シリンダー上運動量空間での共形ブートストラップ

東京大学理学系研究科 物理学専攻　修士二年 西川奏

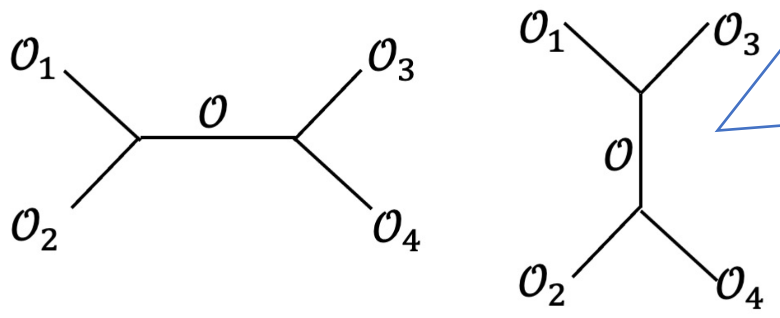
概要

・一方向にコンパクト化された領域($S^1\times\mathbb{R}$)の運動量空間での共形ブートストラップの定式化を行なった。
・無限体積での結果や各代数との整合性を確かめ、先行研究とのconsistency を明らかにした。

共形場理論(CFT)とは

私の研究では弦理論で非常に重要な役割を果たす、共形場理論を扱った。
共形場理論とは共形変換の下で不変であり、くりこみ変換の固定点上の理論である。
弦理論だけでなく、物性理論や宇宙論など、「スケール不変性」が鍵となる様々な分野で重要となる。

共形ブートストラップ



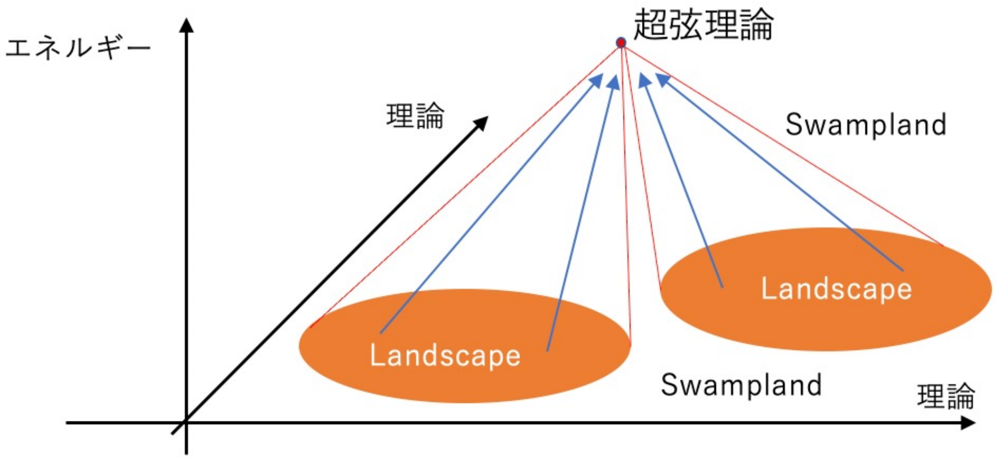
4点関数の計算方法。例えば、左の図は$\mathcal{O}_1$と$\mathcal{O}_2$の演算子積、及び$\mathcal{O}_3$ と $\mathcal{O}_4$ の演算子積を、演算子$\mathcal{O}$で展開することを表している。

4点関数を2つの異なる方法で計算したとき同じ結果が得られることを利用すると理論に対する様々な非自明な制約を得られる。
　(例) Ising模型の臨界指数への制限
ブートストラップ方程式は、解析的な解法と、コンピュータでの数値計算(反正定値計画問題)による解法が存在する。
例えば、スカラー4点関数に対してはブートストラップ方程式は次のようなものになる。

$$\sum_{\mathcal{O}} C^2_{\sigma\sigma\mathcal{O}} F^{\Delta_\sigma}_{\Delta_\mathcal{O},l_\mathcal{O}}(z,\bar{z}) = 0$$

$$F^{\Delta_\sigma}_{\Delta_\mathcal{O},l_\mathcal{O}}(z,\bar{z}) = \left((1-z)(1-\bar{z})\right)^{\Delta_\sigma} g^{0,0}_{\Delta_\mathcal{O},l_\mathcal{O}}(z,\bar{z}) - (z\bar{z})^{\Delta_\sigma} g^{0,0}_{\Delta_\mathcal{O},l_\mathcal{O}}(1-z,1-\bar{z})$$

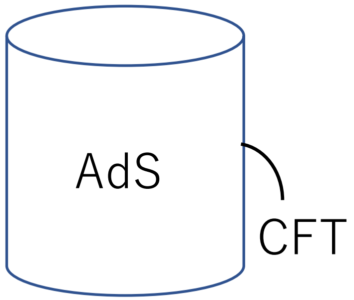
Swampland問題



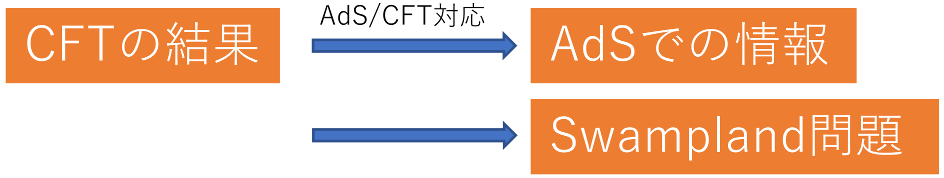
高エネルギー領域において超弦理論と整合性の取れる、低エネルギー有効理論を模索する問題。
スワンプランド問題を理解することで、超弦理論の予言能力が高くなると言われている。
ユニタリ性や因果律などの条件から、有効理論にどのような非自明な制限がかかるのかを調べる。

