

# 2015 年度整数論サマースクール「志村多様体とその応用」 練習問題

2015 年 8 月 17 日 (月) ~ 21 日 (金)

## 概要

本サマースクールの講演内容に関連した練習問題です。講演の予習・復習や、Q & A の時間などにご活用ください。定義を確認するものから発展的なものまで、様々なレベルのものが含まれています。必要に応じて文献を調べたり、Q & A の時間に質問するとより理解が深まるでしょう。

また、講演のレジュメの中にも練習問題が付いているものがあります。あわせてご活用ください。

## 記号・用語について

本サマースクール全般で用いられる記号・用語のうちのいくつかを挙げます。講演によっては、これとは違う記号・用語が用いられることもあるかもしれません。

文献によっては、これとは違う記号・用語が用いられることもあります。他の文献を参照する際は注意してください。紛らわしい可能性があるものについては、記号  $\diamond$  を付けています。

- 非負整数の集合、整数の集合、有理数の集合、実数の集合、複素数の集合をそれぞれ  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  で表す。
- 2 乗して  $-1$  となる複素数を一つ選び固定する。それを  $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$  とおく。  $i := \sqrt{-1}$  とも書く。
- $n$  次単位行列を  $I_n$  で表す。  $a_1, \dots, a_n$  を対角に並べた対角行列を  $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  で表す。行列  $X$  の転置行列を  ${}^tX$  で表す。(注意: 文献によっては、転置行列を  $X^t$  または  $X^{\text{tr}}$  で表すこともある。  $\diamond$ )
- $F$  を体とする。  $F$  の分離閉包、代数閉包をそれぞれ  $F^{\text{sep}}$ ,  $F^{\text{alg}}$  で表す。  $F^{\text{alg}}$  を  $\bar{F}$  または  $F^{\text{ac}}$  とも書く。  $\Gamma_F := \text{Gal}(F^{\text{sep}}/F)$  を  $F$  の絶対 Galois 群という。(注意: 文献によっては、  $\Gamma_F$  を  $G_F$  と書くこともある。  $\diamond$ )
- $\mathbb{Q}$  の有限次拡大体を代数体という。代数体または有限体上の超越次数 1 の有限生成拡大体のことを、大域体という。単に“ $F$  を代数体とする”と言うときは、  $F$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込みは固定しない。
- $p$  進数体  $\mathbb{Q}_p$  または有限体  $\mathbb{F}_p$  係数の形式的巾級数体  $\mathbb{F}_p((t))$  ( $p$  は素数) の有限次拡大体と同型な位相体を非アルキメデスの局所体という。実数体  $\mathbb{R}$  または複素数体  $\mathbb{C}$  と同型な位相体をアルキメデスの局所体という。非アルキメデスの局所体とアルキメデスの局所体をあわせて局所体という。
- $F$  を非アルキメデスの局所体とする。  $F$  の整数環を  $\mathcal{O}_F$ 、  $\mathcal{O}_F$  の極大イデアルを  $m_F$  で表す。  $m_F$  の生成元を  $\varpi_F$  で表す。  $\varpi_F$  を“ $F$  の素元”ともいう。剰余体  $\mathcal{O}_F/m_F$  を“ $F$  の剰余体”ともいう。
- $p$  を素数、  $q = p^r$  を  $p$  の中とする。元の個数が  $q$  の有限体を  $\mathbb{F}_q$  で表す。  $\text{Frob}_q(x) := x^{1/q}$  ( $x \in \bar{\mathbb{F}}_q$ ) で定まる元  $\text{Frob}_q \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$  を幾何的 Frobenius 元といい、その逆元  $\text{Frob}_q^{-1}$  を算術的 Frobenius 元

という。(注意: 文献によっては,  $\text{Frob}_q^{-1}$  を単に “Frobenius 元” ともいうこともある。)  $F$  を非アルキメデスの局所体,  $F$  の剰余体を  $\mathbb{F}_q$  とおくと, 全射  $\Gamma_F \rightarrow \Gamma_{\mathbb{F}_q}$  が存在する. その核  $I_F$  を **惰性群** という. 元  $\sigma \in \Gamma_F$  であって, その  $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$  における像が  $\text{Frob}_q$  に一致するものを “幾何的 Frobenius 元の持ち上げ” という.

- $F$  を局所体,  $W_F$  を  $F$  の Weil 群とする. 局所類体論の相互写像 (**局所 Artin 写像**) を  $\text{Art}_F: F^\times \xrightarrow{\cong} W_F^{\text{ab}}$  で表す.  $F$  が非アルキメデスの局所体のとき,  $\text{Art}_F$  は  $F$  の素元を幾何的 Frobenius 元の持ち上げに写す写像である.(注意: 文献によっては,  $F$  の素元の像が “算術的 Frobenius 元の持ち上げ” となるように Artin 写像を定義することもある.  $\diamond$ )
- $F$  を大域体とする.  $F$  の **アデール環** を  $\mathbb{A}_F = \prod'_{v:F \text{ の素点}} F_v$  (制限直積) で表す. 乗法群  $\mathbb{A}_F^\times$  を  $F$  の **イデール群**, 剰余群  $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$  を  $F$  の **イデール類群** という.  $\mathbb{A}_{F,f} := \prod'_{v:F \text{ の有限素点}} F_v$  を  $F$  の **有限アデール環** という.  $F_\infty := \prod'_{v:F \text{ の無限素点}} F_v$  とおくと, 位相環として直積分解する:  $\mathbb{A}_F \cong \mathbb{A}_{F,f} \times F_\infty$ .  $F$  の素点の集合の部分集合  $S$  に対し,  $\mathbb{A}_{F,S} := \prod'_{v:F \text{ の素点}, v \in S} F_v$ ,  $\mathbb{A}_F^S := \prod'_{v:F \text{ の素点}, v \notin S} F_v$  とおく.  $F = \mathbb{Q}$  のときは添字の  $\mathbb{Q}$  を省略することもある.  $F$  に関する大域類体論の相互写像 (**大域 Artin 写像**) を  $\text{Art}_F: \pi_0(\mathbb{A}_F^\times/F^\times) \xrightarrow{\cong} \Gamma_F^{\text{ab}}$  で表す. ここで, 位相群  $G$  に対し,  $G$  の単位元を含む連結成分を  $G^0 \subset G$  とおく.  $G^0$  は  $G$  の閉正規部分群であり,  $\pi_0(G) := G/G^0$  とおく.(注意: 文献によっては,  $\mathbb{A}_F$  を  $F_{\mathbb{A}}$  と書くこともある.  $\mathbb{A}_{F,f}$  を  $\mathbb{A}_F^f$  または  $\mathbb{A}_F^\infty$  と書くこともある.  $\diamond$ )

