = \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$ となることを示せ．

注意 2.28 実は任意の Cartan 対合はこの形で書ける．より強く，任意の埋め込み $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ に対して，V の内積であって θ が $g \mapsto {}^t g^{-1}$ で実現される物が存在する．

実際，$H = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid \theta(c(g)) = g\}$ として，$V_{\mathbb{C}}$ に $H(\mathbb{R})$ 不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を導入しよう．$g \in H(\mathbb{R})$ ならば $\langle gv, w \rangle = \langle v, g^{-1} w \rangle = \langle v, \theta(c(g))^{-1} w \rangle$ である．両辺は g に関して正則なので，この式は任意の $g \in H(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C})$ に対して成り立つ．特に $g \in G(\mathbb{R})$ ならば $\langle gv, w \rangle = \langle v, \theta(g)^{-1} w \rangle$ であり，この内積の $V \subset V_{\mathbb{C}}$ への制限に関して $\theta(g) = {}^t g^{-1}$ が成り立つ．

[Sat80, Chapter I, Theorem 4.2, Corollary 4.4] と併せて次を得る．

定理 2.29 連結な線型代数群が Cartan 対合を持つことと簡約であることは同値である．また，Cartan 対合は共役を除きただ一つしかない．

半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対する Cartan 対合の概念も存在する．

定義 2.30 $\mathfrak{g}$ 上の対合 θ が Cartan 対合であるとは，$(X,Y) \mapsto B(X,\theta(Y))$ が負定値であることである．

練習 2.31 $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ 上の Lie 環，θ をその上の恒等写像でない対合とする．$(\mathfrak{g},\theta)$ が非コンパクト型の効果的直交対称 Lie 環ならば，θ は Cartan 対合となることを示せ．

命題 2.32 G を連結半単純代数群，θ を G 上の対合とする．このとき θ が Cartan 対合であることと，$\mathfrak{g}$ 上に引き起こされる対合が Cartan 対合であることは同値．

証明 まず次の事実に注意する．

> 中心が離散的な連結 Lie 群 H に対して，$H/Z(H)$ がコンパクトであることと Killing 形式 B が $\mathrm{Lie}(H)$ 上負定値であることは同値．

実際，$H/Z(H)$ がコンパクトならば注意 2.17 の議論から B は負定値．逆に B が負定値ならば $\mathrm{Ad}\colon H/Z(H) \hookrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{Lie}(H),B)$ とコンパクト群に埋め込まれる．

半単純な代数群 H を $H = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid \theta(c(g)) = g\}$ により定める．このとき H の中心は有限なので，上の事実から $H(\mathbb{R})$ がコンパクトであることと $\mathrm{Lie}(H)$ 上 B が負定値であることは同値．一方 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を θ に関する固有空間分解とすると，$\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ であり，これは B に関する直交分解．よって B が $\mathrm{Lie}(H)$ 上負定値であることは，$\mathfrak{k}$ 上負定値，$\mathfrak{p}$ 上正定値となることと同値．これは $(X,Y) \mapsto B(X,\theta(Y))$ が $\mathfrak{g}$ 上負定値なことと同値である． □

注意 2.33 連結半単純 Lie 群に対して，その Lie 環上の Cartan 対合を与えるような対合をやはり Cartan 対合という．このとき，Cartan 対合の固定部分群はコンパクトになるとは限らない[*4]が，そのほかここで述べている性質に関してはそのままの形で Lie 群に対しても成立する [Kna02, Chapter VI].

以下 G を簡約群とし，θ を Cartan 対合としよう．$K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ とおく．$K(\mathbb{R}) \subset \{g \in G(\mathbb{C}) \mid \theta(c(g)) = g\}$ より $K(\mathbb{R})$ はコンパクトである．

定理 2.34（[Sat80, Chapter I, Corollary 4.5]） $K(\mathbb{R})$ は $G(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群である．特に G が半単純ならば $Z(G)(\mathbb{R}) \subset K(\mathbb{R})$[*5].

[*4] コンパクトであるための必要十分条件はもとの Lie 群の中心が有限であること．中心が無限になる例は，注意 2.36 (4).

[*5] $Z(G)(\mathbb{R})K(\mathbb{R})$ は $K(\mathbb{R})$ を含むコンパクト群なので.

$\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ を θ の $\mathfrak{g}$ 内のそれぞれ固有値 $1, -1$ の固有空間とする．分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を **Cartan 分解**と呼ぶ．$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ である．

定理 2.35（[Sat80, Chapter I, Corollary 4.5]） $(k, X) \mapsto k\exp(X)$ により導かれる $K(\mathbb{R}) \times \mathfrak{p} \to G(\mathbb{R})$ は微分同相．（これも **Cartan 分解**，または**大域 Cartan 分解**と呼ぶ．）

注意 2.36 特に $K(\mathbb{R})$ と $G(\mathbb{R})$ はホモトピー同値である．この事実は $G(\mathbb{R})$ の位相的構造を見るのに便利なことが多い．いくつか例を挙げておこう．

(1) $G = \mathrm{SO}(p, q)$ $(p, q \geq 1)$．このとき $K = \mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q))$ である．$\mathrm{O}(p)$ はその行列式の正負によって二つの連結成分に分かれることから，$\pi_0(K(\mathbb{R})) = 2$（各成分の行列式が $(+, +)$ か $(-, -)$ となるものが二つの連結成分）．よって $\mathrm{SO}(p, q)(\mathbb{R})$ は二つの連結成分を持つ．

(2) G_1 を $G_1(\mathbb{R})$ がコンパクトな連結代数群とし，$G = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}((G_1)_{\mathbb{C}})$ とおく．Cartan 対合は G_1 に対する共役で与えられ，$K = G_1$ である．よって $\pi_0(G_1(\mathbb{R})) = \pi_0(G(\mathbb{R})) = \pi_0(G_1(\mathbb{C}))$．これは G_1 の連結性の仮定から自明である．つまり，$G_1(\mathbb{R})$ がコンパクトになるような代数群に対して，G_1 が代数群として連結ならば $G_1(\mathbb{R})$ は位相群として連結．特に，一般に簡約群 G とその Cartan 対合の固定部分群 K に対して，$K(\mathbb{R})^+ = K^0(\mathbb{R})$ である．

(3) $G = \mathrm{SL}_2$．$K = \mathrm{SO}(2)$ であり，$\pi_1(G(\mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ となる．特に $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は非自明な被覆を持つ．一方代数群 SL_2 は単連結であるため，この非自明な被覆は代数的にはなり得ない．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の二重被覆群は Weil 表現と呼ばれる表現を持ち，重要な意味を持つ．

(4) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の普遍被覆とその上の Cartan 対合 θ を考えると，θ の固定部分群は $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ の普遍被覆である $\mathbb{R}$ と同型になる．特にこの群はコンパクトではない．

練習 2.37 $\mathrm{GU}(p, q)$ は $p = q$ ならば二つの連結成分を持ち，そうでなければ連結となることを示せ．

2.5 代数群

定理 2.24 に戻ろう．X を非コンパクト型 Riemann 対称空間とし，$x \in X$ を固定する．$H = \mathrm{Is}(X)^{+}$[*6]，$K' = \mathrm{Stab}_H(x)$，$\theta'(g) = s_x g s_x^{-1}$ とおく．

項 2.3 において，$(\mathrm{Lie}(H), \theta') = \bigoplus_i (\mathfrak{h}_i, \theta_i)$ という分解を得ていたことを思い出そう．この分解に応じて，X も $X = \prod X_i$，$\mathrm{Lie}(\mathrm{Is}(X_i)^+) = \mathfrak{h}_i$ と分解する．$(\mathfrak{h}_i, \theta_i)$ は次の二つのパターンに分かれるのであった．

(1) $\mathfrak{h}_i$ は単純．
(2) $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_i' \oplus \mathfrak{h}_i'$，$\theta_i(X, Y) = (Y, X)$．

補題 2.38 (2) の場合に X_i はコンパクト型になる．

練習 2.39 この補題を示せ．

従って，非コンパクトであるという仮定から (2) は現れないことがわかる．

更に X が既約であると仮定しよう．すると H は単純であり，また練習 2.31 から θ' は（Lie 群 H の）Cartan 対合である．注意 2.36 から $\{g \in H \mid \theta'(g) = g\}$ は H とホモトピー同値であるので特に連結．従って補題 2.4 から K' と一致する．特に $Z(H) \subset K'$．一方補題 2.7 から $Z(H) \cap K'$ は自明．よって $Z(H)$ も自明である．従って $\mathrm{Ad}\colon H \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(H))$ は単射，つまり H は $\mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(H))$ の部分群と見なせる．一方 $\mathrm{Lie}(H)$ は半単純なので，$[\mathrm{Lie}(H), \mathrm{Lie}(H)] = \mathrm{Lie}(H)$ [Kna02, Corollary 1.55]．[Bor91, 7.9 Corollary] から次を得る．

命題 2.40 $G(\mathbb{R})^+ \simeq H$ となる随伴型半単純代数群 G が存在する．

G は特に簡約であるので Cartan 対合 θ を持ち，その H への制限は H の Cartan 対合である．Cartan 対合の一意性から，ある $h \in H$ が存在し $\theta' = (\mathrm{Ad}(h) \circ \theta \circ \mathrm{Ad}(h)^{-1})|_H$．よって θ を $\mathrm{Ad}(h) \circ \theta \circ \mathrm{Ad}(h)^{-1}$ に取り替えることで，θ は H 上 θ' と一致するとしてよく，これにより定理 2.24 を得る．

$K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ とおく．$\theta|_H = \theta'$ であることから $K' = K(\mathbb{R}) \cap H = K(\mathbb{R}) \cap G(\mathbb{R})^+ = K(\mathbb{R})^+$，これから $X \simeq G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+$ である．さらに $K(\mathbb{R})$ と

[*6] 後で G を代数群に使うので，ここでは前項までと違い H を使う

$G(\mathbb{R})$ はホモトピー同値であったので，$G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+ \simeq G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ となる．

逆に G を一般に $G(\mathbb{R})$ が非コンパクトな連結簡約代数群とし，θ を Cartan 対合，$K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ とおくと，$K(\mathbb{R})$ はコンパクトであるから $T_{eK(\mathbb{R})}(G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R}))$ は $K(\mathbb{R})$ 不変な内積を持つ．これを $G(\mathbb{R})$ の作用で全体にのばすことにより，$G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ に $G(\mathbb{R})$ 不変な Riemann 計量を与えることができる．$G(\mathbb{R})$ は $G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ に $G(\mathbb{R}) \to \mathrm{Is}(G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R}))$ を通じて作用するが，$G(\mathbb{R})$ は明らかに $G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ に推移的に作用するので，$\mathrm{Is}(G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R}))$ も $G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ に推移的に作用する．更に，θ は $eK(\mathbb{R}) \in G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ を孤立固定点とする対合を与えるので，これにより $G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$ は Riemann 対称空間となる．もし G が半単純ならば，これは構成から非コンパクトである．

以上の対応により，次の一対一対応を得る．

定理 2.41 次の同型類の間に一対一対応が存在する．

(1) 非コンパクト型既約 Riemann 対称空間．（ただし，計量が正数倍で移り合うものは同一視する．）

(2) $\mathbb{R}$ 上の随伴型代数群 G であって，$G(\mathbb{R})^+$ が単純かつ非コンパクトなもの．

このような G は分類されている（項 5.12 を参照）ので，それに応じて非コンパクト型既約 Riemann 対称空間も分類ができる．

2.6 Hermite 対称空間

Hermite 対称空間が Riemann 対称空間として Euclid 型，コンパクト型，非コンパクト型である時，Euclid 型，コンパクト型，非コンパクト型であるという．

定理 2.42（[Wol64, Lemma 1]） Hermite 対称空間は Euclid 型，コンパクト型，非コンパクト型 Hermite 対称空間の直積へと分解し，さらにコンパクト型，非コンパクト型 Hermite 対称空間はそれぞれ既約なコンパクト型，非コンパクト型 Hermite 対称空間の直積へと分解する．

以下 X を非コンパクト型 Hermite 対称空間，G を $G(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Is}(X)^+$ となる随伴型半単純代数群，$x \in X$ を固定してそこから定まる G の Cartan 対合を θ とし，θ の固定部分群を K とおく．$K(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(x)$ である．Hermite 対称空間 X に

対しては，今まで考えていた $\mathrm{Is}(X)$ の他に正則同型全体 $\mathrm{Hol}(X)$ が作用するが，次の命題によりこの二つはほぼ一致する．特に $\mathrm{Is}(X)^+ = G(\mathbb{R})^+$ の元は全て X に正則に作用する．

命題 2.43（[Hel01，Chapter VIII，Lemma 4.3]，[Mil05，Proposition 1.6]） $\mathrm{Hol}(X)^+ = \mathrm{Is}(X)^+ = (\mathrm{Hol}(X) \cap \mathrm{Is}(X))^+$.

重要な役割を持つ準同型写像 $u\colon \mathrm{U}(1) \to Z(K^0)$ を導入しよう．z を絶対値 1 の複素数とすると，z 倍は T_xX に距離を保ち作用する．すなわち $u\colon \mathrm{U}(1) \to \mathrm{GL}(T_xX)$ を得る．

命題 2.44 u は $u\colon \mathrm{U}(1) \to \mathrm{Is}(X)$ に伸び，よって $u\colon \mathrm{U}(1) \to K(\mathbb{R})^+$ を与える．

$K(\mathbb{R})^+$ は X に正則に作用するので，T_xX への複素数倍と可換である．特に $\mathrm{Im}(u)$ の元と T_xX 上で可換．一方 $K(\mathbb{R})^+ \to \mathrm{GL}(T_xX)$ は単射であったので（項 2.1），これから $\mathrm{Im}(u)$ は $K(\mathbb{R})^+$ の元と可換，つまり $\mathrm{Im}(u) \subset Z(K(\mathbb{R})^+)$ となる．$u(z)$ は $T_{eK(\mathbb{R})}G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{p}$ 上に z 倍で作用するので，次を満たす．

$u(z)$ の $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 上の固有値は z, z^{-1} である．

逆にこのような写像の存在は X が Hermite 対称空間であることを特徴付ける．注意 2.36 から $K(\mathbb{R})^+ = K^0(\mathbb{R})$ であることに注意しておく．次が成り立つ（項 5.14 を参照）．

定理 2.45 X を非コンパクト型 Riemann 対称空間，G を $G(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Is}(X)^+$ となる代数群，θ を G の Cartan 対合，$K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ とおく．以下は同値．

(1) X は Hermite 対称空間．
(2) ある実 Lie 群の間の準同型 $u\colon \mathrm{U}(1) \to Z(K(\mathbb{R})^+)$ で上の固有値に関する条件を満たすものが存在する．
(3) ある代数群の間の準同型 $u\colon \mathrm{U}(1) \to Z(K^0)$ で上の固有値に関する条件を満たすものが存在する．
(4) $Z_{\mathfrak{g}}(Z(\mathfrak{k})) = \mathfrak{k}$.

更に X が既約ならば，次の二つも同値 [Hel01, Chapter VIII, Theorem 6.1, Proposition 6.2].

(5) $Z(\mathfrak{k}) \neq 0$.
(6) $\dim Z(\mathfrak{k}) = 1$.

注意 2.46 定義から $u(-1)$ は x を固定し，T_xX に -1 倍で作用する．従って $u(-1)$ は x を孤立固定点とする対合であり，s_x と一致する．特に，定理 2.24 から Cartan 対合 θ を $\theta = \mathrm{Ad}(u(-1))$ で与えることができる．

例 2.47 $G = \mathrm{SO}(p,q), p \geq q$ とすると，$K = \mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)), K^0 = \mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q)$ である．$\mathfrak{so}(n)$ の中心は $n = 2$ ならば 1 次元，それ以外は 0 次元であるので，$\dim Z(\mathfrak{k}) = 1$ となるのは $(p,q) = (2,1), (p,2)$ $(p \geq 3)$ に限る．よって $\mathrm{SO}(p,q)^+/(\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q))$ が既約な Hermite 対称空間となるのは $(p,q) = (2,1), (p,2)$ $(p \geq 3)$ の時に限る．なお $p = q = 2$ の時 $\mathrm{SO}(2,2)$ は単純ではなく，$\mathrm{SO}(2,2)^+/(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2))$ は Hermite 対称空間ではあるが既約ではない（上半平面の直積に分解する）．

2.7 有界対称領域

非コンパクト型 Hermite 対称空間の最も基本的な例である上半平面は Cayley 変換により

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

という有界な実現を持つ．

定義 2.48 $\mathbb{C}^n$ の連結開集合 $D \subset \mathbb{C}^n$ が**対称**であるとは，$\mathrm{Hol}(D)$ が推移的に作用しまたある点 $x \in D$ で x を孤立固定点とするような対合 $s_x \in \mathrm{Hol}(D)$ を持つことである．

Riemann 計量の存在は仮定しないが，実は次が成り立つ．

定理 2.49（[Hel01, Chapter VIII, Theorem 7.1]） $\mathbb{C}^n$ の空でない有界連結開集合 D は **Bergman 計量**と呼ばれる $\mathrm{Hol}(D)$ 不変な計量を持ち，D が対称ならばこの計量に関して D は非コンパクト型 Hermite 対称空間となる．

逆に Harish-Chandra 分解（定理 5.92）により非コンパクト型 Hermite 対称空間は有界対称領域として実現される．

Bergman 計量の構成を説明しよう．$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ の Lebesgue 測度を考え，$H(D)$ を D 上の二乗可積分な正則関数全体のなす Hilbert 空間とする．D は有界なので定数関数は $H(D)$ に属し，特に $H(D) \neq 0$．$z \in D$ に対して $f \mapsto f(z)$ は $H(D)$ の連続な線型汎関数を定めるので，Riesz の表現定理からある $k_z \in H(D)$ が存在し $f(z) = \langle f, k_z \rangle_{H(D)}$ が任意の $f \in H(D)$ に対して成立する．（$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H(D)}$ は $H(D)$ の内積．）$K(z_1, z_2) = k_{z_2}(z_1)$ とおこう．（これを **Bergman 核**という．）この関数は次の性質を満たす．

(1) 第一引数に関して正則，第二引数に関して反正則であり，各々の変数に対して二乗可積分．
(2) $K(z_2, z_1) = \overline{K(z_1, z_2)}$.
(3) $f \in H(D)$ に対して $f(z) = \langle f, K(\cdot, z) \rangle_{H(D)} = \int_D K(z, w) f(w) dw$ (再生性).