CFTにおける結果を、AdS/CFT対応で有効理論の言葉に翻訳することで、Swampland問題への糸口が得られる。
CFTで新しい解析手法を探索することが、Swampland問題への取り組みに直結している。

AdS/CFT対応



現在の弦理論周辺の研究で重要な役割を果たすものとして、AdS/CFT対応がある。これは、d+1次元のAdS空間のゲージ理論と、その境界に住むd次元のCFTとの対応を意味するもので、アノマリー等、物理量の対応関係が確かめられている。
この対応を用いてSwampland問題に取り組むのが私の研究の大まかな方向性である。



研究動機

Swampland問題への1つの切り口として運動量空間での共形ブートストラップが注目されている。そのために複数次元方向にコンパクト化された時空上の、運動量空間での共形場理論からフォーマリズムする必要があり、本研究の着想に至った。

研究内容

運動量空間でのCFTを考えるために、演算子のモードを取り扱う。

$$\tilde{\mathcal{O}}_n(r) \equiv \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{in\theta} \mathcal{O}(r,\theta) \quad \text{（演算子のモード）}$$

Large Volume Limit (R→∞)をとると、無限体積での結果と一致する

（カイラル2点関数） $\langle \tilde{\mathcal{O}}_{n_2}(r_2)\tilde{\mathcal{O}}_{n_1}(r_1)\rangle \propto \delta(n_1+n_2+2h) r_1^{-\Delta} r_2^{-\Delta} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\Delta+n_1} \frac{\Gamma(2\Delta+n_1)}{\Gamma(n_1+1)\Gamma(2\Delta)}$

（カイラル3点関数） $\langle \tilde{\mathcal{O}}_{n_3}(r_3)\tilde{\mathcal{O}}_{n_2}(r_2)\tilde{\mathcal{O}}_{n_1}(r_1)\rangle \propto \delta(n_1+n_2+n_3+h_1+h_2+h_3) r_1^{n_1} r_2^{n_2} r_3^{n_3} \frac{\lambda_{321}}{\Gamma(b_3)\Gamma(b_2)\Gamma(b_1)}$

$$\times \sum_{k=\mathrm{MAX}\{0,n_1-m_3\}}^{n_1} \frac{\Gamma(b_3+k)\Gamma(b_2+n_1-k)\Gamma(b_1+m_3-n_1+k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+n_1-k)\Gamma(1+m_3-n_1+k)}$$

→ 一般の2点、3点関数はカイラル部分とアンチカイラル部分を独立に計算することで得られる(factorization)

（カイラル4点関数） $\langle \tilde{\mathcal{O}}^{(4)}_{[J_4]}\tilde{\mathcal{O}}^{(3)}_{[J_3]}\tilde{\mathcal{O}}^{(2)}_{[J_2]}\tilde{\mathcal{O}}^{(1)}_{[J_1]}\rangle = \sum_{(5)} \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}^{(4)}_{[J_4]}\tilde{\mathcal{O}}^{(3)}_{[J_3]}\tilde{\mathcal{O}}^{(5)}_{[J_1+J_2]}\rangle\langle \tilde{\mathcal{O}}^{(5)}_{[-J_1-J_2]}\tilde{\mathcal{O}}^{(2)}_{[J_2]}\tilde{\mathcal{O}}^{(1)}_{[J_1]}\rangle}{\langle \tilde{\mathcal{O}}^{(5)}_{[-J_1-J_2]}\tilde{\mathcal{O}}^{(5)}_{[J_1+J_2]}\rangle}$ (Decomposition)

通常のCFTと同様に、4点関数は2点関数と3点関数を用いて表すことができる。
運動量空間で表現した場合、運動量保存則などから形がシンプルになるのが特徴。

研究内容

本研究ではブートストラップ方程式として、micro-causality 由来のものを考えた。

Micro-causality condition $\langle 0|\phi(\sigma_4)[\phi(\sigma_3),\phi(\sigma_2)]\phi(\sigma_1)|0\rangle = 0 \quad \text{for spacelike } \sigma_3-\sigma_2$

spacelikeなxにのみサポートを持つ$f(x)$を準備 （例）$f(x)=\delta(x^0)$

Improved Micro-causality condition $\langle 0|\phi(\sigma_4)[\phi(\sigma_3),\phi(\sigma_2)]\phi(\sigma_1)|0\rangle f(\sigma_3-\sigma_2) = 0$

Fourier変換を行うことで運動量空間でのブートストラップ方程式が得られる。

モードの交換子による代数関係

$$[B_{[J_B]},A_{[J_A]}]=\sum_C f_C^{BA}(J_B,J_A)C_{[J_A+J_B]}+(\text{Central Charge})$$

を用いて、理論に対する制約が得られる。

今後の展望

・高次元共形場理論への一般化

・様々なモデルに対する運動量空間でのブートストラップ方程式の解析、およびSwampland問題の開拓

<参考文献>
[1] M. Gillioz, X. Lu, M. A. Luty and G. Mikaberidze, [arXiv:1912.05550 [hep-th]]
[2] M. Gillioz, [arXiv:2109.15140 [hep-th]]
[3] M. Gillioz, [arXiv:1909.00878 [hep-th]]