## 1 局所体・大域体・アデール

**問題 1.1** (1) 局所体  $F$  に対する位相の定義を述べ, その定義において局所体は局所コンパクト位相体であることを示せ (定義を知らない人は定義を想像せよ).

(2) 包含写像  $F^\times \hookrightarrow F$  による誘導位相により,  $F^\times$  の位相を定める. この位相について,  $F^\times$  は局所コンパクト位相群であることを示せ.

**問題 1.2**  $F$  を非アルキメデスの局所体とする.

(1)  $F$  が標数 0 のとき,  $F^\times$  の任意の指数有限部分群は開部分群であることを示せ.

(2)  $F$  が標数  $p > 0$  のとき, (1) の主張は成り立つか.

**問題 1.3**  $F$  を非アルキメデスの局所体とし,  $\mathcal{O}_F$  を整数環,  $\varpi_F$  を素元とする.

$$\begin{aligned} K &:= \text{GL}_n(\mathcal{O}_F) \\ A &:= \{ \text{diag}(\varpi_F^{r_1}, \dots, \varpi_F^{r_n}) \mid r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z} \} \\ A_+ &:= \{ \text{diag}(\varpi_F^{r_1}, \dots, \varpi_F^{r_n}) \mid r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}, r_1 \geq \dots \geq r_n \} \\ N &:= \{ (x_{ij}) \in \text{GL}_n(F) \mid x_{ii} = 1, i > j \Rightarrow x_{ij} = 0 \} \end{aligned}$$

とおく.

(1)  $K$  は  $\text{GL}_n(F)$  の極大コンパクト部分群であることを示せ. また,  $\text{GL}_n(F)$  の任意の極大コンパクト部分群は  $K$  と共役であることを示せ.

(2) (Cartan 分解,  $KAK$  分解)  $K \backslash \text{GL}_n(F) / K$  の各両側剰余類は,  $A_+$  の中に唯一つの代表元を持つことを示せ.

(3) (岩澤分解)

$$K \times A \times N \longrightarrow \mathrm{GL}_n(F), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

は同相写像であることを示せ.

**問題 1.4** (1)  $\mathbb{Z}$  の副有限完備化  $\widehat{\mathbb{Z}}$  の定義を説明せよ. 位相環の同型  $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}_p$  を示せ.

(2)  $F$  を代数体とする.  $F$  の整数環  $\mathcal{O}_F$  の副有限完備化  $\widehat{\mathcal{O}}_F$  はどのような位相環か.

**問題 1.5**  $F$  を大域体とする.

(1)  $F$  のアデール環  $\mathbb{A}_F$  の制限直積による定義 ( $\mathbb{A}_F := \prod'_{v:F\text{の素点}} F_v$ ) とはどのようなものか説明せよ.  $\mathbb{A}_F$  に定まる位相の定義を説明し,  $\mathbb{A}_F$  は局所コンパクト位相環になることを示せ.

(2)  $F$  のイデール群  $\mathbb{A}_F^\times$  に定まる位相の定義を説明し,  $\mathbb{A}_F^\times$  は局所コンパクト位相群になることを示せ.

(3)  $\mathbb{A}_F^\times$  の位相は, 包含写像  $\mathbb{A}_F^\times \hookrightarrow \mathbb{A}_F$ ,  $a \mapsto a$  による  $\mathbb{A}_F$  の位相からの誘導位相と異なることを示せ.

(4)  $\mathbb{A}_F^\times$  の位相は, 写像  $\mathbb{A}_F^\times \hookrightarrow \mathbb{A}_F^2$ ,  $a \mapsto (a, a^{-1})$  による  $\mathbb{A}_F^2$  の位相からの誘導位相と一致することを示せ. ただし,  $\mathbb{A}_F^2 = \mathbb{A}_F \times \mathbb{A}_F$  には積位相を入れる. (これを  $\mathbb{A}_F^\times$  の位相の定義とする方法もある.)

**問題 1.6** (1)  $\mathbb{Q}$  のイデール群  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$  は,  $\mathbb{Q}^\times, \widehat{\mathbb{Z}}^\times, \mathbb{R}_{>0}$  を部分群に含む ( $\mathbb{Q}^\times$  は対角的に含む). 写像  $\mathbb{Q}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ ,  $(x, y, z) \mapsto xyz$  は位相群の同型であることを示せ. 大域類体論の相互写像を用いて, 位相群の同型  $\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$  を示せ.

(2)  $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}^{\mathrm{ab}}$  はどのような位相群か. また,  $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}^{\mathrm{ab}}$  はどのような位相群か. できるだけ具体的に記述せよ. (ヒント:  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  の類数は 1 である.)

## 2 複素トーラス・ $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体

$V$  を  $n$  次元の  $\mathbb{C}$ -線形空間とする.  $V$  上の **Hermite 形式** とは,  $\mathbb{R}$  上の双線形写像  $H: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$  であって, 第一成分について  $\mathbb{C}$ -線形であり,  $H(v, w) = \overline{H(w, v)}$  ( $\forall v, w \in V$ ) をみたすものをいう.  $H$  の実部と虚部を, それぞれ  $S, E$  とおく. すなわち,  $H(v, w) = S(v, w) + \sqrt{-1}E(v, w)$  ( $S(v, w), E(v, w) \in \mathbb{R}$ ) である.