$\{e_i\}$ を $H(D)$ の正規直交基底とすると，$K(z_1, z_2) = \sum_i \langle K(\cdot, z_2), e_i \rangle_{H(D)} e_i(z_1) = \sum_i \overline{\langle e_i, K(\cdot, z_2) \rangle_{H(D)}} e_i(z_1) = \sum_i e_i(z_1) \overline{e_i(z_2)}$ が成り立つ．特に $K(z, z) > 0$ である．$\mathbb{C}^n$ の変数を $(z_1, \ldots, z_n)$ とし，

$$g = \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \log(K(z, z)) dz_i d\overline{z}_j$$

とおく．この g が求める計量である．

例 2.50 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とすると，$H(D)$ の正規直交基底として $\{\pi^{-1/2} \sqrt{n+1} z^n\}$ をとることができるので，

$$K(z_1, z_2) = \frac{1}{\pi} \sum_n (n+1)(z_1 \overline{z}_2)^n = \frac{1}{\pi(1 - z_1 \overline{z}_2)^2}$$

となり，よって $z = x + \sqrt{-1} y$ に対して

$$g = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log(K(z, z)) dz d\overline{z} = \frac{2 dz d\overline{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

となる．（単位円盤状の Poincaré 計量．）

3 例

3.1 群

現れる群の定義を与えておく．ここに現れる群は全て $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上の代数群の構造を持つが，ここでは $\mathbb{R}$ 値点または $\mathbb{C}$ 値点からなる群のみ与えることとする．

練習 3.1 以下の群の代数群としての定義を与えよ．

M_n で $n \times n$ 行列の全体を表し，$\mathrm{GL}_n = \{X \in M_n \mid \det(X) \neq 0\}$ を一般線型群，$\mathrm{SL}_n = \{X \in \mathrm{GL}_n \mid \det(X) = 1\}$ を特殊線型群とする．$\mathbb{R}^{p+q}$ の符号 (p,q) の対称双線型形式を固定する GL_n の部分群を（不定値）直交群と呼び $\mathrm{O}(p,q)$ と書く．また定数倍を除き固定する群を $\mathrm{GO}(p,q)$ と書く．対称双線型形式として $((x_1,\dots,x_{p+q}),(y_1,\dots,y_{p+q})) \mapsto (x_1y_1+\dots+x_py_p)-(x_{p+1}y_{p+1}+\dots+x_{p+q}y_{p+q})$ をとると，

$$\mathrm{GO}(p,q) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid {}^t g \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \nu(g) \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \ (\nu(g) \in \mathbb{R}^\times) \right\}$$

であり，$\mathrm{O}(p,q) = \{g \in \mathrm{GO}(p,q) \mid \nu(g) = 1\}$ である．$\mathrm{SO}(p,q) = \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R})$ を不定値特殊直交群と呼ぶ．また $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n,0)$，$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n,0)$，$\mathrm{G}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) = \mathrm{GO}(p,q) \cap (\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}))$，$\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) = \mathrm{SO}(p,q) \cap (\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}))$ とおく．

$\mathbb{C}^{p+q}$ の符号 (p,q) の非退化 Hermite 形式を固定する $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群を（不定値）ユニタリ群と呼び $\mathrm{U}(p,q)$ と書き，また定数倍を除き固定する群を $\mathrm{GU}(p,q)$ と書く．Hermite 形式として $((x_1,\dots,x_{p+q}),(y_1,\dots,y_{p+q})) \mapsto (x_1\overline{y_1}+\dots+x_p\overline{y_p})-(x_{p+1}\overline{y_{p+1}}+\dots+x_{p+q}\overline{y_{p+q}})$ をとると，

$$\mathrm{GU}(p,q) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{C}) \mid {}^t \overline{g} \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \nu(g) \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \ (\nu(g) \in \mathbb{C}^\times) \right\}$$

であり，$\mathrm{U}(p,q) = \{g \in \mathrm{GU}(p,q) \mid \nu(g) = 1\}$ である．$\mathrm{SU}(p,q) = \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{C})$ を不定値特殊ユニタリ群と呼ぶ．また $\mathrm{U}(n) = \mathrm{U}(n,0)$, $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{SU}(n,0)$, $\mathrm{G}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)) = \mathrm{GU}(p,q) \cap (\mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C}))$，$\mathrm{S}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)) = \mathrm{SU}(p,q) \cap (\mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C}))$ とおく．

$\mathbb{R}^{2n}$ の非退化交代形式を固定する GL_n の部分群をシンプレクティック群と呼び Sp_{2n}[*7] と書く．また定数倍を除き固定する群を GSp_{2n} と書く．非退化交代形式として $((x_1,\ldots,x_{2n}),(y_1,\ldots,y_{2n}))\mapsto(x_1y_{n+1}+\cdots+x_ny_{2n})-(x_{n+1}y_1+\cdots+x_{2n}y_n)$ をとると，

$$\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{R})=\left\{g\in\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})\mid {}^tg\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}g=\nu(g)\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}\ (\nu(g)\in\mathbb{R}^\times)\right\}$$

であり，$\mathrm{Sp}_{2n}=\{g\in\mathrm{GSp}_{2n}\mid\nu(g)=1\}$ である．なお自動的に $\mathrm{Sp}_{2n}\subset\mathrm{SL}_{2n}$ となる．

$\mathbb{H}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}k$ を四元数体とし，$\mathbb{H}^n$（右 $\mathbb{H}$ 加群と見なす）上の歪 Hermite 形式を固定する $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ の部分群を $\mathrm{SO}^*(2n)$ と書く．歪 Hermite 形式として $((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))\mapsto\overline{x_1}iy_1+\cdots+\overline{x_n}iy_n$ をとり，また $M_n(\mathbb{H})\hookrightarrow M_{2n}(\mathbb{C})$ を $z_1,z_2\in M_n(\mathbb{C})$ に対して $z_1+jz_2\mapsto\begin{pmatrix}z_1&-\overline{z_2}\\z_2&\overline{z_1}\end{pmatrix}$ と定めておくと，$\mathrm{SO}^*(2n)$（の像）は

$$\mathrm{SO}^*(2n)=\left\{g=\begin{pmatrix}A&-\overline{B}\\B&\overline{A}\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C})\;\middle|\;{}^tg\begin{pmatrix}0&1_n\\1_n&0\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}0&1_n\\1_n&0\end{pmatrix}\right\}$$

で与えられる．

各群の Lie 環は

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}_n&=\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n)=M_n,\\
\mathfrak{sl}_n&=\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n)=\{X\in M_n\mid\mathrm{Tr}(X)=0\},\\
\mathfrak{so}(p,q)&=\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(p,q))\\
&=\left\{X\in M_{p+q}(\mathbb{R})\mid {}^tX\begin{pmatrix}1_p&0\\0&-1_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1_p&0\\0&-1_q\end{pmatrix}X=0\right\},\\
\mathfrak{u}(p,q)&=\mathrm{Lie}(\mathrm{U}(p,q))\\
&=\left\{X\in M_{p+q}(\mathbb{C})\mid {}^t\overline{X}\begin{pmatrix}1_p&0\\0&-1_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1_p&0\\0&-1_q\end{pmatrix}X=0\right\},\\
\mathfrak{su}(p,q)&=\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(p,q))=\mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{C})\cap\mathfrak{u}(p,q),\\
\mathfrak{sp}_{2n}&=\mathrm{Lie}(\mathrm{Sp}_{2n})=\left\{X\in M_{2n}\mid {}^tX\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}X=0\right\},
\end{aligned}$$

[*7] Sp_n と書かれることもある．

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}^*(2n) &= \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}^*(2n))\\ &= \left\{X = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A}\end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^tX\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0\end{pmatrix} X = 0\right\}\end{aligned}$$

となる．

練習 3.2 $\mathfrak{u}(p,q)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{C})$，$\mathfrak{so}(p,q)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}_{p+q}(\mathbb{C})$，$\mathfrak{so}^*(2n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ を示せ．これから $\mathrm{U}(p,q)_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_{p+q}$，$\mathrm{SO}(p,q)_{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}(p+q)_{\mathbb{C}}$，$\mathrm{SO}^*(2n)_{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}(2n)_{\mathbb{C}}$ である．

練習 3.3 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ の球面 S^{n+1} への自然な作用を考える．

(1) $x \in S^{n+1}$ の固定部分群は $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ と同型であることを示せ．
(2) n に関する帰納法により，$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ が連結であることを示せ．
(3) n に関する帰納法により，$n \geq 3$ ならば $\pi_1(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}))$ であることを示せ．
(4) $\mathbb{H}$ を四元数体とし，$\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}$ を実部が 0 の部分空間とする．$g \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ の共役作用は $\mathbb{H}_0$ およびその上の標準的な内積を保つことを示せ．またそこから得られる $\mathbb{H} \setminus \{0\} \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ により $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ となることを示し，$\pi_1(\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となることを結論づけよ．

練習 3.4 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ への自然な作用を考える．

(1) $n \geq 2$ の時，$x \in \mathbb{C}^n$ の固定部分群は $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$ とホモトピー同値であることを示せ．
(2) n に関する帰納法により，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ が連結かつ単連結であることをを示せ．

定理 3.5（[Kna02，Proposition 1.136，1.145]） $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$，$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$，$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$，$\mathrm{U}(p,q)$，$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$，$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$，$\mathrm{SO}^*(2n)$ は連結であり，更に $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$，$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ は単連結，$\pi_1(\mathrm{SO}(2,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$，$\pi_1(\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(n \geq 3)$ である．$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ は二つの連結成分を持ち，$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ はその連結成分の一つである．$p,q \neq 0$ の時，Lie 群 $\mathrm{O}(p,q)$ は四つの連結成分を持つ．

3.2 Euclid 型

離散部分群 $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ に対して

$$X = \mathbb{C}^n/\Gamma$$

とおく．$\mathbb{C}^n$ の自然な計量は X の Riemann 計量を定め，また群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が等長的かつ推移的に作用する．原点 $[0] \in X$ における $s_{[0]}$ は $z \mapsto -z$ から誘導される．X は Euclid 型の Hermite 対称空間であり，逆に注意 2.22 の議論から Euclid 型 Hermite 対称空間は全てこの形となる．

3.3 複素 Grassmann 多様体

$0 < d < n$ に対して，

$$X = \mathrm{Gr}(d,n) = \{V \subset \mathbb{C}^n \mid \dim V = d\}$$

とおく．これを**複素 Grassmann 多様体**と呼ぶ．この多様体には $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が推移的に作用し[*8]，それにより複素多様体の構造を持つ．$V \in \mathrm{Gr}(d,n)$ に対して $\mathrm{Gr}(d,n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(V)$ であり，よって接空間 $T_V \mathrm{Gr}(d,n)$ は $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(V)) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)/\{A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \mid A(V) \subset V\} \simeq \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}^n/V)$ で与えられる．

$\mathbb{C}^n$ の標準的な Hermite 内積を考えると，$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C}^n/V) \simeq \mathrm{Hom}(V,V^\perp)$．$A, B \in \mathrm{Hom}(V,V^\perp)$ とすると，$\overline{{}^tB} \in \mathrm{Hom}(V^\perp, V)$ であるので $A\overline{{}^tB} \in \mathrm{End}(V^\perp)$ を考えることができる．$\langle A, B\rangle = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(A\overline{{}^tB})$ は $\mathrm{Hom}(V,V^\perp)$ 上の内積を定め，これにより X は Riemann 多様体となる．$\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の作用はこの Riemann 計量を保ち，また $\mathrm{Gr}(d,n)$ に推移的に作用する．

$V \in X$ とすると，$\mathbb{C}^n = V \oplus V^\perp$ である．$f_V \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を $v_1 \in V$, $v_2 \in V^\perp$ に対して $f_V(v_1 + v_2) = v_1 - v_2$ と定め，$V' \in X$ に対して $s_V(V') = f_V(V')$ とおくと，これは V を孤立固定点とする対合である．従って，X は Hermite 対称空間になる．これはコンパクト型である．$\{(z_1,\ldots,z_d,0,\ldots,0) \mid z_i \in \mathbb{C}\} \in \mathrm{Gr}(d,n)$ の固定

[*8] $V_1, V_2 \in \mathrm{Gr}(d,n)$ とし，V_i の基底 $\{v_1^{(i)},\ldots,v_d^{(i)}\}$ を一つ取り，それを伸ばして $\mathbb{C}^n$ の基底 $\{v_1^{(i)},\ldots,v_n^{(i)}\}$ をとる．$v_j^{(1)} \mapsto v_j^{(2)}$ により $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の元 g を定めると，$g(V_1) = V_2$ である．$\mathbb{C}^n$ の標準的な Hermite 内積に関して正規直交基底をとれば，$\mathrm{U}(n)$ が推移的に作用することもわかる．

部分群は $\mathrm{U}(d) \times \mathrm{U}(n-d)$ と等しく，よって $\mathrm{Gr}(d,n) \simeq \mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(d) \times \mathrm{U}(n-d))$ である．

3.4 I 型

$p, q \geq 0$ に対して，$\mathbb{C}^{p+q}$ 上の Hermite 形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}$ を

$$\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle_{p,q} = \langle z_1, w_1 \rangle - \langle z_2, w_2 \rangle \ (z_1, w_1 \in \mathbb{C}^p,\ z_2, w_2 \in \mathbb{C}^q)$$

と定める．ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{C}^p$ や $\mathbb{C}^q$ の標準的な Hermite 内積である．これに対して

$$X = \{V \subset \mathbb{C}^{p+q} \mid \dim V = p,\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}|_V \text{ は正定値 } \} \subset \mathrm{Gr}(p, p+q)$$

とおく．これは $\mathrm{Gr}(p, p+q)$ の開集合であり，よって複素多様体の構造を持つ．$V \in X$ ならば $\mathbb{C}^{p+q} = V \oplus V^{\perp}$ となるため，Grassmann 多様体の場合と同様にして計量及び s_V を定義することができ，X は非コンパクト型の Hermite 対称空間となる．$\mathrm{U}(p,q)$ の X への自然な作用は計量を保ち，またその作用は推移的，$\{(z_1, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0) \mid z_i \in \mathbb{C}\} \in X$ の固定部分群を考えることで，$X \simeq \mathrm{U}(p,q)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ である．

注意 3.6 この X の $\mathrm{Gr}(p, p+q)$ への埋め込みは Borel 埋め込み（系 5.93）の一例である．

更に $\mathrm{GU}(p,q)$ を作用させよう．$g \in \mathrm{GU}(p,q)$，$V \in X$ とする．

練習 3.7 $p \neq q$ ならば $g(V) \in X$ となることを示せ．

よって $p \neq q$ ならば自然に作用させればよい．このとき $\{(z_1, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0) \mid z_i \in \mathbb{C}\} \in X$ の固定部分群は $\mathrm{G}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ である．

$p = q$ とする．$\widetilde{X} = \{V \subset \mathbb{C}^{p+q} \mid \dim V = p,\ V|_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}} \text{ は正定値または負定値 } \}$ とおくとこれには $\mathrm{GU}(p,q)$ が作用し，$\widetilde{X} \simeq \mathrm{GU}(p,q)/\,\mathrm{G}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$．$X \simeq \widetilde{X}/(V \sim V^{\perp})$ であり，右辺には $\mathrm{GU}(p,q)$ が作用する．（ただしこの作用は X の複素構造を保たない．）

なお，X は次のような実現も持つ．

$$X \simeq \{Z \in M_{p,q}(\mathbb{C}) \mid 1 - \overline{{}^t Z} Z \text{ は正定値 } \}.$$

同型は $Z \mapsto \{(v\,{}^tZ, v) \mid v \in \mathbb{C}^q\}^\perp \in X$ により与えられる[*9]．また $\mathrm{U}(p,q)$ の作用は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1},$$

ただし $A \in M_p$，$B \in M_{p,q}$，$C \in M_{q,p}$，$D \in M_q$ で与えられる．

3.5　IV 型

項 3.4 では，$\mathbb{C}^{p+q}$ 上の符号 (p,q) の Hermite 形式により Hermite 対称空間を定義した．同様に $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ 上の標準内積 $(\cdot,\cdot)$ を使い，$\mathbb{R}^{p+q}$ 上

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))_{p,q} = (x_1,y_1) - (x_2,y_2)\ (x_1,y_1 \in \mathbb{R}^p,\ x_2,y_2 \in \mathbb{R}^q)$$

により定められた符号 (p,q) の双線型形式を使うことで，

$$X = \{V \subset \mathbb{R}^{p+q} \mid \dim V = p,\ (\cdot,\cdot)_{p,q}|_V \text{ は正定値 }\}$$

を考えることができ，$X \simeq \mathrm{SO}(p,q)^+/(\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q))$ である．これは Riemann 対称空間ではあるが，一般には Hermite 対称空間ではない．

$p=2$ とする．上記 $(\cdot,\cdot)_{2,q}$ を $\mathbb{C}^{2+q}$ 上に線型に伸ばしておき，

$$\widetilde{X} = \{[z] \in \mathbb{P}^{1+q}(\mathbb{C}) \mid (z,z)_{2,q} = 0,\ (z,\overline{z})_{2,q} > 0\}$$

を考える．$z = x + \sqrt{-1}y$ $(x,y \in \mathbb{R}^{2+q})$ とおくと，$[z] \in \widetilde{X}$ となるための必要十分条件は $(x,y)_{2,q} = 0$，$(x,x)_{2,q} = (y,y)_{2,q} > 0$ である．つまり $\{x,y\}$ が $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ の正規直交基底の定数倍となることと同値．このことから $[x+\sqrt{-1}y] \mapsto \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ により定義される $\widetilde{X} \to X$ は well-defined な全射を定める．$x = (x_1,\ldots,x_{2+q})$，$y = (y_1,\ldots,y_{2+q})$ と書いて，$\widetilde{X}^\pm = \{[x+\sqrt{-1}y] \in \widetilde{X} \mid \pm(x_1y_2 - x_2y_1) > 0\}$ とおくとこれは $\widetilde{X}$ の二つの連結成分となり[*10]，各々が X と同型になる．この記述から，X は非コンパクト型 Hermite 対称空間となる．なお，$\widetilde{X}$ には自然に $\mathrm{O}(2,q)$ が作用するが，これは連結成分を保たない．

[*9] 逆は次のように得られる．まず合成 $V^\perp \hookrightarrow \mathbb{C}^{p+q} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^q$ を考える．$v \in V^\perp$ の像が 0 であるとすると $v \in \mathbb{C}^p$ となり，$\langle v,v\rangle_{p,q} \geq 0$．$\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,q}|_{V^\perp}$ は負定値より，$v=0$．つまり $V^\perp \hookrightarrow \mathbb{C}^{p+q} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^q$ は単射なので，次元の比較から同型となる．よって $v \in \mathbb{C}^q$ とすると，ある $v\,{}^tZ \in \mathbb{C}^p$ が一意的に存在し，$(v\,{}^tZ, v) \in V^\perp$．これにより $Z \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ が定まる．

[*10] $r = (x,x)_{2,q} = (y,y)_{2,q} > 0$ とおくと，$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = r^2 + \left(\sum_{i\geq 3} x_i^2 + \sum_{i\geq 3} y_i^2\right) r + \left(\sum_{i\geq 3} x_i^2\right)\left(\sum_{i\geq 3} y_i^2\right) - \left(\sum_{i\geq 3} x_iy_i\right)^2 \geq r^2 + \left(\sum_{i\geq 3} x_i^2 + \sum_{i\geq 3} y_i^2\right) r > 0$.

3.6 Siegel 上半空間（III 型）

$$X = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) \text{ は正定値 }\}$$

とおく．これを **Siegel 上半空間**と呼ぶ．X には $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ が

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

により推移的に作用する．Cayley 変換 $Z \mapsto (Z - \sqrt{-1}1_n)(Z + \sqrt{-1}1_n)^{-1}$ により，

$$X \simeq \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ 1_n - \overline{{}^tZ}Z \text{ は正定値 }\}$$

でもあり，更に $Z \mapsto \{(v, Zv) \mid v \in \mathbb{C}^n\}$ は

$$X \simeq \{V \subset \mathbb{C}^{2n} \mid \dim V = n,\ V \text{ は等方的，} \langle\cdot,\cdot\rangle_{n,n}|_V \text{ は正定値 }\}$$

を与える．ただし Sp_{2n} を定める $\mathbb{C}^{2n}$ 上の非退化交代的な双線型形式が V 上 0 となるとき，V を等方的と言う．この同型により I 型と同様に Riemann 計量および s_V を定めることができ，X は非コンパクト型の Hermite 対称空間となる．

3.7 II 型

$$X = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = -Z,\ 1_n - \overline{{}^tZ}Z \text{ は正定値 }\}$$

とおき，$\mathrm{SO}^*(2n)$ を

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

により作用させる．$0 \in X$ の固定部分群は

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \overline{g} \end{pmatrix} \;\middle|\; g \in U(n) \right\} \simeq U(n)$$

であり，$X \simeq \mathrm{SO}^*(2n)/K$ を得る．$\mathbb{C}^{2n}$ 上の双線型形式 $\{\cdot,\cdot\}$ を $\{(x_1,x_2),(y_1,y_2)\} = (x_1,y_2)+(x_2,y_1)$ $(x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{C}^n)$ と定めると，$Z \mapsto \{(v, Zv) \mid v \in \mathbb{C}^n\}$ は

$$X \simeq \{V \subset \mathbb{C}^{2n} \mid \dim V = n,\ \{\cdot,\cdot\}|_V = 0,\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{n,n}|_V \text{ は正定値 }\}$$

を引き起こす．この記述からやはり I 型と同様にして X は非コンパクト型 Hermite 対称空間となる．

4 Hodge 構造と Hermite 対称領域

4.1 Hodge 構造

定義 4.1 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V 上の **Hodge 構造**とは，複素ベクトル空間への分解 $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} V^{p,q}$ であって，$\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$ を満たすものことである．ただし上線は複素共役を表す．

平滑な射影的代数多様体のコホモロジーの Hodge 分解がそのモデルである．いくつか付随する定義を与える．

定義 4.2 $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} V^{p,q}$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V 上の Hodge 構造とする．

(1) $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ とする．V が**型** $\mathcal{E}$ であるとは，$(p,q) \notin \mathcal{E}$ ならば $V^{p,q} = 0$ となることである．

(2) $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$ は複素共役で不変であるのである実ベクトル部分空間 $V^n \subset V$ により $(V^n)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$ とかける．$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V^n$ を**ウェイト分解** といい，$V = V^n$ である時この Hodge 構造を**ウェイト** n であるという．

(3) $F^r V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p\geq r} V^{p,q}$ とおくと，これは $V_{\mathbb{C}}$ のフィルトレーションを与える．これを **Hodge フィルトレーション**という．$F^p V_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^q V_{\mathbb{C}}} = V^{p,q}$ であるので，Hodge フィルトレーションから Hodge 構造は復元される．

(4) V_1, V_2 が Hodge 構造をもつとする．線型写像 $f\colon V_1 \to V_2$ が Hodge 構造の間の射であるとは，$f(V_1^{p,q}) \subset V_2^{p,q}$ を満たすことである．

(5) V_1, V_2 が Hodge 構造を持つとする．このとき $V_1 \otimes_{\mathbb{R}} V_2$ に

$$(V_1 \otimes_{\mathbb{R}} V_2)^{p,q} = \bigoplus_{p_1+p_2=p,\, q_1+q_2=q} V_1^{p_1,q_1} \otimes_{\mathbb{C}} V_2^{p_2,q_2}$$

により Hodge 構造を入れることができる．

(6) V_1, V_2 が Hodge 構造を持つとする．このとき $V_1 \oplus V_2$ に

$$(V_1 \oplus V_2)^{p,q} = V_1^{p,q} \oplus V_2^{p,q}$$

により Hodge 構造を入れることができる．

(7) V_1, V_2 が Hodge 構造を持つとする．このとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2)$ に

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2)^{p,q} = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((V_1)_{\mathbb{C}}, (V_2)_{\mathbb{C}}) \mid f(V_1^{s,t}) \subset V_2^{s+p,t+q}\}$$

により Hodge 構造を入れることができる．

例 4.3 (1) V を実ベクトル空間とし，J をその上の複素構造とする．$J_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ の固有値 $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ の固有空間をそれぞれ $V^{-1,0}, V^{0,-1}$ とすると，V 上の型 $\{(-1,0),(0,-1)\}$ の Hodge 構造を得る．逆に型 $\{(-1,0),(0,-1)\}$ の Hodge 構造が与えられれば，$J\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ を $V^{-1,0}$ 上 $\sqrt{-1}$ 倍，$V^{0,-1}$ 上 $-\sqrt{-1}$ 倍で与えるとこれは V を保ち，V 上の複素構造を与える．このように型 $\{(-1,0),(0,-1)\}$ の Hodge 構造と複素構造は一対一に対応する．

(2) $\mathbb{R}(n) = (2\pi\sqrt{-1})^n\mathbb{R}$，$\mathbb{R}(n)^{-n,-n} = \mathbb{C}$，それ以外は 0 とすると，これはウェイト $-2n$ の Hodge 構造であり，$\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(m) = \mathbb{R}(n+m)$ を満たす．

$\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ とおく．

命題 4.4 圏同値 $\{\mathbb{S}$ の表現 $\} \simeq \{$Hodge 構造 $\}$ がある．

証明 $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ を $(z_1 \otimes z_2) \mapsto (z_1 z_2, \overline{z_1} z_2)$ により定める．V を $\mathbb{S}$ の表現とすると，$V_{\mathbb{C}}$ には $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ が作用する．$\mathbb{C}^\times$ の代数的な表現は完全可約であり，既約表現は $z \mapsto z^k$ のみであることに注意する．よって $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ の表現も完全可約であり，既約表現は $(z_1, z_2) \mapsto z_1^k z_2^l$ で与えられる．つまり，$V^{p,q} = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid (z_1, z_2)v = z_1^{-p} z_2^{-q} v\}$ とおくと $V = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} V^{p,q}$．$z \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$ とすると，z の $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ における像は $(z, \overline{z})$ であるので，$V^{p,q} = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid zv = z^{-p}\overline{z}^{-q} v\}$．$V$ は $\mathbb{R}$ 上の表現であるので，$z \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ の作用は V に関する複素共役と可換である．従って $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$ となり，$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} V^{p,q}$ は Hodge 構造となる．逆に V の Hodge 構造が与えられていれば，この手順を逆にたどることにより $\mathbb{S}$ の表現を得る． □

V の Hodge 構造が与えられているとし，$h\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GL}(V)$ を対応する $\mathbb{S}$ の表現とする．$w\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{S}$ を $r \mapsto r^{-1}$ により定めると，$V^n = \{v \in V \mid h(w(r))v = r^n v\}$ である．

例 4.5 (1) V 上の複素構造に対する Hodge 構造を考え，対応する表現を h とすると，$z \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$ に対して $h(z)$ は対応する複素構造による z 倍である．

(2) $\mathbb{R}(n)$ は $\mathbb{S} \ni z \mapsto (z\overline{z})^n \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}} = \mathrm{GL}_1((2\pi\sqrt{-1})^n\mathbb{R})$ に対応する．

4.2 Hodge 構造の変動

X を複素多様体，$\mathcal{V}$ をその上の $\mathbb{R}$ 係数局所系とする．$\mathcal{V}_X = \mathcal{V} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_X$ の部分ベクトル束による有界減少フィルトレーション $F^p\mathcal{V}_X$ が **Hodge 構造の変動（variation of Hodge structure）**であるとは，次を満たすことである．

(1) 各点で $\mathcal{V}$ のファイバーにある Hodge 構造が入り，付随する Hodge フィルトレーションは $F^p\mathcal{V}_X$ から定まるものと一致する．
(2) X 上のベクトル場 D に対して $D(F^p\mathcal{V}_X) \subset F^{p-1}\mathcal{V}_X$ が成り立つ（**Griffiths 横断性**）．

例 4.6 $f\colon Y \to X$ を $\mathbb{C}$ 上の射影的かつ平滑な射とし，$\mathcal{V} = R^n f_*\mathbb{R}_Y$（$\mathbb{R}_Y$ はファイバーを $\mathbb{R}$ とする定数層）を考える．$x \in X$ に対して $\mathcal{V}_x = H^n(f^{-1}(x), \mathbb{R})$ は Hodge 分解を持ち，よって Hodge フィルトレーション $F^p\mathcal{V}_{x,\mathbb{C}}$ を得る．これによりフィルトレーション $F^p\mathcal{V}_X$ が定義され，これは Hodge 構造の変動となる [Gri68, (1.1) Theorem, (1.21) Corollary].

$\sum_i n_i = \dim V_{\mathbb{C}}$ を満たす自然数の列 (n_i) に対して，旗多様体を

$$\mathrm{Fl}(n_i) = \{(V_i)_i \mid V_{i+1} \subset V_i \subset V_{\mathbb{C}},\ \dim V_i/V_{i+1} = n_i\}$$

で定める．これには $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$ が推移的に作用し，$(V_i) \in \mathrm{Fl}(n_i)$ における接空間は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}}))/\mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})}(V_i)) \\
&= \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/\{\varphi \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}}) \mid \varphi(V_i) \subset V_i\} \\
&= \bigoplus_i \{(\varphi_i) \in \mathrm{Hom}(V_i, V_{\mathbb{C}}/V_i) \mid \varphi_i|_{V_{i+1}} = \varphi_{i+1} \pmod{V_i}\}
\end{aligned}$$

で与えられる．

V を実ベクトル空間とし，各 $x \in X$ に対して V 上の Hodge 構造が与えられているとしよう．対応する Hodge フィルトレーションを $F_x^pV_{\mathbb{C}}$ とする．$\dim F_x^pV_{\mathbb{C}}$ が一定であると仮定し，$n_p = \dim F_x^pV_{\mathbb{C}}/F_x^{p+1}V_{\mathbb{C}}$ とおく．すると $(F_x^pV_{\mathbb{C}})_p \in \mathrm{Fl}(n_p)$ であり，$x \mapsto (F_x^pV_{\mathbb{C}})_p$ は $X \to \mathrm{Fl}(n_p)$ を定める．

補題 4.7 上のデータが Hodge 構造の変動を与えるための必要十分条件は次の二つが成立すること．

(1) $X \to \mathrm{Fl}(n_p)$ は正則．（従って上のデータは $\mathcal{V}_X = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_X$ のフィルトレーションを与える．）

(2) $X \to \mathrm{Fl}(n_p)$ から微分で得られる写像 $T_x X \to T_{(F_x^p V_{\mathbb{C}})_p}\mathrm{Fl}(n_p) = \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/\{\varphi \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}}) \mid \varphi(F_x^p V_{\mathbb{C}}) \subset F_x^p V_{\mathbb{C}}\}$ の像 φ は $\varphi(F_x^p V_{\mathbb{C}}) \subset F_x^{p-1} V_{\mathbb{C}}$ を満たす．

4.3 Hermite 対称領域から Hodge 構造へ

X を非コンパクト型 Hermite 対称空間, G を対応する半単純代数群, θ を Cartan 対合，$K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ とおく．$u\colon \mathrm{U}(1) \to Z(K^0)$ を項 2.6 のようにとり，$h_0\colon \mathbb{S} \to G$ を $h_0(z) = u(z/\overline{z})$ により定める．すると $\mathrm{Ad} \circ h_0\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Hodge 構造を定める．

補題 4.8 この Hodge 構造に対して $\mathfrak{g}$ は型 $\{(0,0),(1,-1),(-1,1)\}$ であり，$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{0,0} \cap \mathfrak{g}$．また $\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+} h_0 = K(\mathbb{R})^+$ であり，よって $X \simeq \mathrm{Ad}(G(\mathbb{R})^+)h_0 \subset \mathrm{Hom}_{代数群}(\mathbb{S}, G)$．

証明 θ による固有空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を考えると，$\mathrm{Im}(h_0) = \mathrm{Im}(u) \subset Z(K^0)$ より $\mathrm{Ad} \circ h_0(z)$ は $\mathfrak{k}$ 上恒等写像，つまり $\mathfrak{g}^{0,0} \supset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$．また $u(z)$ は $\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \simeq T_{eK(\mathbb{R})^+}(G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+)$ 上 z 倍であるので，$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}$ 上には z 倍と $\overline{z}$ 倍で作用する．よって $h_0(z)$ は $z\overline{z}^{-1}$ および $\overline{z}z^{-1}$ 倍で作用, すなわち $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{1,-1} \oplus \mathfrak{g}^{-1,1}$ である．従って $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{0,0}$，$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,-1} \oplus \mathfrak{g}^{-1,1}$ であり，特に $\mathfrak{g}$ は型 $\{(1,-1),(0,0),(-1,1)\}$．$\mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+} h_0) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(h_0(z))X = X \ (z \in \mathbb{S})\} = \mathfrak{g}^{0,0} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{k}$ であるので，$\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+} h_0 \supset K(\mathbb{R})^+$．一方注意 2.46 から $\theta = \mathrm{Ad}(u(-1)) = \mathrm{Ad}(h_0(\sqrt{-1}))$ であるので，$g \in \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+} h_0$ とすると $\theta(g) = \mathrm{Ad}(h_0(\sqrt{-1}))(g) = g$．よって $g \in K(\mathbb{R}) \cap G(\mathbb{R})^+ = K(\mathbb{R})^+$． □

G の忠実な表現 V を固定し，$\mathcal{V} = V \times X$ を X 上の自明なベクトル束とする．$h \in X$ は $\mathbb{S} \xrightarrow{h} G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ により V 上の Hodge 構造を定め，よってその Hodge フィルトレーションは $\mathcal{V}_X$ のフィルトレーションを定める．この h はその定義から $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 上自明であるので，得られた Hodge 構造はウェイト 0 となる．特に

(α) V の $h\in X$ によるウェイト分解は h によらない.

一方，$h\in X$ は $h\colon \mathbb{S}\to \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(h)\to \mathrm{GL}(T_hX)$ により T_hX 上の Hodge 構造を定め，自然な射 $TX\otimes\mathcal{V}_X\to\mathcal{V}_X$ はその定義から Hodge 構造の射である．T_hX は $\mathfrak{g}$ の商として書くことができ，$\mathfrak{g}$ は型 $\{(1,-1),(0,0),(-1,1)\}$ であったから T_hX も同じ型を持つ．特に $F^{-1}TX=TX$ であり，よって $TX(F^p\mathcal{V}_X)=(F^{-1}TX)(F^p\mathcal{V}_X)\subset F^{p-1}\mathcal{V}_X$ となり，Griffiths 横断性を満たす．すなわち，

(β) $F^p\mathcal{V}$ は Hodge 構造の変動.

もう一つ性質を見ておこう．注意 2.28 から，V の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で，$g\in G(\mathbb{R})^+$ に対して $\langle gx,y\rangle=\langle x,\theta(g)^{-1}y\rangle$ となるものが存在する．$\Phi(x,y)=\langle x,h_0(\sqrt{-1})^{-1}y\rangle=\langle x,u(-1)^{-1}y\rangle$ とおく．注意 2.46 から $\mathrm{Ad}(h_0(\sqrt{-1}))=\mathrm{Ad}(u(-1))$ は Cartan 対合．よって $\Phi(gx,y)=\langle gx,u(-1)^{-1}y\rangle=\langle x,\theta(g)^{-1}u(-1)y\rangle=\langle x,u(-1)g^{-1}y\rangle=\Phi(x,g^{-1}y)$ となり，Φ は G 不変．特に $\Phi\colon V\otimes V\to\mathbb{R}(0)$ は任意の $h\in X$ に対して Hodge 構造の射である．一般的に次の定義を与えておこう．

定義 4.9 V にウェイト n の Hodge 構造が入っているとし，対応する $\mathbb{S}\to\mathrm{GL}(V)$ を h と書く．Hodge 構造の間の射 $\Phi\colon V\otimes V\to\mathbb{R}(-n)$ が**偏極**であるとは，$(x,y)\mapsto(2\pi\sqrt{-1})^n\Phi(x,h(\sqrt{-1})y)$ が内積となることである．

よって Φ は偏極である．従って次が成り立つ．

(γ) 各 $n\in\mathbb{Z}$ に対して V^n 上の双線型形式 Φ_n が存在し，各 $h\in X$ に対して偏極を与える．

4.4 Hodge 構造から Hermite 対称領域へ

さて前項の逆を示そう．設定は次の通りである．G を $\mathbb{R}$ 上の線型代数群とし，$\mathrm{Hom}_{代数群}(\mathbb{S},G)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}\ 環}(\mathrm{Lie}(\mathbb{S}),\mathrm{Lie}(G))\subset\mathrm{Hom}_{ベクトル空間}(\mathrm{Lie}(\mathbb{S}),\mathrm{Lie}(G))$ により位相を定める．X を $\mathrm{Hom}_{代数群}(\mathbb{S},G)$ の連結成分とする．まず次に注意する．

補題 4.10 X は $G(\mathbb{R})^+$ 軌道.

証明 $Y=\mathrm{Hom}_{代数群}(\mathbb{S},G)$ とおく．これは $\mathbb{R}$ 上分離的かつ平滑なスキームの構造

を持ち [SGA3 II, Exposé XI, Corollaire 4.2]，また $(g,\lambda)\mapsto(\mathrm{Ad}(g)\circ\lambda,\lambda)$ で定義される $G\times Y\to Y\times Y$ は平滑 [SGA3 II, Exposé XI, Corollaire 5.1] である．よって $\lambda\in Y$ に対して $g\mapsto\mathrm{Ad}(g)\circ\lambda$ で定義される $G\to Y$ も平滑．特に実値点に引き起こす写像 $G(\mathbb{R})\to Y(\mathbb{R})$ は開写像となる．従って任意の $\lambda\in Y$ に対して $\mathrm{Ad}(G(\mathbb{R})^+)\lambda\subset Y(\mathbb{R})$ は開，よって $Y(\mathbb{R})/\mathrm{Ad}(G(\mathbb{R})^+)$ の完全代表系を Y_0 とすると位相空間として $Y(\mathbb{R})=\coprod_{\lambda\in Y_0}\mathrm{Ad}(G(\mathbb{R})^+)\lambda$ となる．$\mathrm{Ad}(G(\mathbb{R})^+)\lambda$ は連結であるので，これから全ての連結成分は $\mathrm{Ad}(G(\mathbb{R})^+)\lambda$ の形をしていることがわかり，補題が従う． □

G の忠実な表現 V を固定すると，$h\in X$ は $\mathbb{S}\xrightarrow{h}G\hookrightarrow\mathrm{GL}(V)$ により V 上の Hodge 構造を定める．

定理 4.11 (α) が満たされるならば X は複素多様体の構造を持ち，さらに $(\beta)(\gamma)$ が満たされるならば非コンパクト型 Hermite 対称空間となる．

注意 4.12 よって X は随伴型な半単純群を定めるが，これは G と一致するとは限らない．（G は簡約であることすら仮定していない．）

最初に X が複素多様体となることを (α) から導こう．$h\in X$ に対して V の Hodge 分解を考えると，X の元は互いに $G(\mathbb{R})^+$ の作用で移りあうことから $\dim V^{p,q}$ は h によらない．よって V の $h\in X$ の定める Hodge フィルトレーション $(F_h^pV_{\mathbb{C}})$ に対して $\dim F_h^pV_{\mathbb{C}}$ は h によらず，適当な一般旗多様体 Fl に対して $X\to\mathrm{Fl}$ を定める．Hodge フィルトレーションから Hodge 構造が復元できることから，これは単射．$h\in X$ を固定すると，この写像は次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[d, mapsto] & \in & G(\mathbb{R})^+ \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{GL}(V) \arrow[r] & \mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}}) \arrow[d] & \ni & g \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Ad}(g)\circ h & \in & X \arrow[rr, hook] & & \mathrm{Fl} & \ni & g(F_h^pV_{\mathbb{C}}).
\end{tikzcd}$$

これの h での微分を考える．まず $T_hX\simeq\mathfrak{g}/\mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(h))$ であるが，補題 4.8 の証明から，$\mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(h))$ は $\mathfrak{g}$ に対して h により Hodge 構造を考えたときの $\mathfrak{g}^{0,0}\cap\mathfrak{g}$ と一致する．一方 $T_{(F_h^pV_{\mathbb{C}})}\mathrm{Fl}\simeq\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/\{\varphi\mid\varphi(F_h^pV_{\mathbb{C}})\subset F_h^pV_{\mathbb{C}}\}$ であるが，h により $\mathrm{End}(V)$ に Hodge 構造を与えると，$\{\varphi\mid\varphi(F_h^pV_{\mathbb{C}})\subset F_h^pV_{\mathbb{C}}\}=F^0\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$

である．（F^p は Hodge フィルトレーション．）よって，

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}^{0,0}\cap\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/F^0\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}}) \arrow[d, "\wr"] \\
T_hX \arrow[r, hook] & T_{(F_h^pV_{\mathbb{C}})}\mathrm{Fl}
\end{tikzcd}$$

なる可換図式を得る．一方 $\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ が Hodge 構造の間の射であることから，可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}^{0,0}\cap\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{End}(V)/(\mathrm{End}(V)^{0,0}\cap\mathrm{End}(V)) \arrow[d] \\
\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \arrow[r, hook] & \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/F^0\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})
\end{tikzcd}$$

を得る．

さて (α) を仮定しよう．すると $h'|_{\mathbb{G}_\mathrm{m}}$ は $h'\in X$ によらない，つまり $\mathrm{Ad}(g)\circ h|_{\mathbb{G}_\mathrm{m}}$ は $g\in G$ によらず，従って $h(\mathbb{G}_\mathrm{m})$ は G の中心に入る．従って $\mathfrak{g}$ はウェイト 0．この事実を使うと，次は簡単に示せる．

補題 4.13 $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}^{0,0}\cap\mathfrak{g})\xrightarrow{\sim}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

従って上の図式から $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}^{0,0}\cap\mathfrak{g})\subset\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/F^0\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ は複素部分ベクトル空間，よって $T_hX\subset T_{(F_h^pV_{\mathbb{C}})}\mathrm{Fl}$ は複素部分ベクトル空間であり，従って X は Fl の複素部分多様体となる．

更に，これが Hodge 構造の変動を与えていると仮定しよう．補題 4.7 から，$T_hX\hookrightarrow T_{(F_x^pV_{\mathbb{C}})}\mathrm{Fl}\simeq\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/F^0\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ の像は $F^{-1}\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/F^0\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ に含まれる．上の補題から $T_hX\simeq\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}^{0,0}\cap\mathfrak{g})\simeq\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ であり，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\hookrightarrow\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})/F^0\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ は Hodge フィルトレーションと整合的であるので，$F^{-1}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を得る．$\mathfrak{g}$ はウェイト 0 であったので，$\mathfrak{g}$ は型 $\{(0,0),(-1,1),(1,-1)\}$ となる．従って次の補題を得た．

補題 4.14 (α)(β) を仮定すると，$\mathfrak{g}$ は型 $\{(0,0),(-1,1),(1,-1)\}$．

(γ) を仮定し，まずは X に作用する簡約群を定義する．G_1 を $h(\mathbb{S})$ $(h\in X)$ により生成される G の部分群とすると，補題 4.10 から $X\subset\mathrm{Hom}_{代数群}(\mathbb{S},G_1)$ は $G_1(\mathbb{R})^+$ 軌道でもある．更に G_2 を $h(\mathrm{U}(1))$ $(h\in X)$ により生成される G の部分群とする．$h(\mathbb{G}_\mathrm{m})$ は h によらず G の中心に含まれるので，積 $h(\mathbb{G}_\mathrm{m})\times G_2\to G_1$ は準同型写像

で，G_1, G_2 の定義からこれは全射．従って $G_2 \to G_1/h(\mathbb{G}_\mathrm{m})$ も全射．$G_1(\mathbb{R})^+$ の X への作用は $G_1 \to G_1/h(\mathbb{G}_\mathrm{m})$ を経由するので，X は $G_2(\mathbb{R})^+$ 軌道にもなる．