**問題 2.1** (1)  $S(v, w) = E(\sqrt{-1}v, w)$ ,  $S(\sqrt{-1}v, \sqrt{-1}w) = S(v, w)$ ,  $E(\sqrt{-1}v, \sqrt{-1}w) = E(v, w)$  を示せ. また,  $S: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}$  上の対称双線形形式であり,  $E: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}$  上の交代双線形形式であることを示せ.

(2) 逆に, 任意の交代双線形形式  $E: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  で  $E(\sqrt{-1}v, \sqrt{-1}w) = E(v, w)$  をみたすものに対し,  $E$  を虚部とする Hermite 形式  $H$  がただ一つ存在することを示せ.

(3) この対応において, Hermite 形式  $H$  が正定値 (すなわち,  $H(v, v) \in \mathbb{R}_{>0}$  ( $\forall v \in V \setminus \{0\}$ )) であることと,  $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto E(\sqrt{-1}v, w)$  が  $V$  上の正定値な対称双線形形式で

あることは同値なことを示せ.

**問題 2.2**  $V$  を  $n$  次元の  $\mathbb{R}$ -線形空間とする. 離散部分群  $\Lambda \subset V$  (すなわち,  $\Lambda$  に定まる相対位相が離散位相) であって余コンパクト (すなわち,  $V/\Lambda$  がコンパクト) なものを,  $V$  の  $\mathbb{Z}$ -格子という.

- (1)  $\mathbb{Z}$ -格子  $\Lambda \subset V$  に対し, 群の同型  $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$  と  $\mathbb{R}$ -線形空間の同型  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong V$  を示せ. また, 実 Lie 群の同型  $V/\Lambda \cong (\mathrm{U}(1))^n$  を示せ. (ここで,  $\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  は絶対値 1 の複素数のなす実 Lie 群である.)
- (2)  $\Lambda \subset V$  を部分群とする.  $\Lambda$  が群として  $\mathbb{Z}^n$  と同型で, 自然な包含写像  $\Lambda \hookrightarrow V$  が  $\mathbb{R}$ -線形空間の同型  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong V$  を導くとき,  $\Lambda$  は  $V$  の  $\mathbb{Z}$ -格子であることを示せ.

**問題 2.3**  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  を  $\mathbb{Z}$ -格子とし,  $E(\mathbb{C}) = \mathbb{C}/\Lambda$  を 1 次元複素トーラスとする.

- (1) 複素解析的写像  $f: E(\mathbb{C}) \rightarrow E(\mathbb{C})$  で  $f(0) = 0$  をみたすものは,  $E(\mathbb{C})$  の自己準同型になることを示せ. (ヒント:  $\mathbb{C} \rightarrow E(\mathbb{C})$  は普遍被覆である.  $f$  を普遍被覆間の写像  $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に持ち上げよ.  $\tilde{f}(z) = az$  をみたす  $a \in \mathbb{C}$  が存在することを示せ.)
- (2)  $E(\mathbb{C})$  の自己準同型全体  $\mathrm{End} E(\mathbb{C})$  は可換環であることを示せ. また,  $\mathrm{End} E(\mathbb{C})$  は整域であることを示せ.
- (3)  $\mathrm{End}^0 E(\mathbb{C}) := (\mathrm{End} E(\mathbb{C})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  とおく.  $\mathrm{End}^0 E(\mathbb{C}) = \mathbb{Q}$  であるか, または,  $\mathrm{End}^0 E(\mathbb{C})$  は虚二次体であることを示せ. (注意: 文献によっては,  $\mathrm{End}^0 E(\mathbb{C})$  を  $\mathrm{End}_0 E(\mathbb{C})$  または  $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} E(\mathbb{C})$  と書くこともある.)

**問題 2.4**  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  を虚二次体とする ( $d \geq 1$ ).  $E(\mathbb{C}), E'(\mathbb{C})$  を 1 次元複素トーラスで,  $\mathrm{End}^0 E(\mathbb{C}) \cong \mathrm{End}^0 E'(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  をみたすとする. このとき,  $E(\mathbb{C}), E'(\mathbb{C})$  は同種であること (すなわち, 0 でない準同型  $f: E(\mathbb{C}) \rightarrow E'(\mathbb{C})$  が存在すること) を示せ.

### 3 Siegel モジュラー多様体・虚数乗法論

$A$  を可換環,  $g \geq 1$  とする.

$$\mathrm{GSp}_{2g}(A) := \left\{ (X, \nu) \in \mathrm{GL}_{2g}(A) \times A^\times \mid {}^t X \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} X = \nu \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とおく.  $c: \mathrm{GSp}_{2g}(A) \rightarrow A^\times, (X, \nu) \mapsto \nu$  を相似指標という. 相似指標の核を  $\mathrm{Sp}_{2g}(A)$  とおく.

$$\mathfrak{H}_g^+ := \{ Z = X + \sqrt{-1}Y \in M_g(\mathbb{C}) \mid X, Y \in M_g(\mathbb{R}), {}^t Z = Z, Y \text{ は正定値} \}$$

$$\mathfrak{H}_g^- := \{ Z = X + \sqrt{-1}Y \in M_g(\mathbb{C}) \mid X, Y \in M_g(\mathbb{R}), {}^t Z = Z, Y \text{ は負定値} \}$$

$$\mathfrak{H}_g^\pm := \mathfrak{H}_g^+ \cup \mathfrak{H}_g^-$$

とおく.  $\mathfrak{H}_g^+$  を次数 (または種数) が  $g$  の Siegel 上半空間という. (注意: 文献によっては,  $\mathrm{GSp}_{2g}$  を  $\mathrm{CSp}_{2g}, \mathrm{GSp}_g, \mathrm{CSp}_g$  等と書くこともある.  $\mathrm{Sp}_{2g}$  を  $\mathrm{Sp}_g$  と書くこともある.  $\diamond$ )

**問題 3.1**  $\mathfrak{H}_1^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$  は複素上半平面である.

- (1)  $C^\infty$  多様体の同型  $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{H}_1^+$  を示せ. (ヒント:  $SL_2(\mathbb{R})$  の  $\mathfrak{H}_1^+$  への一次分数変換による作用を考えよ.)
- (2)  $C^\infty$  多様体の同型  $GL_2(\mathbb{R})/(\mathbb{R}^\times SO_2(\mathbb{R})) \cong \mathfrak{H}_1^\pm$  を示せ.