G_2 上の Cartan 対合を定めよう．$h_0 \in X$ を固定する．(γ) のような Φ_n をとる．$z \in \mathrm{U}(1)$ と $h \in X$ に対して $h(z)$ は $\mathbb{R}(-n)$ 上恒等写像であるから，Φ_n は $h(\mathrm{U}(1))$ 不変，よって G_2 不変である．$\langle x, y\rangle_n = (2\pi\sqrt{-1})^n\Phi_n(x, h_0(\sqrt{-1})y)$ と定めると，これは偏極の定義から V^n 上の内積となる．$V = \bigoplus_n V^n$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を各 V^n が直交するように定義しておく．すると $g \in G_1$ および $x, y \in V^n$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle x, gy\rangle &= (2\pi\sqrt{-1})^n\Phi_n(x, h_0(\sqrt{-1})gy)\\
&= (2\pi\sqrt{-1})^n\Phi_n(x, h_0(\sqrt{-1})gh_0(\sqrt{-1})^{-1}h_0(\sqrt{-1})y)\\
&= (2\pi\sqrt{-1})^n\Phi_n((h_0(\sqrt{-1})gh_0(\sqrt{-1})^{-1})^{-1}x, h_0(\sqrt{-1})y)\\
&= \langle (h_0(\sqrt{-1})gh_0(\sqrt{-1})^{-1})^{-1}x, y\rangle
\end{aligned}
$$

となり，この内積に関して $\theta(g) = \mathrm{Ad}(h_0(\sqrt{-1}))g$ は転置と逆元をとる操作に対応する．よって例 2.26 からこれは Cartan 対合である．

$K_2 = \{g \in G_2 \mid \theta(g) = g\}$ とおき，$K_2(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Stab}_{G_2(\mathbb{R})^+}(h_0)$ を示す．$K_2(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(h_0(\sqrt{-1}))$ であるので，明らかに $\mathrm{Stab}_{G_2(\mathbb{R})^+}(h_0) \subset K_2(\mathbb{R})^+$．補題 4.14 から $\mathfrak{g}$ は型 $\{(0,0),(1,-1),(-1,1)\}$ であり，$h_0(\sqrt{-1})$ は $\mathfrak{g}^{0,0}, \mathfrak{g}^{1,-1}, \mathfrak{g}^{-1,1}$ にそれぞれ $1, -1, -1$ 倍で作用する．よって $\mathrm{Lie}(K_2) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(h_0(\sqrt{-1}))X = X\}$ は $\mathfrak{g}^{0,0} \cap \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}_{G_2(\mathbb{R})^+}(h_0))$ と一致する．従って $\mathrm{Stab}_{G_2(\mathbb{R})^+}(h_0) \supset K_2(\mathbb{R})^+$ となる．これから $X \simeq G_2(\mathbb{R})^+/K_2(\mathbb{R})^+$ は Riemann 対称空間，更に複素構造を持っていたので Hermite 対称空間となる．

最後に非コンパクト型であることを示そう．$h_0(\sqrt{-1}) \in G_2$ であることと $\theta = \mathrm{Ad}(h_0(\sqrt{-1}))$ から $Z(G_2) \subset K_2$ である．よって $G_2' = G_2/Z(G_2)$，K_2' を K_2 の G_2' における像とすれば，$X \simeq G_2(\mathbb{R})^+/K_2(\mathbb{R})^+ \simeq G_2'(\mathbb{R})^+/(K_2')(\mathbb{R})^+$．$G_2'$ は半単純であるから，これから X は非コンパクトである（項 2.5）．

4.5 例：$G = \mathrm{GU}(p, q)$ の場合

$G = \mathrm{GU}(p, q)$ として，上の対称空間がどうなるか具体的に計算してみよう．K として $\mathrm{G}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ がとれる．$h_0 \colon \mathbb{S} \to G$ を $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times \ni z \mapsto \mathrm{diag}(z1_p, \overline{z}1_q)$ と定め，$X = G(\mathbb{R})^+h_0$ とおくと，$\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(h_0) = K^0(\mathbb{R})$ であり，よって $X \simeq G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ となる．$V = \mathbb{C}^{p+q}$ とおくと $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ である．この X, V に関

して条件 $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ が成立していることを確認しよう．$g \in G(\mathbb{R})$，$h = \mathrm{Ad}(g) \circ h_0$ とおく．$Y = g(\mathbb{C}^p), Z = g(\mathbb{C}^q) \subset V$ とおくと $V = Y \oplus Z$，$Z = Y^\perp$．また $Y^\pm = \{v \otimes \sqrt{-1}z \pm \sqrt{-1}v \otimes z \mid v \in Y, z \in \mathbb{C}\} \subset Y_\mathbb{C}$（複合同順）とおき，$Z^\pm$ も同様に定義すると，V の $h \in X$ に対する Hodge 分解は

$$V^{-1,0} = Y^+ \oplus Z^-, \quad V^{0,-1} = Y^- \oplus Z^+$$

である．特に h によらずウェイト -1 であって，よって (α) が成り立つ．

Hodge フィルトレーションは $F^{-1}V_\mathbb{C} = V_\mathbb{C}$，$F^0V_\mathbb{C} = Y^- \oplus Z^+$，$F^1V_\mathbb{C} = 0$ となり，従って $X \xrightarrow{f} \mathrm{Gr}(p+q, 2(p+q))$ を得る．項 3.4 から $T_hX \simeq \mathrm{Hom}(Y, Z)$，$T_{f(h)}\,\mathrm{Gr}(p+q, 2(p+q)) \simeq \mathrm{Hom}(Y^- \oplus Z^+, Y^+ \oplus Z^-)$ である．接空間の間の線型写像を具体的に計算しよう．図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(V_\mathbb{C}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
T_h(X) & \longrightarrow & T_{f(h)}\,\mathrm{Gr}(p+q, 2(p+q))
\end{array}$$

を考える．$\varphi \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ に対して $V = Y \oplus Z \ni (v_1, v_2) \mapsto (-\varphi^*(v_2), \varphi(v_1)) \in V$ を考えると（φ^* は $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,q}$ に関する随伴写像），これは $\mathfrak{g}$ の元を定め，その $T_hX \simeq \mathrm{Hom}(Y, Z)$ における像は φ になる．φ, φ^* を複素線型に伸ばし同じ記号 φ, φ^* で書くと，$\varphi(Y^\pm) \subset Z^\pm$，$\varphi^*(Z^\pm) \subset Y^\pm$（複合同順）であり，上の可換図式から φ の $T_{f(h)}\,\mathrm{Gr}(p+q, 2(p+q)) \simeq \mathrm{Hom}(Y^- \oplus Z^+, Y^+ \oplus Z^-)$ における像は

$$Y^- \oplus Z^+ \ni (v_1, v_2) \mapsto (-\varphi^*(v_2), \varphi(v_1)) \in Y^+ \oplus Z^-$$

で与えられる．なお，Hodge フィルトレーションが二段階しかないため計算する必要もなくわかることだが，(β) が満たされている（補題 4.7 を参照）．

$v_1, v_2 \in V$ に対して $\Phi(v_1, v_2) = -2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\langle v_1, v_2\rangle_{p,q}$ とおく．$v_i = y_i + z_i$ $(i = 1, 2,\ y_i \in Y,\ z_i \in Z)$ とおくと，$h(\sqrt{-1})(v_2) = \sqrt{-1}y_2 - \sqrt{-1}z_2$ なので，

$$(2\pi\sqrt{-1})^{-1}\Phi(v_1, h(\sqrt{-1})v_2) = \mathrm{Re}(\langle y_1, y_2\rangle_{p,q} - \langle z_1, z_2\rangle_{p,q})$$

である．$\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,q}$ は Y 上正定値，Z 上負定値な（複素ベクトル空間上の）内積を定めるので，$(v_1, v_2) \mapsto (2\pi\sqrt{-1})^{-1}\Phi(v_1, h(\sqrt{-1})v_2)$ は内積，つまり Φ は偏極となり，(γ) が成り立つ．

4.6 例：$G = \mathrm{GO}(2, q)$ の場合

次に $G = \mathrm{GO}(2, q)$ とする．$V = \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}^q$ とおき，実部と虚部により $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ と見なすことで G を V に作用させる．$z \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\mathrm{GL}(V)$ の元を $\mathbb{C}$ 上 z^2 倍，$\mathbb{R}^q$ 上 $|z|^2$ 倍と定めると，これは $h_0 \colon \mathbb{S} \to G$ を定める．$X = \mathrm{Ad}(G(\mathbb{R})^+)h_0$ とおく．$g \in G(\mathbb{R})^+, h = \mathrm{Ad}(g)h_0$ とし，$Y = g(\mathbb{C})$，$Z = g(\mathbb{R}^q)$ とおくと，$(\cdot,\cdot)_{2,q}$ は Y 上正定値，Z 上負定値で，$Z = Y^\perp$ となる．$Y^\pm$ を前項と同様に定めると，h による Hodge 分解は

$$V^{-2,0} = Y^+, \quad V^{0,-2} = Y^-, \quad V^{-1,-1} = Z_\mathbb{C}$$

により与えられる．特にウェイト -2 であり，(α) を満たす．

Hodge フィルトレーションにより，埋め込み $f \colon X \hookrightarrow \mathrm{Fl} = \mathrm{Fl}(1, q, 1)$ を得る．これが接空間に及ぼす射 $T_hX \simeq \mathrm{Hom}(Y, Z) \to T_{f(h)}\mathrm{Fl} \subset \mathrm{Hom}(Y^-, Y^+ \oplus Z_\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Hom}(Y^- \oplus Z_\mathbb{C}, Y^+)$ は次のようになる．$\mathrm{pr} \colon Y_\mathbb{C} \simeq Y^+ \oplus Y^- \to Y^+$ を射影とすると，$\varphi \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ に対してその像は

$$\begin{aligned}
\psi_1 &\colon Y^- \ni v \mapsto \varphi(v) \in Z_\mathbb{C} \subset Y^+ \oplus Z_\mathbb{C}, \\
\psi_2 &\colon Y^- \oplus Z_\mathbb{C} \ni (v_1, v_2) \mapsto \mathrm{pr}(-{}^t\varphi(v_2))
\end{aligned}$$

で与えられる．特に ψ_1 による $Y^- = F^0V_\mathbb{C}$ の像は $Z_\mathbb{C} = \mathrm{Im}(F^{-1}V_\mathbb{C} \to Y^+ \oplus Z_\mathbb{C})$ に含まれており，(β) が成立していることがわかる．

最後に $\Phi = (2\pi)^2(\cdot,\cdot)_{2,q}$ とおこう．$v_1, v_2 \in V$，$v_i = y_i + z_i$ $(i = 1, 2, y_i \in Y, z_i \in Z)$ とすると，$h(\sqrt{-1})v_2 = -y_2 + z_2$ より，

$$(2\pi\sqrt{-1})^{-2}\Phi(v_1, h(\sqrt{-1})v_2) = (y_1, y_2)_{2,q} - (z_1, z_2)_{2,q}$$

となり，$(\cdot,\cdot)_{2,q}$ は Y 上正定値，Z 上負定値であるのでこれは内積を定める．よって (γ) が成立している．

5 簡約代数群

5.1 定義と Lie 環

定義を繰り返しておく．

定義 5.1 (1) 連結代数群が**単純**であるとは，可換でなく，また非自明な連結正規閉部分群を持たないことである．

(2) 連結代数群が**半単純**であるとは，非自明な連結可解正規閉部分群を持たないことである．

(3) 連結代数群が**簡約**であるとは，非自明な連結冪単[*11]正規閉部分群を持たないことである．

応用上は次の判定条件が使いやすい．

命題 5.2 G を代数群とする．

(1) $G \subset \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{GL}_n)$ であって，$g \in G$ ならば ${}^t\overline{g} \in G$（ここで $\overline{g}$ は $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{GL}_n)$ の複素共役）を満たすならば，G は簡約．（例 2.26 と定理 2.29 から従う．）

(2) 簡約群 G が半単純であるための必要十分条件は G の中心が離散的であること．[Bor91, Chapter IV, 11.21 Proposition].

この命題から，$\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{U}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{Sp}_{2n}$ などのような群は簡約群であり，さらに $\mathrm{SL}_n, \mathrm{SO}(n)\ (n \geq 3), \mathrm{Sp}_{2n}$ は半単純群であることがわかる．

注意 5.3 単純代数群に対して，しばしば連結なもののみではなく「正規閉部分群を持たない」という定義が採用される．たとえば SL_2 は上の定義では単純であるが，この定義では $\{1_2, -1_2\}$ が正規部分群になるため単純にはならない．このような文脈では，上の意味での単純性を殆ど単純（almost simple）と呼ぶ．（たとえば [Bor91, 14.10 Proposition (3)].）

注意 5.4 G が簡約ならば $\mathrm{Lie}(G)$ は簡約である一方，$\mathrm{Lie}(G)$ が簡約でも G は簡約とは限らない．例えば $G = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ は簡約ではないが，その Lie 環は簡約である．

また定義から簡約 Lie 環は Abel な Lie 環と半単純 Lie 環の直和に分解するが，簡約代数群がこのように綺麗に分解するとは限らない．例えば $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ であるが，GL_n と $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathrm{SL}_n$ は同型ではない．

[*11] 対角成分が 1 となる上半三角行列全体からなる GL_n の部分群に埋め込まれること．

5.2 トーラス

最も簡単な簡約群のクラスが，次で定義されるトーラスである．

定義 5.5 体 F 上の代数群 T が**トーラス**であるとは，代数閉包 $\overline{F}$ への底変換 $T_{\overline{F}}$ が $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の直積と同型であることである．更に T が F 上 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の直積と同型であるとき，**分裂トーラス**であるという．

定義から明らかなように，$\mathbb{C}$ 上の全てのトーラスは分裂トーラスである．
T を分裂トーラスとする．これに対して

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}_{\text{代数群}}(T, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}),$$
$$X_*(T) = \mathrm{Hom}_{\text{代数群}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, T)$$

とおく．$X^*(T)$ を**指標群**，$X_*(T)$ を**余指標群**と呼ぶ．伝統的にこれらの群の演算は加法的に書かれる．明らかに $X^*(T_1 \times T_2) = X^*(T_1) \oplus X^*(T_2)$，$X_*(T_1 \times T_2) = X_*(T_1) \oplus X_*(T_2)$ が成り立ち，よって以下とあわせて（定義から $T \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\dim(T)}$ であることに注意すれば）$X^*(T)$，$X_*(T)$ は階数 $\dim(T)$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群である．

補題 5.6 ([Spr09, 3.2.2 Example]) $n \mapsto (t \mapsto t^n)$ は同型 $\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Hom}_{\text{代数群}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ を与える．

注意 5.7 従って T の同型類は組 $X^*(T)$ の同型類から定まる．または以下に述べるように $X_*(T)$ は $X^*(T)$ から定まるので，組 $(X^*(T), X_*(T))$ の同型類から定まるといってもよい．これは後々 $\mathbb{C}$ 上の簡約群がそのルートデータから決まるという形で一般化される．

$\lambda \in X^*(T)$，$\nu \in X_*(T)$ に対して，$\lambda \circ \nu \in \mathrm{Hom}_{\text{代数群}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \simeq \mathbb{Z}$ を考え，これを $\langle \lambda, \nu \rangle \in \mathbb{Z}$ と書く．

命題 5.8（[Spr09, 3.2.11 Lemma]） $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(T), \mathbb{Z}) \simeq X_*(T)$ を定める．

5.3 ルートデータ：$\mathbb{C}$ 上の場合

G を $\mathbb{C}$ 上の簡約群とする．これに対して，ルートデータと呼ばれるある組み合わせ論的対象を与える．一般論の前に，まずはもっとも基本的な例を述べる．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ とおく．

例 5.9 $E, F, H \in \mathfrak{sl}_2$ を

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると，関係式

$$[H, E] = 2E,\ [H, F] = -2F,\ [E, F] = H$$

が成り立ち，$\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F$ が成り立つ．この分解は $\mathrm{diag}(t, t^{-1}) \in \mathrm{SL}_2$ $(t \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ の随伴作用による固有分解とも見ることができる．つまり，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(t, t^{-1}))(H) &= H, \\ \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(t, t^{-1}))(E) &= t^2 E, \\ \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(t, t^{-1}))(F) &= t^{-2} F \end{aligned}$$

からわかるように E, H, F はこの元の随伴作用に関する固有ベクトルである．

次の定義をしておく．

定義 5.10 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して $E, H, F \in \mathfrak{g}$ が上の関係式を満たす時，(E, H, F) を $\mathfrak{sl}_2$ **トリプル**と呼ぶ．これは Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ からの準同型を考えていることと同値である．

次に基本的な例が GL_n である．

例 5.11 $G = \mathrm{GL}_n$ とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = M_n(\mathbb{C})$ とおく．$T \subset G$ を対角行列全体からなる部分群とし，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ とおく．$E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{kl}$ を行列単位とすると，$\mathfrak{g}$ は次のような分解を持つ．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{C}E_{ij}$$

この分解は T の $\mathfrak{g}$ への随伴作用を通じて解釈することができる．まず次の公式は基本的である：$\mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n))(X_{ij})_{ij} = (t_i t_j^{-1} X_{ij})_{ij}$．このことから，$\alpha_{ij} \colon T \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$

を $\alpha_{ij}(\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n)) = t_i t_j^{-1}$ と定義すると，$\mathbb{C}E_{ij} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(t)(X) = \alpha_{ij}(t)X \ (t \in T)\}$ となる．よって，一般に $\alpha \in X^*(T)$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(t)X = \alpha(t)X \ (t \in T)\}$ とおき，更に $\Phi = \{\alpha_{ij} \mid 1 \le i \ne j \le n\}$ とおけば，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

となる．これを（GL_n の，または $\mathfrak{gl}_n$ の）**ルート空間分解**と言う．なお $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$ である．

$1 \le i \ne j \le n$ に対して，$\varphi\colon \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{GL}_n$ を i,j 行及び列に入れるように定める．つまり $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2$ に対して a を (i,i) 成分，b を (i,j) 成分，c を (j,i) 成分，d を (j,j) 成分とし，残りの対角成分を 1，残りの対角以外の成分を 0 とするような行列を与える写像 φ を考える．φ の微分は $\mathfrak{sl}_2$ から $\mathfrak{gl}_n$ への準同型を定め，従って $\mathfrak{sl}_2$ トリプルを定める．具体的には (E_{ij}, H_{ij}, E_{ji})，ただし H_{ij} は (i,i) 成分を 1，(j,j) 成分を -1，そのほかの成分を 0 とする対角行列である．$\alpha_{ij}^\vee \in X_*(T)$ を $t \mapsto \varphi(\mathrm{diag}(t,t^{-1}))$ と定め，$\Phi^\vee = \{\alpha_{ij}^\vee \mid 1 \le i \ne j \le n\}$ とおく．$(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ を (GL_n, T) に付随する**ルートデータ**と呼ぶ．

同様のことを一般に行おう．$T \subset G$ を極大トーラス，つまり G 内のトーラスであって極大なものとし，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ とおく．このとき，$\mathfrak{g}$ は次のように分解する：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in X^*(T)\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

ここで $\alpha \in X^*(T)$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha$ は例 5.11 と同様に定義される．$\Phi = \{\alpha \in X^*(T) \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \ne 0\}$ とおく．次の事実は簡単にわかる．

補題 5.12 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$．特に $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{t}$．

また次が成り立つ．

補題 5.13 ([Kna02, Proposition 2.17, Lemma 2.18, Proposition 2.21]) $\alpha \in \Phi$ ならば，$-\alpha \in \Phi$ かつ $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$．更に $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \ne 0$．ただし $\alpha\colon T \to \mathbb{G}_\mathrm{m}$ の微分 $\mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ を同じ記号 α で書いた．

この事実を使うことで，各 $\alpha \in \Phi$ に対して次のように $\mathfrak{sl}_2 \hookrightarrow \mathfrak{g}$ を作ることができる．$X'_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ を 0 でない元とし，$H'_\alpha = [X'_\alpha, X'_{-\alpha}]$ とおく．補題から $\alpha(H'_\alpha) \ne 0$

である．$H_\alpha = 2H'_\alpha/\alpha(H'_\alpha) \in \mathfrak{t}$，$X_\alpha = X'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，$X_{-\alpha} = 2X'_{-\alpha}/\alpha(H'_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ とおくと

補題 5.14　$(X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha})$ は $\mathfrak{sl}_2$ トリプル．

証明は定義に基づき計算すればよい．よって，準同型写像 $\mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$ を得る．この準同型は群準同型 $\mathrm{SL}_2 \xrightarrow{\varphi} G$ に持ち上がることを示すことができる．このことを用いて，$\alpha^\vee \in X_*(T)$ を $\alpha^\vee(t) = \varphi(\mathrm{diag}(t, t^{-1}))$ と定め，$\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ とおく．

定義 5.15　$(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ を (G, T) の**ルートデータ**と呼び，Φ の元を**ルート**，$\Phi^\vee$ の元を**コルート**と呼ぶ．

双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X^*(T) \times X_*(T) \to \mathbb{Z}$ を思い出そう．

命題 5.16（[Kna02, Proposition 2.41]）　$\alpha, \beta \in \Phi$ に対して次が成り立つ．

(1) $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.
(2) $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \Phi$，$\beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee \in \Phi^\vee$.