**問題 3.2** (1)  $Sp_{2g}(\mathbb{R})$  は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot Z := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

によって  $\mathfrak{H}_g^+$  に左から推移的に作用することを示せ. 同様にして,  $GSp_{2g}(\mathbb{R})$  は  $\mathfrak{H}_g^\pm$  に左から推移的に作用することを示せ.

- (2)  $\sqrt{-1}I_g$  の固定化群をそれぞれの作用に対して求めよ.

代数体  $F$  は, 任意の埋め込み  $\iota: F \hookrightarrow \mathbb{C}$  に対して  $\iota(F) \subset \mathbb{R}$  のとき, **総実** という. また, 任意の埋め込み  $\iota: F \hookrightarrow \mathbb{C}$  に対して  $\iota(F) \not\subset \mathbb{R}$  のとき, **総虚** という. 総実代数体の総虚 2 次拡大体を **CM 体** という. CM 体  $F$  に含まれる最大総実部分体を  $F^+$  で表す.  $F$  を CM 体,  $F$  から  $\mathbb{C}$  への体の埋め込みの集合を  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$  とおく.  $F$  の **CM 型** とは, 部分集合  $\Phi \subset \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$  であって,  $|\Phi| = [F : \mathbb{Q}]/2$  かつ  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C}) = \Phi \cup \bar{\Phi}$  をみたすものをいう ( $\bar{\Phi} := \{\bar{\sigma} \mid \sigma \in \Phi\}$ ,  $\bar{\sigma}(z) := \overline{\sigma(z)}$ ).  $\mathbb{C}$  の部分体

$$F^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \forall \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \text{ に対し, } \sigma\Phi = \Phi \Rightarrow \sigma(z) = z\}.$$

を組  $(F, \Phi)$  の**レフレックス体**という ( $\sigma\Phi := \{\sigma \circ \varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ ). (注意: 文献によっては, 総実代数体の総虚 2 次拡大体を“虚 CM 体”と呼び, 虚 CM 体の部分体を単に“CM 体”と呼ぶこともある. )

**問題 3.3**  $F, F' \subset \bar{\mathbb{Q}}$  を部分体とし,  $F, F'$  は  $\mathbb{Q}$  の有限次拡大体であるとする. 次の主張は正しいか. 正しい場合は証明し, 誤りの場合は反例を挙げよ.

- 主張 1:  $F$  が CM 体で,  $F' \subset F$  が部分体なら,  $F'$  は総実代数体または CM 体である.
- 主張 2:  $F, F'$  が CM 体なら, 合成体  $FF'$  も CM 体である.

**問題 3.4**  $F$  を CM 体とする.

- (1)  $F' \subsetneq F$  を部分体で,  $F'$  は CM 体とする.  $\Phi'$  を  $F'$  の CM 型とする. 全射  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(F', \mathbb{C})$  による  $\Phi'$  の逆像は,  $F$  の CM 型であることを示せ.
- (2)  $F$  の CM 型のうち, (1) のようにして得ることのできないものを**原始的**という.  $\zeta_{13} := \exp(2\pi\sqrt{-1}/13)$  とおく.  $\mathbb{Q}(\zeta_{13})$  は CM 体であることを示せ.  $\mathbb{Q}(\zeta_{13})$  の CM 型のうち原始的なもの個数を求めよ.

**問題 3.5** (1)  $F$  を CM 体,  $\Phi$  を  $F$  の CM 型とする. レフレックス体  $F^*$  は,  $\{\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(\alpha) \mid \alpha \in F\}$  で生成される  $\mathbb{C}$  の部分体であることを示せ.

- (2)  $F^*$  は CM 体であることを示せ.

**問題 3.6**  $\iota: \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$  を体の埋め込み,  $F$  を CM 体で  $[F : \mathbb{Q}] = 2n$  とする.  $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  を  $F$  の CM 型,  $F^*$  を組  $(F, \Phi)$  のレフレックス体とする.  $V := \bar{\mathbb{Q}}^n$  とおく. 作用  $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}) \times V \rightarrow V$

を,  $a \otimes b \in F \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$  と  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in V$  に対して  $(a \otimes b)v = ((\iota^{-1} \circ \varphi_i)(a) \cdot b \cdot v_i)_{1 \leq i \leq n}$  と定めることで,  $V$  を  $F \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ -加群とみなす.

- (1)  $F \otimes_{\mathbb{Q}} F^*$ -加群  $W$  であって,  $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})$ -加群の同型  $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}} F^*} W \cong V$  をみたすものが存在することを示せ (ここで,  $F^* \subset \iota(\overline{\mathbb{Q}})$  より,  $\mathbb{Q}$ -代数準同型  $\iota^{-1}: F^* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$  が定まる. 同型の左辺は,  $\text{id}_F \otimes \iota^{-1}: F \otimes_{\mathbb{Q}} F^* \rightarrow F \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$  による係数拡大を表す).
- (2)  $F' \subset \mathbb{C}$  を部分体で,  $[F':\mathbb{Q}] < \infty$  とする.  $F \otimes_{\mathbb{Q}} F'$ -加群  $W'$  であって,  $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})$ -加群の同型  $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}} F'} W' \cong V$  をみたすものが存在すると仮定する. このとき,  $F^* \subset F'$  を示せ.

## 4 実簡約代数群

### 問題 4.1

$$\begin{aligned} K &:= O_n(\mathbb{R}) \\ A &:= \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}\} \\ A_+ &:= \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_1 \geq \dots \geq a_n > 0\} \\ N &:= \{(x_{ij}) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid x_{ii} = 1, i > j \Rightarrow x_{ij} = 0\} \end{aligned}$$

とおく (問題 1.3 と比較せよ).