略証　(1) $t^{\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle} = \alpha(\alpha^\vee(t)) = \alpha(\varphi(\mathrm{diag}(t, t^{-1})))$ であり，$\alpha(\varphi(\mathrm{diag}(t, t^{-1})))X_\alpha = \mathrm{Ad}(\varphi(\mathrm{diag}(t, t^{-1})))(X_\alpha) = \mathrm{Ad}(\varphi(\mathrm{diag}(t, t^{-1})))(\varphi(E)) = \varphi(\mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(t, t^{-1})(E)) = \varphi(t^2 E) = t^2 X_\alpha$ であることから，(1) がわかる．

(2) $g = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \in G$ を考えると，$\mathrm{Ad}(g)T = T$ が成り立つ．よって $\mathrm{Ad}(g)$ は $X^*(T), X_*(T)$ に作用し Φ，$\Phi^\vee$ を保つが，これによる β，$\beta^\vee$ の像がそれぞれ左辺となっている． □

一般に $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ により $s_\alpha \in \mathrm{Aut}(X^*(T))$ を定める．同様に $s_{\alpha^\vee} \in \mathrm{Aut}(X_*(T))$ も定めておく．このとき上の (2) から $s_\alpha(\Phi) = \Phi$，$s_{\alpha^\vee}(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$ である．

定義 5.17　組 $(X^*, \Phi, X_*, \Phi^\vee)$ が（抽象的な）ルートデータであるとは，

(1) X^* は階数有限の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であり，$X_* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*, \mathbb{Z})$.
(2) $\Phi \subset X^*$，$\Phi^\vee \subset X_*$ はどちらも有限部分集合．
(3) 全単射 $\alpha \mapsto \alpha^\vee \colon \Phi \to \Phi^\vee$ が与えられている．
(4) $\alpha \in \Phi$ に対して $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$，$s_\alpha(\Phi) = \Phi$，$s_{\alpha^\vee}(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$.

を満たすことである．更に，$r \in \mathbb{Z}$ に対して $\alpha, r\alpha \in \Phi$ ならば $r = \pm 1$ を満たす時，このルートデータは**被約**であると言う[*12]．

(G, T) より得られる $(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ はこれらの条件を満たし，さらに被約となる [Spr09, 7.4.3, 7.4.4 Lemma]．

例 5.18 $X^* = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i$，$\Phi = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$，$\{e'_i\} \subset X_*$ を e_i の双対基底，$\Phi^\vee = \{e'_i - e'_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$，$(e_i - e_j)^\vee = e'_i - e'_j$ とするとこれはルートデータの公理を満たす．このルートデータは例 5.11 で得られたものである．

注意 5.19
(1) ルートデータの定義から，$(X_*, \Phi^\vee, X^*, \Phi)$ もまたルートデータとなる．
(2) $\alpha \in \Phi$ ならば $-\alpha \in \Phi$ であり $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$，また $s_\alpha(\beta)^\vee = s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee)$ となることが示される．

以下のように、ルートデータは簡約代数群を分類する．二つのルートデータ $(X^*, \Phi, X_*, \Phi^\vee)$ と $(Y^*, \Psi, Y_*, \Psi^\vee)$ が同型であるとは，ある同型 $f^* \colon X^* \to Y^*$，$f_* \colon X_* \to Y_*$ であって，双一次形式 $X^* \times X_* \to \mathbb{Z}$，$Y^* \times Y_* \to \mathbb{Z}$ を保ち，$f^*(\Phi) = \Psi$，$f_*(\Phi^\vee) = \Psi^\vee$ を満たすものが存在することである．

定理 5.20（[Spr09, 9.6.2 Proposition, 10.1.1 Theorem]） $\mathbb{C}$ 上の簡約群の同型類と，被約なルートデータの同型類は一対一に対応する．

5.4 Weyl 群と正ルート系

この節では，$(X^*, \Phi, X_*, \Phi^\vee)$ をルートデータとし，付随するいくつかの概念を導入する．次で定義される群は，ルートデータにとって非常に重要である．

定義 5.21 $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ により生成される $\mathrm{Aut}(X^*)$ の部分群をこのルートデータの **Weyl 群**という．

注意 5.22 $X_* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*, \mathbb{Z})$ であるので，$\mathrm{Aut}(X^*) \simeq \mathrm{Aut}(X_*)$．この同型で $s_\alpha \mapsto s_{\alpha^\vee}$ [SGA3 III, Exposé XXI Corollaire 1.1.11] となり，よって Weyl 群は

[*12] $2 = \langle r\alpha, (r\alpha)^\vee \rangle = r\langle \alpha, (r\alpha)^\vee \rangle \in r\mathbb{Z}$ から一般には $r = \pm 1, \pm 2$.

$\{s_{\alpha^\vee} \mid \alpha \in \Phi\}$ の生成する $\mathrm{Aut}(X_*)$ の部分群とも同型である．この同型により，Weyl 群は X_* にも作用する．以下断らずにこの事実を使う．

W を Weyl 群とする．$w \in W$ は明らかに Φ を保ち，よって Φ の置換を引き起こす．

定理 5.23（[SGA3 III, Exposé XXI, Corollaire 1.2.6, 1.2.7]） $W \to \mathrm{Aut}_{集合}(\Phi)$ は単射である．特に W は有限群．

ここで正ルートの概念を導入しよう．

定義 5.24 $\Phi^+ \subset \Phi$ が正ルート系であるとは，$\Phi = \Phi^+ \amalg (-\Phi^+)$ であり，$\alpha, \beta \in \Phi^+$ かつ $\alpha + \beta \in \Phi$ ならば $\alpha + \beta \in \Phi^+$ となることである．Φ^+ の元を**正ルート**という．

正ルートはたとえば次のように作ることができる．

練習 5.25 次を示せ．

(1) 同型 $X^* \simeq \mathbb{Z}^r$ を固定し，$\mathbb{Z}^r$ の辞書式順序を X^* に移したものを $\geq$ と書くと，$\geq$ は全順序であり，また $\alpha, \beta, \gamma \in X^*$，$\alpha \geq \beta$ ならば $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$ となることを示せ．

(2) X^* に (1) を満たすような全順序 $\geq$ が与えられたとすると，$\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha > 0\}$ は正ルート系になることを示せ．

正ルートの取り方がどの程度あるかは Weyl 群により支配される．$w \in W$，$\Phi^+ \subset \Phi$ を正ルート系とすれば，$w(\Phi^+)$ も正ルート系であることに注意しよう．

定理 5.26（[SGA3 III, Exposé XXI, Corollaire 3.3.7, 5.4]） W は $\{\Phi^+ \subset \Phi \mid \Phi^+ \text{ は正ルート系}\}$ に自由かつ推移的に作用する．

正ルート系 Φ^+ を一つ固定しよう．

定義 5.27 $\alpha \in \Phi^+$ は Φ^+ の二つの元の和で書き表されないとき**単純ルート**であるという．

Δ を単純ルートからなる集合とする．

**定理 5.28（[SGA3 III, Exposé XXI, Définition 3.1.6, Théorème 3.2.8, Corollaire

3.2.14]) Δ は $\mathbb{Z}\Phi$ の基底であり，$\Phi^+ = \Phi \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta$ が成り立つ．

例 5.29 例 5.18 のルートデータを考える．

$$s_{e_i - e_j}(e_k) = e_k - (\delta_{ik} - \delta_{jk})(e_i - e_j) = \begin{cases} e_j & (k = i), \\ e_i & (k = j), \\ e_k & (k \neq i, j). \end{cases}$$

よって，$s_{ij} = (i, j) \in S_n$ を互換とすれば $s_{e_i - e_j}(e_k) = e_{s_{ij}(k)}$ であり，$s_{e_i - e_j} \mapsto s_{ij} \in S_n$ は同型 $W \simeq S_n$ を与える．

$(i_1, \ldots, i_n)$ を $(1, \ldots, n)$ の順列とし，$\Phi^+ = \{e_{i_k} - e_{i_l} \mid k < l\}$ と定めると，これは正ルート系の条件を満たす．逆に正ルート系は全てこの形で得られ，よって正ルート系と $(1, \ldots, n)$ の順列は一対一に対応する．従って，S_n が自由かつ推移的に作用する．また，$\Delta = \{e_{i_k} - e_{i_{k+1}} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$ である．特に順列として $(1, \ldots, n)$ を選んだ場合には，$\Delta = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ となる．

$\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$ とおく．

定義 5.30 組 $(X^*(T), \Delta, X_*(T), \Delta^\vee)$ を**基底付きルートデータ**と呼ぶ．

最後に，正ルート系と一対一に対応する概念をもう一つ導入しておこう．

定義 5.31 $X^*(T)_\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi}\{v \in X^*(T)_\mathbb{R} \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle = 0\}$ の連結成分を **Weyl の部屋 (Weyl chamber)** と呼ぶ．

正ルート系 $\Phi^+ \subset \Phi$ に対し，$\{v \in X^*(T)_\mathbb{R} \mid$ 任意の $\alpha \in \Phi^+$ に対して $\langle v, \alpha^\vee \rangle > 0\}$ は Weyl の部屋となる．（この閉包に属する元は Φ^+ に関して**支配的**であると言われる．）この対応により：

定理 5.32（[SGA3 III, Exposé XXI, Corollaire 3.6.11]） Weyl の部屋と正ルート系は一対一に対応する．

5.5 Lie 環とルート系，Dynkin 図形

定理 5.20 で述べたとおり，ルートデータ $(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ は簡約群を分類する．対応して簡約 Lie 環の分類に関して次が成り立つ．$V = X^*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, $V^* = X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{R})$ とおく．

定理 5.33（[Kna02, Theorem 2.108, 2.111]） $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の簡約 Lie 環とする．組 $(V, \Phi, V^*, \Phi^\vee)$ は $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ となる G の取り方によらず[*13]，これにより $\mathfrak{g}$ は分類される．

$\mathfrak{g}$ は簡約であるので，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}'$ と Abel な Lie 環および半単純 Lie 環の直和に分解する．これに応じて次のように組 $(V, \Phi, V^*, \Phi^\vee)$ も分解する．$V_\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in \Phi} \mathrm{Ker}\, \alpha^\vee$，$V' = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}\alpha$ とおく．すると $V = V_\mathfrak{a} \oplus V'$，$\Phi \subset V'$，$\Phi^\vee \subset (V')^*$ となり，$(V_\mathfrak{a}, \emptyset, V_\mathfrak{a}^*, \emptyset)$ は $\mathfrak{a}$ に，$(V', \Phi, (V')^*, \Phi^\vee)$ は $\mathfrak{g}'$ に対応する．

以下 $\mathfrak{g}$ は半単純であるとしよう．このとき $(V, \Phi, V^*, \Phi^\vee)$ は以下で定義されるルート系の条件を満たす．

定義 5.34 組 $(V, \Phi, V^*, \Phi^\vee)$ が（抽象的な）**ルート系**であるとは，V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，$V^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{R})$，$\Phi \subset V$，$\Phi^\vee \subset V^*$ はそれぞれ V, V^* を張る有限集合であり，ルートデータの定義における (3)(4) を満たすことである．また $\alpha, r\alpha \in \Phi$ ならば $r = \pm 1$ である時**被約**であるという．

注意 5.35 $\mathfrak{g}$ が半単純でなければ，Φ は V を張らない．

ルート系は次のように内積を使って定義されることも多い．

定義 5.36 組 (V, Φ) が（抽象的な）**ルート系**であるとは

(1) V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元内積空間．その内積を $(\cdot, \cdot)$ と書く．
(2) $\Phi \subset V \setminus \{0\}$ は V を張る有限集合．
(3) $\alpha \in \Phi$ に対して $s_\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ を $s_\alpha(v) = v - 2((v, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha$ と定めると，$s_\alpha(\Phi) = \Phi$.
(4) $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$.

を満たすことである．

注意 5.37 定義 5.34 のルート系に対して，W 不変な内積をとると定義 5.36 のルート系を得る．逆に定義 5.36 のルート系が与えられたとすると，内積により $V \simeq V^*$. $\alpha^\vee \in V^*$ を $2\alpha/(\alpha, \alpha) \in V$ にこの同型で対応する元とすると，定義 5.34 のルート系を得る [Bou02, Chapter VI, §1.1 Lemma 2]．このようにこの二つの定義は本質的

[*13] この組は $\mathfrak{g}$ のみで定義される [Kna02, Chapter II].

に[*14]同等である．

ルートデータと同様，正ルート系 $\Phi^+ \subset \Phi$ の概念や，そこから定まる単純ルートの集合 $\Delta \subset \Phi^+$ が考えられる．定理 5.28 から，Δ は V の基底である．

定義 5.38 Δ を頂点とし，$\alpha, \beta \in \Delta$，$\alpha \neq \beta$ に対して

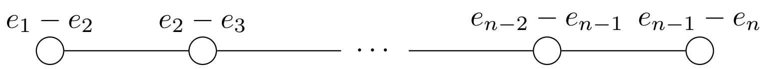
- $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ 本の線を引き，
- $|\langle \alpha, \beta^\vee \rangle| > |\langle \beta, \alpha^\vee \rangle|$ ならば α から β に矢印を引く[*15]

としてできるグラフを **Dynkin 図形**という．

注意 5.39 Δ' を別の正ルート系に対する単純ルートのなす集合とすると，定理 5.26 からある $w \in W$ であって $w(\Delta') = \Delta$ となるものが存在する．w は Dynkin 図形の形を変えないので，Dynkin 図形は正ルート系の取り方によらない．

定理 5.40（[Bou02, Chapter VI, §4.2, Proposition 1]） Dynkin 図形はルート系の同型類を，従って半単純 Lie 環の同型類を定める．

例 5.41 例 5.18 のルートデータに対応する Dynkin 図形は次のようになる．（順列 $(1, \ldots, n)$ に対応する正ルートをとる．）



このグラフを A_{n-1} **型の Dynkin 図形**[*16]という．

一般に半単純 Lie 環は $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$ と単純 Lie 環への直和に分解する．対応して次のような分解がある．$\Delta = \Delta_1 \amalg \cdots \amalg \Delta_r$ を Dynkin 図形の連結成分への分解に応じた分解とし，$V_i = \mathbb{R}\Delta_i \subset V$，$\Phi_i = V_i \cap \Phi$ とおく．

命題 5.42（[Bou02, Chapter VI, §1.7, Corollary 5]） $V = \bigoplus_i V_i$，$\Phi = \coprod_i \Phi_i$ であり，$(V_i, \Phi_i, V_i^*, \Phi_i^\vee)$ はルート系．それに対応する半単純 Lie 環を $\mathfrak{g}_i$ とすると，

[*14] 定義 5.36 における内積を復元することができない．ただし，ルート系が既約（定義 5.43）ならば内積は定数倍を除いて一意である [Bou02, Chapter VI, §1.2, Proposition 7].

[*15] 定義 5.36 にあるような内積 $(\cdot,\cdot)$ を導入すると，$\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ であるので，条件は $(\alpha,\alpha) > (\beta,\beta)$ と同値．このとき，矢印は α と β の長さに対して不等号をつけていると思うと憶えやすい．

[*16] A_{n-1} の $n-1$ は頂点の数である．

$\mathfrak{g} \simeq \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$.

定義 5.43 Dynkin 図形が空でなく連結となるルート系を**既約**であるという．これは対応する半単純 Lie 環が単純であることと同値.

5.6 例

E_{ij} を行列単位とする.

例 5.44（シンプレクティック群，C 型） $G = \mathrm{Sp}_{2n}$，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ とおく．$\mathfrak{g} = \left\{ X \in M_{2n}(\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^tX \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} X = 0 \right\}$ であり，具体的に計算すると

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \;\middle|\; A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C}), {}^tB = B,\ {}^tC = C \right\}$$

となる．極大トーラス $T \subset G$ を $T = \{\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\}$ により定め，$e_i \in X^*(T)$ を t_i 成分への射影，$e_i' \in X_*(T)$ を t_i 成分への埋め込みとして定める．$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$，$X_{ij} = E_{i,j+n} + E_{j,i+n}$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$，$Y_{ij} = E_{i+n,j} + E_{j+n,i}$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$，$Z_{ij} = E_{ij} - E_{j+n,i+n}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$ とおくと，$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus \mathbb{C}X_{ij} \oplus \bigoplus \mathbb{C}Y_{ij} \oplus \bigoplus \mathbb{C}Z_{ij}$．また，$X_{ij} \in \mathfrak{g}_{e_i+e_j}$，$Y_{ij} \in \mathfrak{g}_{-e_i-e_j}$，$Z_{ij} \in \mathfrak{g}_{e_i-e_j}$ となり，よって

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \amalg \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

である．コルートは $(\varepsilon_1 e_i + \varepsilon_2 e_j)^\vee = \varepsilon_1 e_i' + \varepsilon_2 e_j'$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\})$，$(\pm 2e_i)^\vee = \pm e_i'$（複合同順）で与えられる.

W を Weyl 群とする．$s_{e_i+e_j} = s_{-e_i-e_j} = s_{2e_j} s_{2e_i} s_{e_i-e_j}$ であるので，W は $\{s_{e_i-e_j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ と $\{s_{2e_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ で生成される．例 5.29 から，$\{s_{e_i-e_j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ で生成される部分群は S_n と同型．また

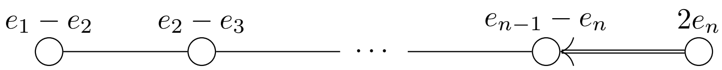
$$s_{2e_i}(e_k) = \begin{cases} -e_k & (k = i), \\ e_k & (k \neq i) \end{cases}$$

であり，よって $\{s_{2e_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ の生成する部分群は $\{\pm 1\}^n$ と同型である．ただし，$(\varepsilon_i) \in \{\pm 1\}^n$ を $(\varepsilon_i)e_k = \varepsilon_k e_k$ により $X^*(T)$ に作用させることで，$\{\pm 1\}^n \subset \mathrm{Aut}(X^*(T))$ と見なした．よって $W \simeq S_n \ltimes \{\pm 1\}^n$.

$\Phi^+ = \{e_i - e_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{e_i + e_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{2e_i \mid 1 \le i \le n\}$
とおくとこれは正ルート系となり，対応する単純ルートのなす集合 Δ は

$$\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\} \cup \{2e_n\}$$

で与えられる．Dynkin 図形は



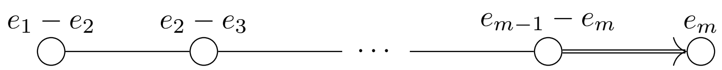
となる．これを C_n **型 Dynkin 図形という**．

直交群の場合はその次数の偶奇により様子がかわる．$\mathrm{SO}(n)$ を反対角行列 $I = (\delta_{i,n+1-j})_{ij}$ を使って $\mathrm{SO}(n) = \{g \in \mathrm{SL}_n \mid {}^t gIg = I\}$ と実現しておくこととする．つまり，$\mathbb{C}^n$ 上の二次形式 $(x_i) \mapsto x_1x_n + x_2x_{n-1} + \cdots + x_nx_1$ により定義されているとする．Lie 環 $\mathfrak{so}_n$ は $\{(a_{ij}) \in M_n \mid a_{n+1-j,n+1-i} = -a_{ij}\}$ と実現される．

例 5.45（奇数次直交群，B 型） $n = 2m+1$ を奇数として特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ を考えよう．$T = \{\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_m, 1, t_m^{-1}, \ldots, t_1^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{G}_\mathrm{m}\}$ と極大トーラスをとり，変数 t_i を使い $e_i \in X^*(T)$，$e'_i \in X_*(T)$ を例 5.44 と同様に定める．$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$，$X_{ij} = E_{ij} - E_{n+1-j,n+1-i}$ $(1 \le i \ne j \le m)$，$Y_{ij} = E_{i,n+1-j} - E_{j,n+1-i}$ $(1 \le i < j \le m)$，$Y'_{ij} = E_{n+1-i,j} - E_{n+1-j,i}$ $(1 \le i < j \le m)$，$Z_i = E_{i,m+1} - E_{m+1,n+1-i}$ $(1 \le i \le m)$，$Z'_i = E_{m+1,i} - E_{n+1-i,m+1}$ $(1 \le i \le m)$ とおくと，$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus \mathbb{C}X_{ij} \oplus \bigoplus \mathbb{C}Y_{ij} \oplus \bigoplus \mathbb{C}Y'_{ij} \oplus \bigoplus \mathbb{C}Z_i \oplus \bigoplus \mathbb{C}Z'_i$ である．$X_{ij} \in \mathfrak{g}_{e_i - e_j}$，$Y_{ij} \in \mathfrak{g}_{e_i + e_j}$，$Y'_{ij} \in \mathfrak{g}_{-e_i - e_j}$，$Z_i \in \mathfrak{g}_{e_i}$，$Z'_i \in \mathfrak{g}_{-e_i}$ となるので

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le m\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \le i \le m\}$$

を得る．コルートは $(\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2)^\vee = \varepsilon_1 e'_1 + \varepsilon_2 e'_2$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\})$，$(\pm e_i)^\vee = \pm 2e'_i$（複合同順）で与えられ，例 5.44 と同様に $W \simeq S_m \ltimes \{\pm 1\}^m$ となる．また $\Phi^+ = \{e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le m\} \cup \{e_i \mid 1 \le i \le m\}$ と正ルート系をとると $\Delta = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{m-1} - e_m, e_m\}$ であって，Dynkin 図形は



となる．これを B_m **型 Dynkin 図形**という．

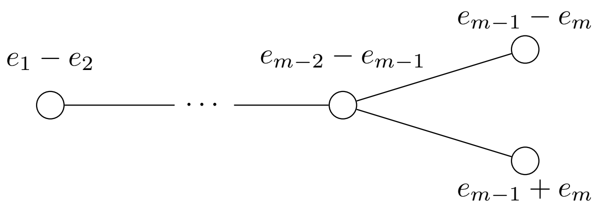
例 5.46（偶数次直交群，D 型） $n=2m$ を偶数とし，$G=\mathrm{SO}(n)$，$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ とする．$T=\{\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_m,t_m^{-1},\dots,t_1^{-1})\mid t_i\in\mathbb{G}_\mathrm{m}\}$ と極大トーラスをとり，$e_i\in X^*(T)$，$e'_i\in X_*(T)$ を例 5.44 と同様に定める．$\mathfrak{t}=\mathrm{Lie}(T)$ とおき，X_{ij}，Y_{ij}，Y'_{ij} を例 5.45 と同様にとると，$\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\oplus\bigoplus\mathbb{C}X_{ij}\oplus\bigoplus\mathbb{C}Y_{ij}\oplus\bigoplus\mathbb{C}Y'_{ij}$ である．また $X_{ij}\in\mathfrak{g}_{e_i-e_j}$，$Y_{ij}\in\mathfrak{g}_{e_i+e_j}$，$Y'_{ij}\in\mathfrak{g}_{-e_i-e_j}$ であるので

$$\Phi=\{\pm e_i\pm e_j\mid 1\le i<j\le m\}$$

を得る．コルートは $(\varepsilon_1e_i+\varepsilon_2e_j)^\vee=\varepsilon_1e'_i+\varepsilon_2e'_j$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\})$ で与えられる．Weyl 群 W は $\{s_{e_i-e_j}\mid 1\le i\ne j\le m\}\cup\{s_{e_i+e_j}s_{e_i-e_j}\mid 1\le i\ne j\le m\}$ で生成され，例 5.29 から $\{s_{e_i-e_j}\mid 1\le i\ne j\le m\}$ で生成される部分群は S_m と同型．また

$$s_{e_i+e_j}s_{e_i-e_j}(e'_k)=\begin{cases}e'_k & (k\ne i,j),\\ -e'_i & (k=i,j)\end{cases}$$

であるので，$\{s_{e_i+e_j}s_{e_i-e_j}\mid 1\le i\ne j\le m\}$ の生成する部分群は $\{(\varepsilon_i)\in\{\pm1\}^m\mid \prod_i\varepsilon_i=1\}$ と同型．よって $W\simeq S_m\ltimes\{(\varepsilon_i)\in\{\pm1\}^m\mid\prod_i\varepsilon_i=1\}$ である．$\Phi^+=\{e_i\pm e_j\mid 1\le i<j\le m\}$ とおくとこれは正ルート系であり，$\Delta=\{e_1-e_2,\dots,e_{m-1}-e_m,e_{m-1}+e_m\}$ となる．Dynkin 図形は



となる．これを D_m **型 Dynkin 図形**という．

練習 5.47 $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{sl}_2$，$\mathfrak{so}(4)$ と $\mathfrak{sl}_2\oplus\mathfrak{sl}_2$，$\mathfrak{so}(5)$ と $\mathfrak{sp}_4$，$\mathfrak{so}(6)$ と $\mathfrak{sl}_4$ はそれぞれ Dynkin 図形が同じであるので同型である．同型写像を具体的に構成せよ．

5.7 自己同型

項 5.3 と 5.4 で述べたとおり，$\mathbb{C}$ 上の連結簡約群 G に対して

- 極大トーラス T を選ぶことでルートデータ $(X^*(T),\Phi,X_*(T),\Phi^\vee)$ を

- 正ルート系 Φ^+ を選ぶことで基底付きルートデータ $(X^*(T), \Delta, X_*(T), \Delta^\vee)$ を

得ることができた．これらのデータの T や Φ^+ への依存性を調べよう．まず T の取り替えは次の定理により述べることができる．

定理 5.48（[Spr09, 6.4.1 Theorem]） G の二つの極大トーラスはある $g \in G$ による共役で移り合う．

よって，T_1, T_2 を二つの極大トーラスとすると，ある $g \in G$ が存在し $T_2 = gT_1g^{-1}$ となる．従って，$X^*(T_1) \simeq X^*(T_2)$ を $\lambda \mapsto \lambda \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})$ により定めることができ，これはルート系の同型 $f\colon (X^*(T_1), \Phi_1, X_*(T_1), \Phi_1^\vee) \simeq (X^*(T_2), \Phi_2, X_*(T_2), \Phi_2^\vee)$ を与える．

更に正ルート系 $\Phi_1^+ \subset \Phi_1, \Phi_2^+ \subset \Phi_2$ を固定すると，上の同型による像 $f(\Phi_1^+)$ は Φ_2 の正ルート系になる．よって定理 5.26 からある $w \in W = W(\Phi_2)$ が存在し，$\Phi_2^+ = wf(\Phi_1^+)$ となる．従って，$w \circ f$ は同型 $(X^*(T_1), \Delta_1, X_*(T_1), \Delta_1^\vee) \simeq (X^*(T_2), \Delta_2, X_*(T_2), \Delta_2^\vee)$ を与える．

定理 5.49 この同型は g の取り方によらない．

証明には次のそれ自身重要な定理を使う．

定理 5.50 ([Spr09, 7.1.9 Theorem, 7.6.4 Corollary]) T を極大トーラス，$N_G(T)$ を T の G における正規化群とする．このとき $N_G(T)$ は $X^*(T)$ に作用するが，これにより得られる $N_G(T) \to \mathrm{Aut}(X^*(T))$ の核は $Z_G(T)$ であり，その像は W と一致する．また $Z_G(T) = T$ が成り立つ．特に $N_G(T)/T \simeq W$．

定理 5.49 の証明 $g_1, g_2 \in G$ を $T_1 = g_1T_2g_1^{-1}$，$T_1 = g_2T_2g_2^{-1}$ となる元とし，$n = g_2^{-1}g_1$ とおくと，$n \in N_G(T_2)$．$i = 1, 2$ に対して，g_i がルートデータに導く同型を $f_i\colon (X^*(T_1), \Phi_1, X_*(T_1), \Phi_1^\vee) \simeq (X^*(T_2), \Phi_2, X_*(T_2), \Phi_2^\vee)$，また $n \in N_G(T_2)$ が $\lambda \mapsto \lambda \circ \mathrm{Ad}(n)$ により $X^*(T_2)$ 上に導く自己同型を w とすると，定理から w は W の元で与えられ，また構成から $w \circ f_2 = f_1$ である．$w_1, w_2 \in W$ を $w_1(f_1(\Phi_1^+)) = w_2(f_2(\Phi_1^+)) = \Phi_2^+$ ととると，$w_1ww_2^{-1} \in W$ は正ルート系 Φ_2^+ を保つので，定理 5.26 から $w_1ww_2^{-1} = 1$，よって $w_1 \circ f_1 = w_2w^{-1} \circ f_1 = w_2 \circ f_2$ である． □

この事実を使い，G の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ をルートデータにより記述しよう．$g \in G$ に対して，$h \mapsto ghg^{-1}$ は G の自己同型を与え，$G \to \mathrm{Aut}(G)$ を得る．この像を $\mathrm{Int}(G)$ と書き，$\mathrm{Int}(G)$ に属する自己同型を**内部自己同型**と呼ぶ．これは $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群をなし，$\mathrm{Int}(G) \simeq G/Z(G)$ である．

$T \subset G$ を極大トーラスとして固定し，$(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ をそこから定まるルートデータ，また正ルート系を固定して，$D = (X^*(T), \Delta, X_*(T), \Delta^\vee)$ を基底付きルートデータとする．$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ とすると，$T_1 = \varphi(T)$ も T の極大トーラスである．これに付随するルートデータを $(X^*(T_1), \Phi_1, X_*(T_1), \Phi_1^\vee)$ とすると，$\lambda \mapsto \lambda \circ \varphi^{-1}$ は同型 $(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee) \simeq (X^*(T_1), \Phi_1, X_*(T_1), \Phi_1^\vee)$ を与える．Δ_1 を $\Delta \subset \Phi$ のこの同型による像とすると，同型 $D = (X^*(T), \Delta, X_*(T), \Delta^\vee) \simeq (X^*(T_1), \Delta_1, X_*(T_1), \Delta_1^\vee)$ を得る．一方，定理 5.26 から Weyl 群の元が誘導する同型 $(X^*(T_1), \Delta_1, X_*(T_1), \Delta_1^\vee) \simeq (X^*(T), \Delta, X_*(T), \Delta^\vee)$ がただ一つ存在し，従って同型 $D \to D$ を得る．このようにして $\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(D)$ を得る．

もう少し具体的には次の通りである．$g\varphi(T)g^{-1} = T$ となる $g \in G$ をとり，$\gamma' \colon X^*(T) \to X^*(T)$ を $\gamma'(\lambda) = \lambda \circ \varphi^{-1} \circ \mathrm{Ad}(g)^{-1}$ により定める．更に $w \in W$ を $w\gamma'(\Delta) = \Delta$ ととると，対応する $\mathrm{Aut}(D)$ の元は $w\gamma'$ により与えられる．これにより得られる準同型写像 $\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(D)$ は，その構成から明らかに $\mathrm{Int}(G)$ を核に含む．

定理 5.51（[SGA3 III, Exposé XXIV, Théorème 1.3]） これは全射であり，核は $\mathrm{Int}(G)$ と一致する，つまり

$$1 \to \mathrm{Int}(G) \to \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(D) \to 1$$

は完全である．しかもこの完全列は分裂する．

注意 5.52 $\gamma \in \mathrm{Aut}(D)$ は組み合わせ論的に記述できる．もし G が半単純ならば，$X^*(T)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\Delta$ でありよって γ は $\gamma \colon \Delta \to \Delta$ のみで定まる．これは Dynkin 図形の同型を引き起こすので，例えば B_n, C_n 型（$n \geq 2$）ならば自明なものしかないことがわかる．

分裂は一意ではないが，各 $\alpha \in \Delta$ に対して $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ を固定すると次が成り立つ．（この $\{X_\alpha\}$ を**分裂データ**という[*17]．）

[*17] épinglage, pinning などとも呼ぶ．

命題 5.53（[SGA3 III, Exposé XXIII, Corollaire 5.5]） $\gamma \in \mathrm{Aut}(D)$ とすると，その $\mathrm{Aut}(G)$ へのリフト φ であって $\varphi(T) = T$，$\gamma(\lambda) = \lambda \circ \varphi^{-1}$ $(\lambda \in X^*(T))$，$\varphi(X_\alpha) = X_{\gamma(\alpha)}$ を満たす物がただ一つ存在する．

5.8 分類：$\mathbb{C}$ 上の場合

既に述べた通り，$\mathbb{C}$ 上の簡約群はルートデータにより分類される．ここではもう少し詳しく分類について述べよう．

Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の分類は，項 5.5 から次の Dynkin 図形の分類に帰着される．

定理 5.54（[Kna02, Theorem 2.84]） 既約な Dynkin 図形は節 5.6 であげた A_n 型，B_n 型，C_n 型，D_n 型と，次の**例外型**のみである．

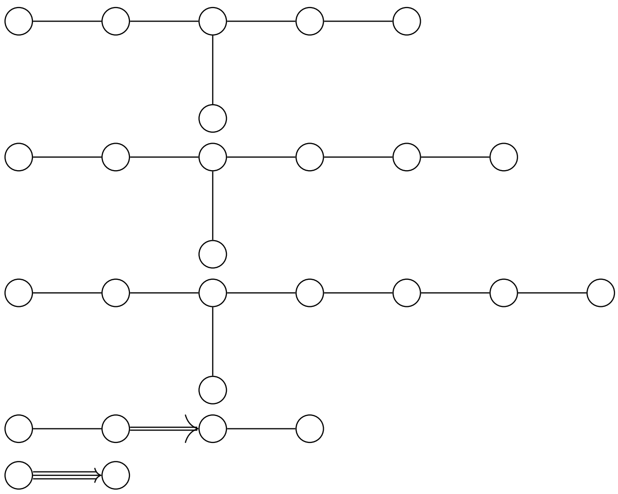
E_6 型

E_7 型

E_8 型

F_4 型

G_2 型



簡約群 G の分類に戻ろう．$T \subset G$ を極大トーラスとし，$(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ をルートデータとする．上の定理から，四つ組み $(X^*(T)_\mathbb{R}, \Phi, X_*(T)_\mathbb{R}, \Phi^\vee)$ は本質的に Dynkin 図形により分類される．この四つ組みから $(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ を復元するには，$\mathbb{Z}$ 格子 $X^*(T) \subset X^*(T)_\mathbb{R}$ を選べば良い．これは次の条件を満たす．

$$\mathbb{Z}\Phi \subset X^*(T) \subset \{v \in X^*(T)_\mathbb{R} \mid \langle v, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\ (\alpha \in \Phi)\}.$$

逆にこの条件を満たせば，$(X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ はルートデータの公理を満たす．よって，この条件を満たす $\mathbb{Z}$ 格子により G は分類される．

5.9 被覆など

前節でみたとおり，$\mathfrak{g}$ を固定した時 $\mathrm{Lie}(G)=\mathfrak{g}$ となるような簡約群 G は格子 $X^*(T)$，または同じことだが $X_*(T)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(T),\mathbb{Z})$ によりコントロールされる．一方，$\mathrm{Lie}(G)=\mathfrak{g}$ となるような G たちは，互いに被覆の関係にある，つまり基本群[*18]により統制される．よって，格子 $X_*(T)$ と基本群 $\pi_1(G(\mathbb{C}))$ には関係があることが推察される．具体的には次が成り立つ．

定理 5.55（[Bou05, Chapter IX, §4.6, Proposition 11]） $(X^*(T),\Phi,X_*(T),\Phi^\vee)$ を G のルートデータとする．$\lambda\in X_*(T)$ とすると，$S^1\hookrightarrow\mathbb{C}^\times\xrightarrow{\lambda}T(\mathbb{C})\hookrightarrow G(\mathbb{C})$ によりこれは $\pi_1(G(\mathbb{C}))$ の元を与える．これは同型 $\pi_1(G(\mathbb{C}))=X_*(T)/\mathbb{Z}\Phi^\vee$ を引き起こす．

位相群の中心も被覆と関わる．たとえば，$\Gamma\subset G$ を G の中心の離散的な部分群とすると，$G\to G/\Gamma$ は被覆変換群を Γ とする被覆となる．

定理 5.56（[Bou05, Chapter IX, §4.4 Proposition 8]） $Z(G)=\{t\in T\mid \alpha(t)=1\ (\alpha\in\Phi)\}$ であり，$X^*(Z(G))\simeq X^*(T)/\mathbb{Z}\Phi$[*19]．

練習 5.57 $Z(G)=\{g\in T\mid \mathrm{Ad}(g)X=X\ (X\in\mathfrak{g})\}$ であることを利用してこの定理の前半を示せ．

G が半単純であるとしよう．前節の通り $X^*(T)$ は $X^*(T)_{\mathbb{R}}$ の格子であって

$$\mathbb{Z}\Phi\subset X^*(T)\subset\{v\in X^*(T)_{\mathbb{R}}\mid \langle v,\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{Z}\ (\alpha\in\Phi)\}$$

となるが，G が半単純であることからこの両側は $X^*(T)_{\mathbb{R}}$ の格子である．両極端な場合を考えよう．

- $X^*(T)=\{v\in X^*(T)_{\mathbb{R}}\mid \langle v,\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{Z}\ (\alpha\in\Phi)\}$ の場合．定理 5.55 から $\pi_1(G(\mathbb{C}))$ は自明である．つまり G は単連結．
- $X^*(T)=\mathbb{Z}\Phi$ の場合．定理 5.56 からこのとき G は随伴型．

---

*18 ここでは $G(\mathbb{C})$ の位相的な基本群を考える．または，注意 2.36 からその極大コンパクト部分群の基本群としても良い．

*19 $Z(G)$ はトーラスとは限らないが，トーラスの場合と同様 $X^*(Z(G))=\mathrm{Hom}(Z(G),\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ と定義する．

一般に簡約群 G からはじめて，G_{der} をその交換子群とする．これを G の**導来群**と言う．G_{der} は半単純群であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}'$（$\mathfrak{a}$ は Abel，$\mathfrak{g}'$ は半単純）と分解した時に $\mathfrak{g}'$ に対応する群である．導来群が単連結な場合には，物事が簡単になることが多い．以下の z 拡大は G の導来群が単連結な場合に帰着させる手法である．

定理 5.58（[Kot82, Lemma 1.1]） G を $\mathbb{R}$ 上の簡約群とすると，簡約群 $\widetilde{G}$ と全射準同型 $r\colon \widetilde{G} \to G$ であって，$\widetilde{G}_{\mathrm{der}}$ は単連結，$\operatorname{Ker} r \subset Z(\widetilde{G})$，$\operatorname{Ker} r$ は $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ および $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ のいくつかの直積と同型となるものが存在する．$\widetilde{G}$ を G の z **拡大**という．

たとえば $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n$ がその例である．$r\colon \widetilde{G} \to G$ が z 拡大ならば，Hilbert の定理 90 から $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \operatorname{Ker} r)$ は自明であるので，$\widetilde{G}(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R})$ もまた全射になる．

5.10 ルートデータ：$\mathbb{R}$ 上の場合

G を $\mathbb{R}$ 上の簡約群とし，$S \subset G$ を $\mathbb{R}$ 上定義された分裂トーラスであって，極大なものとする．このときも同様にルート分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in X^*(S) \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha$$

が定まり，ルートのなす集合 Σ を $\Sigma = \{\alpha \in X^*(S) \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ と定義することができる．

定理 5.59（[Spr09, 15.3.8 Theorem]） $\alpha \in \Sigma$ に対して $\alpha^\vee \in X_*(S)$ が定まり，$(X^*(S), \Sigma, X_*(S), \Sigma^\vee)$ はルートデータとなる．

$\alpha^\vee$ は存在すれば一意だったことに注意する．$\alpha^\vee$ は次のように構成できる．$W = N_G(S)/Z_G(S)$ とおく．（これを G の **Weyl 群**という．）これは有限群となり，また $X^*(S)$ に作用する．$X^*(S)_{\mathbb{R}}$ 上の W 不変な内積 $(\cdot,\cdot)$ を固定し，$X_*(S)_{\mathbb{R}}$ と $X^*(S)_{\mathbb{R}}$ を同一視する．$\alpha^\vee \in X_*(S)_{\mathbb{R}}$ をこの同型で $2\alpha/(\alpha,\alpha)$ に対応する元とすると，$\alpha^\vee \in X_*(S)$ であり，これが求めるものとなる．

注意 5.60 $\mathbb{C}$ 上の場合と同様に見えるが，実は様々な違いが存在する．（例 5.63 を参照.）

(1) ルートデータは被約とは限らない.

(2) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ とは限らない.

(3) $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(S)$ とは限らない.