- (1)  $K$  は  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  の極大コンパクト部分群であることを示せ. また,  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  の任意の極大コンパクト部分群は  $K$  と共役であることを示せ.
- (2) (Cartan 分解,  $KAK$  分解)  $K \backslash \text{GL}_n(\mathbb{R}) / K$  の各両側剰余類は,  $A_+$  の中に唯一つの代表元を持つことを示せ.
- (3) (岩澤分解)

$$K \times A \times N \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

は同相写像であることを示せ.

- (4) これらの結果の  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  における類似はどのようなものだろうか. 各自考察せよ.

**問題 4.2**  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$  の極大コンパクト部分群  $K$  を一つ求めよ.  $C^\infty$  多様体の同型  $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/K \cong \mathfrak{H}_g^+$  を示せ. (ヒント: 問題 3.2 を参考にせよ.)

**問題 4.3**  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  の極大コンパクト部分群  $K$  を一つ求めよ. 商空間  $\text{SL}_2(\mathbb{C})/K$  は複素多様体の構造を持たないことを示せ. (ヒント:  $\text{SL}_2(\mathbb{C})/K$  の実多様体としての次元を求めよ.)

**問題 4.4** (1)  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  の Lie 環  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{so}_2(\mathbb{R})$  について, 適当な基底に関する Killing 形式を計算し, その符号を求めよ. ( $\mathbb{R}$  上の Lie 環  $\mathfrak{g}$  の元  $X \in \mathfrak{g}$  に対し,  $\text{ad}(X): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ,  $Y \mapsto [X, Y]$  とおく.  $\mathfrak{g}$  が有限次元のとき,  $B_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(X, Y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$  を **Killing 形式** という.)

- (2) Lie 群の自己同型  $\theta: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $\theta(g) := {}^t g^{-1}$  から誘導される Lie 環の自己同型を同じ記号  $\theta: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  で表す.  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(X, Y) \mapsto B_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})}(X, \theta Y)$  が対称双線形形式であることを示し, その符号を求めよ.
- (3) (1),(2) と同様の計算を  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$  に対して行え.

部分群  $\Gamma, \Gamma' \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  が通約的とは,  $[\Gamma: \Gamma \cap \Gamma'] < \infty$  かつ  $[\Gamma': \Gamma \cap \Gamma'] < \infty$  が成り立つことをいう.  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$  と通約的な  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$  の部分群を数論的部分群という.

**問題 4.5**  $\Gamma, \Gamma'$  が通約的のときに  $\Gamma \sim \Gamma'$  と書くことにする.  $\sim$  は同値関係を定めることを示せ.

**問題 4.6** 任意の数論的部分群  $\Gamma \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$  に対し, 指数有限な正規部分群  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$  であって, ねじれ元を含まない (すなわち, 単位元以外に位数有限の元を持たない) ものが存在することを示せ.

**問題 4.7** 次の主張は正しいか.

- 主張: 離散部分群  $\Gamma \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  が  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$  と通約的であるとする. このとき,  $\Gamma$  は数論的部分群である.

$F$  を体,  $\mathfrak{g}$  を  $F$  上の Lie 環,  $V$  を  $F$ -線形空間とする.  $\mathfrak{g}$  の  $V$  上の表現とは, Lie 環の準同型  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}_F(V)$  のことをいう ( $\mathrm{End}_F(V)$  には交換子  $[\varphi, \psi] := \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$  により Lie 環の構造を入れる).  $\mathfrak{g}$  の  $V$  上の表現を一つ固定し,  $C^i := \mathrm{Hom}_F(\wedge^i \mathfrak{g}, V)$  とおく.  $d^i: C^i \rightarrow C^{i+1}$  を,  $f \in C^i$  に対して次のように定める.

$$(d^i f)(x_0 \wedge \cdots \wedge x_i) := \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j x_j \cdot f(x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \cdots \wedge x_i) \\ + \sum_{0 \leq j < k \leq i} (-1)^{j+k} f([x_j, x_k] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \cdots \wedge \hat{x}_k \cdots \wedge x_i)$$

ここで, “ $x_j \cdot$ ” は  $\mathfrak{g}$  の表現による  $V$  への作用を表す.  $\hat{x}_j, \hat{x}_k$  はそれらの項を除くことを意味する.

**問題 4.8** (1)  $d^i \circ d^{i-1} = 0$  を示せ. 複体  $\{C^i, d^i\}$  のコホモロジー群  $H^i(\mathfrak{g}, V) := (\mathrm{Ker} d^i) / (\mathrm{Im} d^{i-1})$  を Lie 環コホモロジーという.

- (2)\*  $\mathfrak{g}$  の普遍包絡環  $U(\mathfrak{g})$  の定義を述べよ. (1) で定めた Lie 環コホモロジー  $H^i(\mathfrak{g}, V)$  を,  $U(\mathfrak{g})$ -加群の圏上の導来関手として解釈せよ.

## 5 志村多様体・モジュラー曲線

**問題 5.1**  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  の複素上半平面  $\mathfrak{H}_1^+$  への一次分数変換による作用を考える. 正整数  $N \geq 1$  に対し,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  の部分群  $\Gamma_0(N)$ ,  $\Gamma_1(N)$ ,  $\Gamma(N)$  を

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}.$$

で定める.

- (1) 商集合  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}_1^+$  と,  $\mathbb{C}$  上の楕円曲線の同型類の集合の間に自然な全単射を構成せよ. (ヒント:  $\tau \in \mathfrak{H}_1^+$  に対して楕円曲線  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$  を対応させよ.  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -軌道については問題 2.3 を参考にせよ.)
- (2) 商集合  $\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H}_1^+$  と, 集合

$$\{(E, G) \mid E: \mathbb{C} \text{ 上の楕円曲線, } G \subset E(\mathbb{C}): \text{位数 } N \text{ の巡回部分群}\}_{/\sim}$$

の間に自然な全単射を構成せよ. ここで, 楕円曲線の同型  $f: E \xrightarrow{\cong} E'$  であって  $f(G) = G'$  をみたすものが存在するとき,  $(E, G) \sim (E', G')$  と定める.