$\mathbb{R}$ 上の簡約代数群に対して，G の $\mathbb{C}$ への基底変換 $G_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ 上の簡約群である．与えられた $\mathbb{C}$ 上の簡約代数群 H に対して，$G_{\mathbb{C}}$ が H と同型になるような G を H の**実形**という．S を含む $\mathbb{R}$ 上定義された（分裂とは限らない）極大トーラス T をとり（これは必ず取れる），$(G_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}})$ のルートデータを $(X^*(T_{\mathbb{C}}), \Phi, X_*(T_{\mathbb{C}}), \Phi^\vee)$ とすると，$\Sigma = \{\alpha|_S \mid \alpha \in \Phi\} \setminus \{0\}$ であり，$a \in \Sigma$ に対して，$(\mathfrak{g}_a)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha|_S = a} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha$ である．このルートデータの Weyl 群と先ほどの W は殆どの場合に一致しない．

定義 5.61 $S = T$ と取れるとき G を**分裂実形**と呼ぶ．

例えば GL_n や Sp_{2n} などは分裂実形である．定義から，G が分裂実形の時，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ のルート分解に $\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ を施せば $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ のルート分解を得ることができる．

定理 5.62（[Spr09, 16.3.2 Theorem, 16.3.3 Theorem]） 任意の $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群に対して，分裂実形が同型を除きただ一つ存在する．

例 5.63 $1 \le q < p$ とし，$\mathbb{C}^{p+q}$ 上の Hermite 形式を

$$\begin{aligned}&\langle (z_1, \ldots, z_{p+q}), (w_1, \ldots, w_{p+q}) \rangle \\ &\qquad = z_1 \overline{w}_{2q} + z_2 \overline{w}_{2q-1} + \cdots + z_{2q} \overline{w}_1 + z_{2q+1} \overline{w}_{2q+1} + \cdots + z_{p+q} \overline{w}_{p+q}\end{aligned}$$

と定め，G をこの Hermite 形式を不変にするユニタリ群とする．$G \simeq \mathrm{U}(p, q)$ である．Lie 環 $\mathrm{Lie}(G)$ は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ (A \in M_{2q}(\mathbb{C}),\ B \in M_{2q,p-q}(\mathbb{C}),\ C \in M_{p-q,2q}(\mathbb{C}),\ D \in M_{p-q}(\mathbb{C}))$$

であって，$A_{ij} = -\overline{A}_{2q-j+1, 2q-i+1}$, $B_{i,j} = -\overline{C}_{j, 2q-i+1}$, $D_{ij} = -\overline{D}_{ji}$ を満たす行列全体である．$S = \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_q, a_q^{-1}, \ldots, a_1^{-1}, 1, \ldots, 1) \mid a_i \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\}$ とするとこれが極大分裂トーラスとなる．座標 a_i を用いて $e_i \in X^*(S)$，$e'_i \in X_*(S)$ を定めてお

く．このとき，E_{ij} を行列単位とすると，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{e_i-e_j} &= \{zE_{ij} - \overline{z}E_{2q-j+1,2q-i+1} \mid z \in \mathbb{C}\} && (1 \le i \ne j \le q),\\
\mathfrak{g}_{e_i+e_j} &= \{zE_{i,2q-j+1} - \overline{z}E_{j,2q-i+1} \mid z \in \mathbb{C}\} && (1 \le i \le j \le q),\\
\mathfrak{g}_{-e_i-e_j} &= \{zE_{2q-i+1,j} - \overline{z}E_{2q-j+1,i} \mid z \in \mathbb{C}\} && (1 \le i \le j \le q),\\
\mathfrak{g}_{e_i} &= \left\{\sum_{j=1}^{p-q}(z_jE_{i,j+2q} - \overline{z}_jE_{j+2q,2q-i+1}) \mid z_j \in \mathbb{C}\right\} && (1 \le i \le q),\\
\mathfrak{g}_{-e_i} &= \left\{\sum_{j=1}^{p-q}(z_jE_{2q-i+1,j+2q} - \overline{z}_jE_{j+2q,i}) \mid z_j \in \mathbb{C}\right\} && (1 \le i \le q)
\end{aligned}$$

であり[*20]，

$$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(S) \oplus \sum_{i=1}^{q}\mathbb{R}\sqrt{-1}(E_{ii} + E_{2q-i+1,2q-i+1}) \oplus \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D\end{pmatrix} \;\middle|\; D \in \mathfrak{u}(p-q)\right\}$$

となる[*21]．よって

$$\Sigma = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le q\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \le i \le q\} \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \le i \le q\}$$

である．

コルートを次のように定めよう（複合同順）．

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_1e_i + \varepsilon_2e_j)^\vee &= \varepsilon_1e'_i + \varepsilon_2e'_j && (1 \le i \ne j \le q, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}),\\
\pm e_i^\vee &= \pm 2e'_i && (1 \le i \le q),\\
(\pm 2e_i)^\vee &= \pm e'_i && (1 \le i \le q).
\end{aligned}$$

s_α を定義 5.17 のように定めると，これが Σ を保つことは容易にわかる．よって $\Sigma^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Sigma\}$ とおくと $(X^*(S), \Sigma, X_*(S), \Sigma^\vee)$ は (G, S) に付随するルートデータとなる．$\{s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X^*(S))$ の部分群 W とすると，例 5.44 と同様にして $W \simeq S_q \ltimes \{\pm 1\}^q$ となる．

このように，$\mathrm{U}(p, q)$ に対応するルート系は B 型と C 型をあわせたような形をしている．このルート系を $(BC)_q$ 型と呼ぶ．なお，$p = q$ の場合もルート分解は同様に記述されるが，この場合は $\mathfrak{g}_{\pm e_i} = 0$ となり，ルート系は C_q 型となる．

[*20] 最初の三つは A の部分に，残りは B, C の部分に含まれる．

[*21] D の部分は全てここに含まれる．

定理 5.64（[Kna02, Proposition 2.92]）（被約とは限らない）既約なルート系は，定理 5.54 に述べたものと $(BC)_n$ 型で尽くされる．

練習 5.65 $Z_G(S)$ および $N_G(S)$ を実際に計算し，$N_G(S)/Z_G(S) \simeq S_q \ltimes \{\pm 1\}^q$ となることを確認せよ．また e_i を正規直交基底とする $X^*(S)_{\mathbb{R}}$ 上の内積 $(\cdot,\cdot)$ が $N_G(S)/Z_G(S)$ 不変であることを示し，その内積により $X^*(S)_{\mathbb{R}} \simeq X_*(S)_{\mathbb{R}}$ と同一視すると $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ となることを示せ．

5.11 放物型部分群

G を $\mathbb{R}$ 上の連結な簡約群，$S \subset G$ を極大分裂トーラス，$(X^*(S), \Sigma, X_*(S), \Sigma^\vee)$ をそのルート系，$\Sigma^+ \subset \Sigma$ を正ルート系とし，対応する単純ルート全体を $\Pi \subset \Sigma^+$ とする．$I \subset \Pi$ を部分集合とし

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \cup (-\mathbb{Z}_{\geq 0} I \cap \Sigma)} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$$

とおく．次の命題の前半は容易である．後半は [Kna02, Proposition 7.76]．

命題 5.66 $\mathfrak{p}_I$ は $\mathfrak{g}$ の部分代数である．また $\mathfrak{p}_\emptyset$ を含む $\mathfrak{g}$ の部分代数はある $I \subset \Pi$ に対して $\mathfrak{p}_I$ と書かれる．

定義 5.67 ある I に関して $\mathfrak{p}_I$ と共役な部分代数を**放物型部分代数**と呼ぶ．G の部分群 P の Lie 環が放物型部分代数となるとき，P を**放物型部分群**と呼ぶ．$\mathfrak{p}_\emptyset$ と共役な部分代数を**極小放物型部分代数**と呼び，対応する放物型部分群を**極小放物型部分群**と呼ぶ．

Lie 環が $\mathfrak{p}_I$ となる放物型部分群を P_I と書く．放物型部分群は連結なので [Bor91, Chapter IV, 11.16. Theorem]，このような P_I はただ一つしかない．

$G_{\mathbb{C}}$ に対しても（$\mathbb{C}$ 上のルート分解を用いて）同様に放物型部分群の概念が定義される．$\mathbb{R}$ 上定義されている部分群 P に対して，P が放物型部分群であることと $P_{\mathbb{C}}$ が放物型部分群であることは同値である．$G_{\mathbb{C}}$ の極小放物型部分群を **Borel 部分群**と呼ぶ．G の放物型部分群もその $\mathbb{C}$ 上への底変換が Borel 部分群となる時，**Borel 部分群**と呼ぶ．$\mathbb{R}$ 上の連結簡約群に対して Borel 部分群は存在するとは限らない．

定義 5.68 Borel 部分群を持つ実形を**準分裂実形**という．

例えば $\mathrm{SU}(n,n)$ はその複素化の準分裂実形である．分裂実形は準分裂実形である．なお，放物型部分群の概念は次のようにルート系を使わずとも定義できる [Spr09, 6.2]．

命題 5.69（[Spr09, 6.2.2 Lemma, 6.2.7 Theorem, 8.2.4 Proposition]） 部分群に対して，次が成り立つ．

(1) Borel 部分群であることと，極大連結可解部分群であることは同値．

(2) P が放物型部分群であることと，G/P が固有であることは同値．さらにこのとき G/P は射影的になる．

Borel 部分群 B に対して G/B を**旗多様体**，放物型部分群 P に対して G/P を**一般旗多様体**と呼ぶ．

例 5.70 $G = \mathrm{GL}_n$ とする．例 5.11 の記号を用いて，$\Pi = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n\}$ である．$I \subset \Pi$ に対して，$n_1, \dots, n_r$ を $\sum_i n_i = n$, $\Pi \setminus I = \{e_{n_1+\cdots+n_i} - e_{n_1+\cdots+n_i+1} \mid 1 \le i \le r-1\}$ と定めると，これにより I と n の分解は一対一に対応する．このとき，

$$\mathfrak{p}_I = \begin{pmatrix} \mathfrak{gl}_{n_1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \mathfrak{gl}_{n_r} \end{pmatrix}$$

となる．対応する放物型部分群は

$$P_I = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{n_1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \mathrm{GL}_{n_r} \end{pmatrix}$$

である．

$$\mathfrak{m}_I = \begin{pmatrix} \mathfrak{gl}_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{gl}_{n_r} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{n}_I = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと $\mathfrak{m}_I \subset \mathfrak{p}_I$ は部分代数，$\mathfrak{n}_I \subset \mathfrak{p}_I$ はイデアルで，$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{m}_I \oplus \mathfrak{n}_I$ となる．対応して P_I も

$$P_I = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{GL}_{n_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{n_1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1_{n_r} \end{pmatrix}$$

と分解する．一般旗多様体 GL_n / P_I は

$$\{0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = \mathbb{C}^n \mid \dim V_i = n_1 + \cdots + n_i\}$$

と同型である

放物型部分群 $\mathfrak{p}_I$ に対して，$\mathfrak{m}_I, \mathfrak{n}_I \subset \mathfrak{p}_I$ を

$$\mathfrak{m}_I = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}I \cap \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}_I = \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \mathbb{Z}I} \mathfrak{g}_\alpha$$

と定義すると $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{m}_I \oplus \mathfrak{n}_I$，$\mathfrak{m}_I \subset \mathfrak{p}_I$ は部分代数であり，$\mathfrak{n}_I \subset \mathfrak{p}_I$ はイデアルとなる．

定理 5.71（[Spr09, 8.4.2 Lemma, 8.4.3 Theorem]） M_I, N_I をそれぞれ $\mathfrak{m}_I, \mathfrak{n}_I$ に対応する部分群とすると，次が成り立つ．

(1) $M_I \subset P_I$ は部分群であり，$N_I \subset P_I$ は正規部分群．
(2) かけ算による写像 $M_I \times N_I \to P_I$ は同型．特に $P_I = M_I N_I$．
(3) M_I は簡約であり S を含む．そのルートデータは $(X^*(S), \Sigma \cap \mathbb{R}I, X_*(S), \Sigma^\vee \cap \mathbb{R}I^\vee)$ で与えられる．
(4) 指数写像は代数的な同型 $\mathfrak{n}_I \to N_I$ を与える．

$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{m}_I \oplus \mathfrak{n}_I$ 及び $P_I = M_I N_I$ を **Levi 分解**といい，$\mathfrak{m}_I, M_I$ を **Levi 部分**と呼ぶ．M_I は $M_I = Z_G(\bigcap_{\alpha \in I} \operatorname{Ker} \alpha)$ として得られる [Spr09, 8.4.1]．特に $M_\emptyset = Z_G(S)$．

注意 5.72 N_I は P_I の極大な冪単正規部分群として特徴付けられる．N_I の P_I の**冪単根基**と言う．

Σ^+ の代わりに $-\Sigma^+$ をとると，これも正ルート系である．単純ルート全体は $-\Pi$ となり，よって $I \subset \Pi$ に対して $-I$ に対応する放物型部分代数及び放物型部分群を定義することができる．これを $\overline{\mathfrak{p}}_I, \overline{P}_I$ と書き，$\mathfrak{m}_I, M_I$ に関して反対の位置にある放物型部分代数/部分群と呼ぶ．Levi 分解は $\overline{\mathfrak{p}}_I = \mathfrak{m}_I \oplus \overline{\mathfrak{n}}_I$，$\overline{P}_I = M_I \overline{N}_I$ の形で与えられる，つまり $\mathfrak{p}_I, P_I$ と Levi 部分を共有する．

次の分解定理は非常に強力である．

定理 5.73（Bruhat 分解，[Spr09, 8.3.8 Theorem]） W を (G, S) のルートデータの Weyl 群，$P_\emptyset \subset G$ を極小放物型部分群とし，$w \in W = N_G(S)/Z_G(S)$

に対してその代表元 $n_w \in N_G(S)$ を固定する．このとき $G = \coprod_{w \in W} P_\emptyset n_w P_\emptyset$ が成り立つ．（なお，$P_\emptyset n_w P_\emptyset$ は代表元 n_w の取り方によらない．）更に $N_\emptyset \cap n_w \overline{N}_\emptyset n_w^{-1} \xrightarrow{\sim} N_\emptyset/(N_\emptyset \cap n_w N_\emptyset n_w^{-1}) \xrightarrow{\sim} P_\emptyset n_w P_\emptyset/P_\emptyset$ である．特に $P_\emptyset n_w P_\emptyset/P_\emptyset \simeq \mathbb{A}^r$ $(r = \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \cap w(-\Sigma^+)} \dim \mathfrak{g}_\alpha)$.

例 5.74 $G = \mathrm{GL}_2$ とし B を上半三角行列全体のなす部分群とする．$\mathbb{P}^1$ に G を一次分数変換で作用させると ∞ の固定部分群が B となり，よって $G/B \simeq \mathbb{P}^1$．$W \simeq S_2$ であり，非自明な元を σ と書くと，$B/B \simeq \{\infty\} \simeq \mathbb{A}^0$，$B\sigma B/B \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \simeq \mathbb{A}^1$ である．

5.12 分類：$\mathbb{R}$ 上の場合

G を $\mathbb{R}$ 上の代数群として固定する．$\mathbb{C}$ 上 G と同型になる $\mathbb{R}$ 上の代数群を $G_\mathbb{C}$ の**実形**と言うのであった．実形がどのくらいあるか考えよう．つまり，次の集合を分類する：$\Gamma_\mathbb{R} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ とし

$$\{a_1 \colon \Gamma_\mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_\mathbb{C})) \mid a_1 \text{ は群準同形，}\quad a_1(\text{複素共役}) \text{ は反正則 }\}/\sim,$$

ただしある $\varphi \in \mathrm{Aut}(G_\mathbb{C})$ が存在して全ての $\gamma \in \Gamma_\mathbb{R}$ に対して $\varphi \circ a_1(\gamma) \circ \varphi^{-1} = a_2(\gamma)$ となる時に $a_1 \sim a_2$.

もともとの G に対応する $\Gamma_\mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_\mathbb{C}))$ を a で書き，別の実形 G_1 に対応する $\Gamma_\mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_\mathbb{C}))$ を a_1 で書くことにし，$c(\gamma) = a_1(\gamma)a(\gamma)^{-1}$ とおく．このとき $c(\gamma) \in \mathrm{Aut}(G_\mathbb{C})$ であり，a, a_1 が群準同型であることから $c(\gamma_1\gamma_2) = c(\gamma_1)a(\gamma_1)c(\gamma_2)a(\gamma_1)^{-1}$ となる．つまり $\gamma \in \Gamma_\mathbb{R}$ の $\mathrm{Aut}(G_\mathbb{C})$ への作用を $\varphi \mapsto a(\gamma) \circ \varphi \circ a(\gamma)^{-1}$ と定めると，$c \colon \Gamma_\mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G_\mathbb{C})$ は 1 コサイクル条件を満たす．ここで（1 次の）Galois コホモロジーを復習しておく．

定義 5.75（Galois コホモロジー） $\mathbb{R}$ 上定義された代数群 H に対して

$$H^1(\mathbb{R}, H) = \{c \colon \Gamma_\mathbb{R} \to H \mid c(\gamma_1\gamma_2) = c(\gamma_1)\gamma_1(c(\gamma_2))\}/\sim$$

と定める．ただし同値関係 $\sim$ は，ある $g \in H$ により $c_1(\gamma) = gc_2(\gamma)\gamma(g)^{-1}$ ならば $c_1 \sim c_2$ により定義する．

よって c は $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G_\mathbb{C}))$ の元を定める．次は簡単にチェックできる．

命題 5.76 この対応は $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}}))$ と $\{G_1 \mid \mathbb{C}$ 上 $G_1 \simeq G\}/\sim$ との一対一対応を与える．

さて，基底付きルートデータ $D = (X^*, \Delta, X_*, \Delta^\vee)$ を固定し，G として $\mathbb{C}$ 上ではこのルートデータを持つ簡約群を考えよう．次の分裂する完全列があるのだった．

$$1 \to \mathrm{Int}(G_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Aut}(D) \to 1$$

G として分裂実形をとる．するとこの完全系列は $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 同変となる．（ただし $\Gamma_{\mathbb{R}}$ は $\mathrm{Aut}(D)$ に自明に作用する．）さらに $X_\alpha \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha)_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}_\alpha$ からとると，命題 5.53 の分裂も $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 同変となる．これにより全射

$$H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}})) \to H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(D)) = \mathrm{Hom}(\Gamma_{\mathbb{R}}, \mathrm{Aut}(D))/\sim$$

を得る．ただし $\sim$ は $\mathrm{Aut}(D)$ の共役作用により定義される同値関係であり，最後の等号は定義から直ちに従う．

$\tau \in \mathrm{Hom}(\Gamma_{\mathbb{R}}, \mathrm{Aut}(D))$ を固定し，このファイバーを調べよう．すなわちコサイクル $c \colon \Gamma_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Int}(G_{\mathbb{C}}) \rtimes \mathrm{Aut}(D)$ であって，$c(\gamma)$ の第二成分が $\tau(\gamma)$ となるものを考える．c の第一成分を $c_0 \colon \Gamma_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Int}(G_{\mathbb{C}})$ とおく．c のコサイクル条件から，$c_0(\gamma_1\gamma_2) = c_0(\gamma_1)\tau(\gamma_1)a(\gamma_1)c_0(\gamma_2)(\tau(\gamma_1)a(\gamma_1))^{-1}$ が成り立つ．つまり，G への $\Gamma_{\mathbb{R}}$ の新しい作用 a_τ を $a_\tau(\gamma) = \tau(\gamma) \circ a(\gamma)$ と定め，対応する実形を G_τ とすると，c_0 は $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Int}(G_\tau))$ の元を定める．

定理 5.77 この対応は τ のファイバーと $\mathrm{Im}(H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Int}(G_\tau)) \to H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G_\tau)))$ との一対一対応を与える．

注意 5.78 G_τ は分裂 $\mathrm{Aut}(D) \to \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}})$ から導かれる $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(D)) \to H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}}))$ による τ の像の定める実形である．

命題 5.79 $G_{\mathbb{C}}$ の実形 G_0 に対して以下は同値．

(1) ある $\tau \in \mathrm{Hom}(\Gamma_{\mathbb{R}}, \mathrm{Aut}(D))$ に対して $G_0 \simeq G_\tau$.
(2) 極大分裂トーラス S に対して，$M_\emptyset = Z_G(S)$ は可換．
(3) G_0 は準分裂実形．

練習 5.80 次を示せ．

(1) G_τ は $\mathbb{R}$ 上定義される Borel 部分群を持つことを示せ．

(2) [Spr09, 15.5.2] における D_0 が $M_{\emptyset,\mathbb{C}}$ の単純ルートの集合であることを示し，[Spr09, 16.2.2 Proposition] から定義 5.79 における (2) と (3) が同値であることを示せ．

定義 5.81 $G_{\mathbb{C}}$ の実形 G_1, G_2 が以下の同値な条件を満たすときに G_1 は G_2 の**内部形式**であると言う．

(1) 対応する $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G))$ の元は $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(D))$ において同じ元を定める．
(2) G_2 の定める $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G_1))$ の元は $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Int}(G_1))$ からの像に入る．

系 5.82 次の一対一対応がある．

(1) $\{G_{\mathbb{C}}$ の準分裂実形 $\}/\sim\ \simeq \mathrm{Hom}(\Gamma_{\mathbb{R}}, \mathrm{Aut}(D))/\sim$.
(2) $G_{\mathbb{C}}$ の準分裂実形 G_0 に対して，$\{G_0$ の内部形式 $\}/\sim\ \simeq \mathrm{Im}(H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Int}(G_0)) \to H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G_0)))$.