- (3) 商集合  $\Gamma_1(N) \backslash \mathfrak{H}_1^+$  と, 集合

$$\{(E, P) \mid E: \mathbb{C} \text{ 上の楕円曲線, } P \in E(\mathbb{C}): \text{位数 } N \text{ の点}\}_{/\sim}$$

の間に自然な全単射を構成せよ. ここで, 楕円曲線の同型  $f: E \xrightarrow{\cong} E'$  であって  $f(P) = P'$  をみたすものが存在するとき,  $(E, P) \sim (E', P')$  と定める.

- (4) 商集合  $\Gamma(N) \backslash \mathfrak{H}_1^+$  と, 集合

$$\left\{ (E, P, Q) \mid \begin{array}{l} E: \mathbb{C} \text{ 上の楕円曲線, } P, Q \in E(\mathbb{C}): \text{位数 } N \text{ の点の組で} \\ e_N(P, Q) = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N) \text{ をみたすもの} \end{array} \right\}_{/\sim}$$

の間に自然な全単射を構成せよ. ここで, 楕円曲線の同型  $f: E \xrightarrow{\cong} E'$  であって  $f(P) = P', f(Q) = Q'$  をみたすものが存在するとき,  $(E, P, Q) \sim (E', P', Q')$  と定める.  $e_N$  は Weil ペアリングを表す.

以下では  $\mathbb{Q}$  のアデール環を  $\mathbb{A} := \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ , 有限アデール環を  $\mathbb{A}_f := \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$  と書く.

**問題 5.2** (1)  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{SL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$  を示せ.

(2)  $g \geq 2$  に対し,  $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{A}_f) = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}})$  を示せ.

**問題 5.3**  $K_{\infty} := \mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  とおく.  $N \geq 1$  に対し,  $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$  の開コンパクト部分群  $K_0(N), K_1(N), K(N)$  を次で定める.

$$\begin{aligned} K_0(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \\ K_1(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, d \equiv 1 \pmod{N} \right\}, \\ K(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \mid b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\} \end{aligned}$$

- (1)  $C^{\infty}$  多様体の同型

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) / (K_{\infty} K_0(N)) &\cong \Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H}_1^+ \\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) / (K_{\infty} K_1(N)) &\cong \Gamma_1(N) \backslash \mathfrak{H}_1^+ \end{aligned}$$

を示せ. (ヒント: 問題 3.1 の結果を使え.)

(2)  $N \geq 3$  のとき,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) / (K_\infty K(N)) \not\cong \Gamma(N) \backslash \mathfrak{H}_1^+$$

である. その理由を述べよ. また, 同型を成り立たせるためには, 上式の左辺 (または右辺) をどのように修正すればよいか. (ヒント: 左辺は連結か?)

## 6 $K3$ 曲面・Tate 予想

体  $F$  上の滑らかな射影的代数多様体  $X$  が  $K3$  曲面とは,  $X$  が幾何的に連結な代数曲面で, 標準層  $\Omega_X^2$  が自明で,  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$  をみたすことをいう. (注意: 文献によっては,  $K3$  曲面の定義がこれとは異なる場合もある. 特異点を持つ  $K3$  曲面を考えることもある. また,  $\mathbb{C}$  上では, 代数的とは限らない Kähler 曲面も含めて考える場合もある. )

**問題 6.1**  $X$  を  $\mathbb{C}$  上の  $K3$  曲面とする. 実 4 次元  $C^\infty$  多様体  $X(\mathbb{C})$  の Euler-Poincaré 標数は 24 であることを示せ. (ヒント: 代数曲面の Riemann-Roch の定理を用いよ. 代数曲面の Riemann-Roch の定理を知らない人は, 定理の主張を調べておくことを勧める.)

**問題 6.2**  $F$  を体とする.

- (1)  $X \subset \mathbb{P}^3$  を射影空間  $\mathbb{P}^3$  内の滑らかな  $d$  次超曲面とする.  $X$  が  $K3$  曲面となるための必要十分条件は,  $d = 4$  であることを示せ.
- (2)  $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{Z}$ ,  $d_1, \dots, d_r \geq 2$  とする.  $H_i \subset \mathbb{P}^{2+r}$  を射影空間  $\mathbb{P}^{2+r}$  内の滑らかな  $d_i$  次超曲面とし,  $H_1 \cap \dots \cap H_r$  は完全交差と仮定する.  $H_1 \cap \dots \cap H_r$  が  $K3$  曲面となる  $(d_1, \dots, d_r)$  をすべて求めよ.

**問題 6.3** (1) 体  $F$  上の  $K3$  曲面は代数的に単連結であること, すなわち, 有限エタール被覆  $Y \rightarrow X$  であって,  $Y$  は幾何的に連結で,  $Y \neq X$  をみたすものは存在しないことを示せ.

(2)\*  $F = \mathbb{C}$  とし,  $X$  を  $\mathbb{C}$  上の  $K3$  曲面とする. このとき,  $X(\mathbb{C})$  は位相空間として単連結であることが知られている. この事実の証明を調べよ.

**問題 6.4**  $F$  を標数が 2 でない体とし,  $A$  を  $F$  上のアーベル曲面とする.  $A/\{\pm 1\}$  の最小特異点解消  $\mathrm{Km}(A)$  を **Kummer 曲面** という. Kummer 曲面  $\mathrm{Km}(A)$  が  $K3$  曲面であることを確かめよ. また,  $\mathrm{Km}(A)$  の (Betti および  $\ell$  進) コホモロジーを  $A$  のそれを用いて記述せよ. 余裕があれば,  $\mathrm{Km}(A)$  の久賀 - 佐武アーベル多様体と  $A$  の関係を考察せよ (久賀 - 佐武アーベル多様体の定義はレジュメおよび講演を参照).

以下では, 有限生成自由  $\mathbb{Z}$ -加群  $L$  と  $L$  上の整数値双線形形式  $\langle, \rangle$  の組  $(L, \langle, \rangle)$  のことを **格子** という.  $\langle x, y \rangle$  のことを,  $x \cdot y$  と書く.

**問題 6.5** (1)  $X$  を  $\mathbb{C}$  上の  $K3$  曲面とする.  $\mathbb{Z}$ -係数コホモロジー  $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  にカップ積で対

称双線形形式  $\langle, \rangle$  を定める. これが偶格子であること (すなわち, 任意の元  $a \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  に対して  $a \cdot a \in 2\mathbb{Z}$ ) を示せ. (ヒント: Stiefel-Whitney 類, Wu の公式について調べよ.)

- (2)  $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  は階数 22 の自由  $\mathbb{Z}$ -加群であり, 格子としては非退化かつユニモジュラー (行列表示の行列式が  $\pm 1$ ) であり, 符号  $(+3, -19)$  であり, 偶格子である. 格子の一般論を調べて, これらの事実から  $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  の格子としての同型類が決定できることを確かめよ.

**問題 6.6**  $(L, \langle, \rangle)$  を符号  $(+2, -n)$  の格子とする.  $L_{\mathbb{R}} := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ,  $L_{\mathbb{C}} := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  とおく. (何かしらの choice の下で) 以下の集合の間の自然な全単射を構成せよ.

- $\{W \subset L_{\mathbb{R}} \mid W \text{ は向き付けられた正定値 } 2 \text{ 次元部分空間}\}$
- $\{\omega \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid \omega \cdot \omega = 0, \omega \cdot \bar{\omega} > 0\}$
- $\text{SO}_{2,n}(\mathbb{R})/(\text{SO}_2(\mathbb{R}) \times \text{SO}_n(\mathbb{R}))$

**問題 6.7** (1)  $F$  を有限体,  $X$  を  $F$  上の滑らかな射影的代数多様体とする. 自然な写像  $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{F}})^{\Gamma_F}$  は同型であることを示せ. また,  $F$  が有限体でない場合はどうか?

- (2)  $F$  を有限体,  $X$  を  $F$  上の  $K3$  曲面とする. 任意の有限次拡大体  $F'/F$  に対し,  $X_{F'}$  の因子に関する Tate 予想が成り立つと仮定する. このとき,  $\text{Pic}(X_{\bar{F}})$  (これは階数有限の自由  $\mathbb{Z}$ -加群であることが知られている) の階数は偶数であることを示せ.

## 7 Galois 表現

**問題 7.1**  $F$  を体とする.  $F$  の絶対 Galois 群  $\Gamma_F$  には Krull 位相と呼ばれる位相が入る. Krull 位相の定義を復習せよ. また, Krull 位相について,  $\Gamma_F$  はコンパクト位相群となることを示せ.

**問題 7.2**  $\ell$  を素数とする.  $\ell$  進数体の代数閉包  $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$  と複素数体  $\mathbb{C}$  の間には, 体の同型  $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell} \cong \mathbb{C}$  が存在することを示せ. (ヒント: 埋め込み  $\iota_{\ell}: \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$ ,  $\iota_{\mathbb{C}}: \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$  を固定せよ.  $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$  の  $\iota_{\ell}(\bar{\mathbb{Q}})$  上の超越基と  $\mathbb{C}$  の  $\iota_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbb{Q}})$  上の超越基の間の全単射の存在を示せ.)

**問題 7.3**  $F$  を大域体とする.  $F$  の素点  $v$  に対し, 体の埋め込み  $\iota_v: \bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_v$  を固定する.  $\iota_v$  から誘導される絶対 Galois 群の間の写像  $\Gamma_{F_v} \rightarrow \Gamma_F$  は単射であることを示せ. (ヒント: Krasner の補題を用いよ.)

**問題 7.4**  $\ell$  を素数とする.

- (1)  $x, y \in \bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$  とする.  $x, y \in E$  となる中間体  $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}/E/\mathbb{Q}_{\ell}$  で  $[E:\mathbb{Q}_{\ell}] < \infty$  をみたすものを取り,  $d(x, y) := |N_{E/\mathbb{Q}_{\ell}}(x - y)|_{\ell}^{1/[E:\mathbb{Q}_{\ell}]}$  とおく ( $N_{E/\mathbb{Q}_{\ell}}: E \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}$  はノルム,  $|\cdot|_{\ell}$  は  $\mathbb{Q}_{\ell}$  の  $\ell$  進絶対値で  $|\ell|_{\ell} = \ell^{-1}$  をみたすもの). このとき,  $d(x, y)$  は中間体  $E$  の取り方によらず well-defined であり,  $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$  に距離空間の構造を定めることを示せ.
- (2) 距離  $d$  について,  $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$  は完備でないことを示せ.

(3) 距離  $d$  に関する  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$  の完備化を  $\mathbb{C}_\ell$  とおく.  $\mathbb{C}_\ell$  は代数閉体であることを示せ.

体  $F$  の  $n$  次元 **Artin 表現**とは, 連続準同型  $R: \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  のことをいう ( $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  には複素 Lie 群としての位相を入れる).  $n$  次元 Artin 表現  $R, R'$  が**同値**とは, 群  $\Gamma_F$  の表現として同値なこと (すなわち,  $R(\sigma) = gR'(\sigma)g^{-1}$  ( $\forall \sigma \in \Gamma_F$ ) をみたす  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  が存在すること) をいう.

**問題 7.5**  $R$  を体  $F$  の  $n$  次元 Artin 表現とする.  $R$  の像は有限群であることを示せ.

体  $F$  の  $n$  次元  $\ell$  進表現とは, 連続準同型  $R: \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$  のことをいう ( $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$  には  $\ell$  進位相 ( $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$  の距離 (問題 7.4 を参照) から定まる距離位相) を入れる). Artin 表現の場合と同様,  $n$  次元  $\ell$  進表現  $R, R'$  が同値とは, 群  $\Gamma_F$  の表現として同値なことと定める.