Galois コホモロジーの計算に関しては次が知られている．

定理 5.83（[Bor88, Bor14, AT18]） G を $\mathbb{R}$ 上の簡約群，$T_0 \subset G$ を $T_0(\mathbb{R})$ がコンパクトとなるトーラスで極大なもの[*22]，T をその中心化群とする．

(1) T は極大トーラスである．
(2) $W = N_G(T)/T$ を Weyl 群とし，W_0 を $\{s_\alpha \mid \overline{\alpha} = -\alpha\}$[*23]で生成される部分群とする．このとき，$T \hookrightarrow G$ は同型 $H^1(\mathbb{R}, T)/W_0 \simeq H^1(\mathbb{R}, G)$ を導く．
(3) $\lambda \in X_*(T_{\mathbb{C}})$ に対して，$\overline{\lambda}(z) = \overline{\lambda(\overline{z})}$ により $\overline{\lambda} \in X_*(T_{\mathbb{C}})$ を定めて，$\Gamma_{\mathbb{R}}$ 加群と見なす．$X_*(T_{\mathbb{C}})_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ を $X_*(T_{\mathbb{C}})$ の $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 余不変部分，$(X_*(T_{\mathbb{C}})_{\Gamma_{\mathbb{R}}})_{\mathrm{tors}}$ をその捻れ部分とする．$\lambda \in X_*(T_{\mathbb{C}})$ に対して，複素共役を $\lambda(-1)$ に対応させることにより得られる $c_\lambda \in H^1(\mathbb{R}, T)$ を考えると，$\lambda \mapsto c_\lambda$ は同型 $(X_*(T_{\mathbb{C}})_{\Gamma_{\mathbb{R}}})_{\mathrm{tors}} \simeq H^1(\mathbb{R}, T)$ を与える．

また，$\mathrm{Int}(G_{\mathbb{C}}) = G_{\mathbb{C}}/Z(G_{\mathbb{C}})$ の Galois コホモロジーに関しては [AT18, 10.3] に表がある．

例 5.84 $G = \mathrm{SL}_n$ $(n \geq 3)$ とする．$\mathrm{Int}(G_{\mathbb{C}}) = \mathrm{PGL}_n, X^* = \mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$ であ

[*22] Cartan 対合の固定部分から極大トーラスをとればよい．
[*23] このようなルートを虚ルートと言う．

る．$\mathrm{Aut}(D)$ の元は Dynkin 図形の自己同型を引き起こす．今の場合 Dynkin 図形は A_{n-1} 型であり，その非自明な自己同型は左右を反転させるもののみである．従って $\mathrm{Aut}(D) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり，$\mathrm{Hom}(\Gamma_{\mathbb{R}}, \mathrm{Aut}(D))/\sim$ は二点からなる．$c \in \Gamma_{\mathbb{R}}$ を複素共役，$\tau \in \mathrm{Hom}(\Gamma_{\mathbb{R}}, \mathrm{Aut}(D))/\sim$ とする．1 コサイクル $a_\tau \colon \Gamma_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}})$ を τ のリフトとする．対応する準分裂実形は $\{g \in \mathrm{SL}_n \mid a_\tau(c)(c(g)) = g\}$ で与えられる．

まず $\tau(c) = 1$ とする．このとき $a_\tau(c) = 1$ であり，$G_\tau = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$，$\mathrm{Int}(G_\tau) = \mathrm{PGL}_n$．[AT18, 10.3] から $\#H^1(\mathbb{R}, \mathrm{PGL}_n)$ は n が奇数ならば 1，偶数ならば 2．対応する実形は SL_n 及び $\mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})$（$n$ が偶数の時のみ）である．

$\tau(c)$ が非自明な $\mathrm{Aut}(D)$ の元であるとする．具体的には，$X^* = \mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$ に対して $\tau(c) \colon (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (-a_n, \ldots, -a_1)$ により与えられる．$w_0 = (\delta_{i,n-j+1})_{ij}$ とおくと $a_\tau(c)(g) = w_0\, {}^t g^{-1} w_0^{-1}$ であり，$G_\tau = \mathrm{SU}([n/2], n-[n/2])$，$\mathrm{Int}(G_\tau) = \mathrm{PSU}([n/2], n-[n/2])$．[AT18, 10.3] から $\#H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Int}(G_\tau)) = [n/2]+1$ であり，対応する実形は $\mathrm{SU}(p,q)$ $(0 \le p \le [n/2])$ となる．

注意 5.85 [AT18, 10.3] の表から $\mathbb{R}$ 上の単純代数群の分類が従う．他にも，Dynkin 図形に付加データをつけた佐武図形 [Hel01, Chapter X, Exercise F.8] や，Vogan 図形 [Kna02, Chapter VI, §8] による分類がある．

5.13 岩澤分解

G を $\mathbb{R}$ 上の連結簡約群，θ を Cartan 対合，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を θ に関する固有分解，$K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ とおく．このとき，G の極大分裂トーラス S を $\mathrm{Lie}(S) \subset \mathfrak{p}$ となるようにとることができる[*24]．S をそのようにとり，(G, S) に関するルート系 Φ を考え，正ルート系 $\Phi^+ \subset \Phi$ を固定し，対応する極小放物型部分群 $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ とその Levi 分解 $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ を考えよう[*25]．$\mathrm{Lie}(S) \subset \mathfrak{p}$ から $\mathfrak{g}_0$ は θ で安定であり，よって $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k})$ となる．このとき $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(S)$ となる．

$X \in \mathrm{Lie}(S)$ に対して $\theta(X) = -X$ であることから，$\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ である．よって $\mathfrak{g}$ の元を $X + Y + \sum_{\alpha \in \Phi^+} Z_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in \Phi^+} Z_\alpha^-$ $(X \in \mathrm{Lie}(S),\ Y \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k},\ Z_\alpha^\pm \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha})$

[*24] $\mathfrak{p}$ の極大な可換部分空間 $\mathfrak{s}$ をとり，対応する部分群を S とすればよい．
[*25] $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0$，$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ である．

と書いておくと，これは

$$X+\left(Y+\sum_{\alpha\in\Phi^+}(\theta(Z_\alpha^-)+Z_\alpha^-)\right)+\left(\sum_{\alpha\in\Phi^+}(Z_\alpha^+-\theta(Z_\alpha^-))\right)\in\mathrm{Lie}(S)+\mathfrak{k}+\mathfrak{n}$$

と書き直すことができる．この議論から次がわかる．

定理 5.86（Lie 環の岩澤分解） $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(S)\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{n}$.

対応する群の命題は次の通りである．$\mathfrak{n}$ に対応する部分群を N とする．

定理 5.87（Lie 群の岩澤分解，[Sat80，Chapter I，(5.9)]，[Kna02，Proposition 7.31]） 積から定まる写像 $K(\mathbb{R})\times S(\mathbb{R})^+\times N(\mathbb{R})\to G(\mathbb{R})$ は微分同相.

練習 5.88 $G=\mathrm{GL}_n$ とする．

(1) $K(\mathbb{R})\times S(\mathbb{R})^+\times N(\mathbb{R})\to G(\mathbb{R})$ の逆写像を Gram-Schmidt の直交化を使って作れ.

(2) $g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とし，$k\in K(\mathbb{R})$，$a=\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)\in S(\mathbb{R})^+$，$n\in N(\mathbb{R})$ を $g=kan$ ととる．$1\le k\le n$ に対して，$(a_1\cdots a_k)^2$ は ${}^tgg$ の左上の $k\times k$ 行列の行列式と一致することを示せ.

最後にもう一つ分解定理を述べておく.

定理 5.89（Cartan 分解，KAK 分解，[Kna02，Theorem 7.39]） $A_+=\{g\in S(\mathbb{R})^+\mid\alpha(g)\ge 1\ (\alpha\in\Phi^+)\}$ とおくと，$A_+\simeq K(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})/K(\mathbb{R})$.

5.14 Riemann 対称空間，Hermite 対称空間

引き続き G を簡約群，θ を Cartan 対合，$K=\{g\in G\mid\theta(g)=g\}$ とおき，$G(\mathbb{R})^+/K(\mathbb{R})^+=G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ を考えよう．定理 2.41 の前の議論から，$G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ は Riemann 対称空間の構造を持つ．$\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{k}$ の中心とする.

定理 5.90（[Kna02，Theorem 7.117，7.129]） G が半単純であるとする．$G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ が $G(\mathbb{R})^+$ 不変な複素構造を持つための必要十分条件は $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c})=\mathfrak{k}$.

注意 5.91 $G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ が $G(\mathbb{R})^+$ 不変な複素構造を持つことと Hermite 対称空間となる（計量を不変にする複素構造を持つ）ことは同値である．実際，もし

$X = G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ が Hermite 対称空間ならば，命題 2.43 から $G(\mathbb{R})^+$ の元（これは等長に作用）は正則に作用，つまり複素構造は $G(\mathbb{R})^+$ 不変となる．逆に $G(\mathbb{R})^+$ 不変な複素構造を持つとし，項 2.6 に現れた準同型写像 $u\colon \mathrm{U}(1) \to K$ を思い出そう．すると $eK^0(\mathbb{R}) \in G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ における複素構造は $u(\sqrt{-1}) \in K^0(\mathbb{R})$ で与えられる[*26]．計量は $G(\mathbb{R})^+$ 不変であるので，複素構造不変でもある．

$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{k}$ とし，X への複素構造の入れ方を詳しく見てみよう．C を $\mathfrak{c}$ に対応する部分群，$T \subset K^0$ を極大トーラスとする．このとき $C \subset T$ であり，よって $Z_G(T)^0 \subset Z_G(C)^0 \subset K^0$ となるので，$Z_G(T)^0 = Z_{K^0}(T)^0 = T$（定理 5.50）．従って T は G の極大トーラスでもある[*27]．$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ とおく．$(G_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}})$ に対するルートを Φ とする．分解 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ は K 不変なので，$\Phi = \Phi_{\mathfrak{k}} \amalg \Phi_{\mathfrak{p}}$ と分解する．ただし $\Phi_{\mathfrak{k}} = \{\alpha \in \Phi \mid (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\}$，$\Phi_{\mathfrak{p}} = \{\alpha \in \Phi \mid (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\}$．

$X^*(T)$ の上の全順序 $\geq$ であって練習 5.25 の条件を満たすものをとり，そこから正ルート系 Φ^+ を定め，$\Phi_{\mathfrak{k}}^+ = \Phi^+ \cap \Phi_{\mathfrak{k}}$，$\Phi_{\mathfrak{p}}^+ = \Phi^+ \cap \Phi_{\mathfrak{p}}$ とおく．更に $\geq$ を $\Phi_{\mathfrak{p}}^+$ の元は全て $\Phi_{\mathfrak{k}}^+$ の元より大きくなるように定めておく[*28]．このとき，次が確認できる（確認せよ）：$(\Phi_{\mathfrak{p}}^+ + \Phi_{\mathfrak{p}}^+) \cap \Phi \subset \Phi_{\mathfrak{p}}^+$，$(\Phi_{\mathfrak{k}} + \Phi_{\mathfrak{p}}^+) \cap \Phi \subset \Phi_{\mathfrak{p}}^+$．$\mathfrak{p}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{\mathfrak{p}}^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ とおく（複合同順）．このとき $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ であり，また条件から $[\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^+] \subset \mathfrak{p}^+$ であるが，一方 $[\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^+] \subset [\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ でもあるので，$[\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^+] = 0$ となる．同様に $[\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^-] = 0$．$P^+$，$P^-$ を $\mathfrak{p}^+$，$\mathfrak{p}^-$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の部分群とする．（これは $\mathbb{R}$ 上の代数群ではなく，また放物型部分群でもない．）更に Φ^+ から定まる Borel 部分群を $B \subset G_{\mathbb{C}}$ とする．

定理 5.92（Harish-Chandra 分解，[Kna02, Theorem 7.129]） 以上の設定のもとで次が成り立つ．

(1) $\exp\colon \mathfrak{p}^\pm \to P^\pm$（複合同順）は代数的な同型写像．
(2) $P^+ \times K_{\mathbb{C}}^0 \times P^- \to G_{\mathbb{C}}$ は開埋め込み．

---

*26 項 2.6 では Hermite 対称空間であるという状況から始まり u の存在を述べたが，この項で述べるように $G(\mathbb{R})^+$ 不変な複素構造を持つという仮定からも u の存在が従う．

*27 もしそうでなければ T を含む G の極大トーラス T_0 がとれるが，$T \subsetneq T_0$ で T_0 は可換であるから $Z_G(T)^0 \supset T_0 \supsetneq T$ となり矛盾．

*28 これは常に可能である．例えば $\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ に Weyl 群不変な内積を入れ，$\sqrt{-1}\mathfrak{t}^* = \sqrt{-1}\mathfrak{c}^* \oplus (\sqrt{-1}\mathfrak{c}^*)^\perp$ と直交分解し，この順番に適当に基底をとり $\mathbb{R}^n$ との同型を作る．このとき，$\geq$ を $\mathbb{R}^n$ 上での辞書式順序とすれば良い．$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{k}$ より $\Phi_{\mathfrak{k}} = \{\alpha \mid \alpha|_{\mathfrak{c}} = 0\}$ であることから条件を確認できる．

(3) ある（古典的位相に関する）有界開集合 $\Omega \subset P^+(\mathbb{C})$ が存在して $G(\mathbb{R})^+B(\mathbb{C}) = \Omega K^0(\mathbb{C})P^-(\mathbb{C}) \subset G(\mathbb{C})$.

(4) 合成 $G(\mathbb{R})^+ \hookrightarrow \Omega K^0(\mathbb{C})P^-(\mathbb{C}) \simeq \Omega \times K^0(\mathbb{C}) \times P^-(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \Omega$ は同型 $G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R}) \simeq \Omega$ を導き，特に $G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ は $G(\mathbb{R})^+$ 不変な複素構造を持つ.

$P = K^0_{\mathbb{C}}P^-$ とおくと，これは $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群である.

系 5.93（Borel 埋め込み） $G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R}) \hookrightarrow G(\mathbb{C})/P(\mathbb{C})$ は実多様体としての開埋め込み.

$G(\mathbb{C})/P(\mathbb{C})$ は複素多様体であるので，この埋め込みにより $G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ に複素多様体の構造を入れることができる. $\mathrm{U}(p,q)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ が Grassmann 多様体の開集合として実現されていたことの一般化である．なお，定理 5.92 に対応する Lie 環の命題は次の通り.

練習 5.94 $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha$ とおく. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}$ を示し，これから $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\operatorname{Lie}(P)$ を示せ.

項 2.6 に現れた準同型 $u\colon \mathrm{U}(1) \to K$ についてこの文脈から述べておこう. G は随伴型であるとする. $J\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を，$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 上 0，$\mathfrak{p}^{\pm}$ 上 $\pm\sqrt{-1}$ 倍（複合同順）と定める．定義から J は微分であり，実形 $\mathfrak{g}$ を保つことは簡単に確認できる. $\mathfrak{g}$ は半単純なので，ある $X_0 \in \mathfrak{g}$ が存在し $J = \operatorname{ad}(X_0)$ [Kna02, Proposition 1.121]. J は $\mathfrak{k}$ 上 0 なので $X_0 \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{k}$. よって $X_0 \in \mathfrak{k} \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = Z(\mathfrak{k}) = \mathfrak{c}$. $r \in \mathbb{R}$ に対して $u(e^{\sqrt{-1}r}) = \exp(rX_0)$ とおく. $\operatorname{Ad}(\exp(2\pi X_0)) = e^{2\pi \operatorname{ad}(X_0)} = e^{2\pi J}$ は恒等写像であり，G は随伴型なのでこれから $\exp(2\pi X_0) = 1$. よって u は well-defined であって，$u\colon \mathrm{U}(1) \to Z(K^0)$ を定める．定義から $u(z)$ は $\mathfrak{p}^+$ 上 z 倍，一方 Borel 埋め込みにより $T_{eK^0(\mathbb{R})}(G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\operatorname{Lie}(P) \simeq \mathfrak{p}^+$ であるので，$u(z)$ は $T_{eK^0(\mathbb{R})}(G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R}))$ 上 z 倍となる.

練習 5.95 K_1 を $K(\mathbb{R})^+$ を含む $K(\mathbb{R})$ の部分群，$G_1 = K_1G(\mathbb{R})^+$ とおく. G_1/K_1 に G_1 不変な複素構造が入るための必要十分条件を求めよ.

5.15 Hermite 対称領域の分類

$G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ が複素構造を持つような単純かつ随伴型な G を分類しよう．もし $G(\mathbb{R})^+$ がコンパクトならば $K^0(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R})^+$ となるので，以下 $G(\mathbb{R})^+$ は非コンパクトであると仮定する．$T \subset K^0$ を K^0 の極大トーラスとする．

$u\colon \mathrm{U}(1) \to Z(K^0)$ を前項のように定めると，$Z(K^0) \subset T$ であるので $u\colon \mathrm{U}(1) \to T$．よって u は $T_{\mathbb{C}}$ の余指標を与える．$u(z)$ は $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ 上 1 倍，$\mathfrak{p}^{\pm}$ 上 $z^{\pm 1}$ 倍（複合同順）であるので，$\alpha \in \Phi^+$ に対して

$$\alpha(u(z)) = \begin{cases} 1 & (\alpha \in \Phi_{\mathfrak{k}}^+), \\ z & (\alpha \in \Phi_{\mathfrak{p}}^+) \end{cases}$$

となる．特に $\langle \alpha, u \rangle$ は 0 または 1 である．ここで次の既約なルート系に関する定理を引用する．G が単純であるという仮定から，$G_{\mathbb{C}}$ が単純であるか，G は $\mathbb{C}$ 上の単純代数群の Weil 制限である．後者の場合は $G(\mathbb{R})^+/K^0(\mathbb{R})$ は複素構造を持たないので，結局 $G_{\mathbb{C}}$ は単純であり，従ってそのルート系は既約であることに注意する．

命題 5.96（[Bou02, Chapter VI, §1.8, Proposition 23]） 次を満たす $\alpha \in \Phi^+$ が一意的に存在する：全ての $\beta \in \Phi^+$ に対して $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Phi^+$．

このような α を**最高ルート**と呼ぶ．$\Delta \subset \Phi^+$ を単純ルート全体とし，$\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} n_\beta \beta$ と $n_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとろう．最高ルートの定義から，全ての $\beta \in \Delta$ に対して $n_\beta \neq 0$ である．$\alpha \in \Phi^+$ より $\langle \alpha, u \rangle \in \{0, 1\}$，また $\beta \in \Delta$ に対して $\langle \beta, u \rangle \in \{0, 1\}$ であるため，次が成り立つ．

> $\beta \in \Delta$ であって，$\langle \beta, u \rangle = 1$，$\langle \gamma, u \rangle = 0$ $(\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\})$，$n_\beta = 1$ となるものがただ一つ存在する．

よって $n_\beta = 1$ となるような β により G は分類される．

例 5.97 古典群における最高ルート α は次で与えられる．

(1) A_n 型：$\alpha = e_1 - e_{n+1} = (e_1 - e_2) + \cdots + (e_n - e_{n+1})$.
(2) B_n 型：$\alpha = e_1 + e_2 = (e_1 - e_2) + 2(e_2 - e_3) + \cdots + 2(e_{n-1} - e_n) + 2(e_n)$.
(3) C_n 型：$\alpha = 2e_1 = 2(e_1 - e_2) + \cdots + 2(e_{n-1} - e_n) + (2e_n)$.
(4) D_n 型：$\alpha = e_1 + e_2 = (e_1 - e_2) + 2(e_2 - e_3) + \cdots + 2(e_{n-2} - e_{n-1}) + (e_{n-1} -$

$e_n) + (e_{n-1} + e_n)$.

よって $n_\beta = 1$ となるような β の数は

(1) A_n 型：n 個（$\mathrm{U}(p, n+1-p)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(n+1-p))$ に対応.）
(2) B_n 型：1 個（$\mathrm{O}(2, 2n-1)/(\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2n-1))$ に対応.）
(3) C_n 型：1 個（$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(n)$ に対応.）
(4) D_n 型：3 個（$\mathrm{O}(2, 2n-2)/(\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2n-2))$，$\mathrm{SO}^*(2n)/\,\mathrm{U}(n)$ に対応.）

である.

注意 5.98 Hermite 対称空間の同型類に対応させるためには，ルートデータの外部自己同型により移りあう β を同一視する必要がある．具体的には

- A_n 型：$e_k - e_{k+1}$ と $e_{n-k+1} - e_{n-k+2}$ $(1 \le k \le n)$ が同一視される.
- D_n 型：（$n \ge 5$ の時）$e_{n-1} - e_n$ と $e_{n-1} + e_n$ が同一視される.

となり，Hermite 対称空間の同型類は，A_n 型が $[(n+1)/2]$ 個，D_n $(n \ge 5)$ 型が 2 個となる.

練習 5.99 D_4 型の場合に Hermite 対称空間の同型類の数を数えよ.

参考文献

[AT18] J. Adams and O. Taïbi, *Galois and Cartan cohomology of real groups*, Duke Math. J. **167** (2018), no. 6, 1057–1097.

[Bor88] M. V. Borovoĭ, *Galois cohomology of real reductive groups and real forms of simple Lie algebras*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **22** (1988), no. 2, 63–64.

[Bor91] A. Borel, *Linear algebraic groups*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Bor14] M. Borovoi, *Galois cohomology of reductive algebraic groups over the field of real numbers*, arXiv:1401.5913.

[Bou02] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2002, Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.

[Bou05] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 7–9*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2005, Translated from the 1975 and 1982 French originals by Andrew Pressley.

[Del79] P. Deligne, *Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 247–289.

[Gri68] P. A. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds. II. Local study of the period mapping*, Amer. J. Math. **90** (1968), 805–865.

[Hel01] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Corrected reprint of the 1978 original.

[KN96a] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996, Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[KN96b] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996, Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Kna02] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, second ed., Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[Kot82] R. E. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49** (1982), no. 4, 785–806.

[Mil05] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 265–378.

[Sat80] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains*, Kanô Memorial Lectures, vol. 4, Iwanami Shoten, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[SGA3 II] *Schémas en groupes. II: Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 152, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[SGA3 III] *Schémas en groupes. III: Structure des schémas en groupes réductifs*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 153, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Spr09] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, second ed., Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[Wol64] J. A. Wolf, *On the classification of hermitian symmetric spaces*, J. Math. Mech. **13** (1964), 489–495.