以下では, 体の同型  $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \cong \mathbb{C}$  を固定して (問題 7.2 を参照), Artin 表現を像が有限な  $\ell$  進表現とみなす.

$F$  を非アルキメデスの局所体,  $R$  を  $F$  の  $\ell$  進表現とする. 惰性群への制限  $R|_{I_F}$  が自明のとき  $R$  は**不分岐**であるといい, そうでないとき**分岐**するという.

$F$  を大域体,  $R$  を  $F$  の  $\ell$  進表現とする.  $v$  を  $F$  の有限素点とし, 体の埋め込み  $\iota_v: \overline{F} \hookrightarrow \overline{F}_v$  を固定する.  $R$  の  $\Gamma_{F_v}$  への制限を  $R_v := R|_{\Gamma_{F_v}}$  とおく.  $I_{F_v} \subset \Gamma_{F_v}$  を惰性群とする. 制限  $(R_v)|_{I_{F_v}}$  が自明のとき “ $R$  は  $v$  で**不分岐**である” といい, そうでないとき “ $R$  は  $v$  で**分岐**する” という.

**問題 7.6**  $F$  を体,  $R$  を  $F$  の  $\ell$  進表現とする. このとき, 中間体  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}/E/\mathbb{Q}_\ell$  であつて,  $[E:\mathbb{Q}_\ell] < \infty$  かつ  $R(\Gamma_F) \subset \mathrm{GL}_n(E)$  をみたすものが存在することを示せ.

**問題 7.7**  $F$  を大域体,  $R$  を  $F$  の  $\ell$  進表現とする.

- (1)  $R$  が Artin 表現のとき (すなわち,  $R$  の像が有限群のとき),  $R$  が分岐する有限素点は有限個であることを示せ.
- (2)  $F$  の  $\ell$  進表現  $R$  であつて, 無限個の有限素点で分岐するものが存在することを示せ.

## 8 簡約代数群の共役類・安定共役類

$F$  を標数 0 の体とし,  $G$  を  $F$  上の連結簡約代数群でその導来群  $G^{\mathrm{der}}$  が単連結なものとする. 半単純元  $g, g' \in G(F)$  が**安定共役**であるとは,  $g, g'$  が  $G(\overline{F})$  内で共役であることをいう ( $G^{\mathrm{der}}$  が単連結でない場合, および半単純でない元に対する安定共役の定義はもう少し複雑である).

**問題 8.1**  $G = \mathrm{GL}_n$  のときは,  $\mathrm{GL}_n(F)$ -共役と安定共役は同値であることを示せ.

**問題 8.2**  $g \in G(F)$  を半単純元とし,  $I = Z_G(g)$  を  $g$  の中心化群とする (なお,  $G^{\mathrm{der}}$  の単連結性は  $I$  の連結性を保証するための条件である).

- (1)  $g' \in G(F)$  を  $g$  と安定共役な半単純元とする.  $g' = hgh^{-1}$  となる  $h \in G(\overline{F})$  をとると,  $\sigma \in \Gamma_F$  に対して  $h^{-1}\sigma(h) \in I(\overline{F})$  であり,  $\sigma \mapsto h^{-1}\sigma(h)$  は 1-コサイクル  $\Gamma_F \rightarrow I(\overline{F})$  を与えることを示せ.
- (2) (1) の 1-コサイクルの定める Galois コホモロジー  $H^1(F, I) := H^1(\Gamma_F, I(\overline{F}))$  の元を

$\text{inv}(g, g')$  とおく.  $[g'] \mapsto \text{inv}(g, g')$  は, 次の集合の間の全単射を誘導することを示せ.

- $g$  と安定共役な半単純元の  $G(F)$ -共役類の集合
- $\text{Ker}(H^1(F, I) \rightarrow H^1(F, G))$

(3)\*  $F$  を標数 0 の局所体とする.  $g$  と安定共役な半単純元の  $G(F)$ -共役類の集合は有限集合であることを示せ.

**問題 8.3**  $0 < \theta < \pi$  とし,  $g = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  とおく.  $g$  と  ${}^t g$  は  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -共役であるか, 安定共役であるかをそれぞれ答えよ.

**問題 8.4**  $G = \text{GSp}_{2n}$  とし,  $c: \text{GSp}_{2n} \rightarrow \mathbb{G}_m, (X, \nu) \mapsto \nu$  を相似指標とする. 半単純元  $g, g' \in \text{GSp}_{2n}(F)$  が安定共役であることは,  $c(g) = c(g')$  かつ  $g, g'$  の  $\text{GL}_{2n}(F)$  における像が共役であることと同値であることを示せ.

## 9 CM アーベル多様体の周期

**問題 9.1** (1) ガンマ関数  $\Gamma(s)$  の複素平面上の有理型関数としての定義を述べよ. (ヒント:

$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt$  が  $\text{Re}(s) > 1$  で成り立つ. どのようにして右辺の積分を解析接続すればよいか.)

(2) 正整数  $n$  に対し,  $\Gamma(n) = (n-1)!$  を示せ. また,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  を示せ.

(3) (反射公式)  $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$  を示せ.

**問題 9.2** (1) 虚数乗法を持つ  $\mathbb{C}$  上の楕円曲線  $E$  に対して, 周期と呼ばれる  $\mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$  の元が定まる. 周期の定義を調べよ. (ヒント: 周期は (何らかの choice に依存する) 0 でない複素数として定義される. その値が代数的数倍を除いて一意に定まり, 剰余群  $\mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$  の元として well-defined であることを確認せよ.)

(2) 楕円曲線  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  の周期とレムニスケートの定数  $S := 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  は,  $\mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$  の元として一致することを確認せよ.

**問題 9.3** (1)  $S = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}$  を示せ.

(2) Chowla-Selberg 公式とはどういうものかを調べよ. (1) の等式から  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  で虚数乗法を持つ楕円曲線に対する Chowla-Selberg 公式が導かれることを確認せよ.