一般化されたバウムスラッグ・ソリター群を使った局所コンパクト C^* 単純群の構成について

向原未帆

東京大学数理科学研究科数理科学専攻

C^* 環とは

$\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対し $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$ とする．$B(\mathcal{H})$ の作用素ノルム位相について閉じた $\mathbb{C}$ 部分代数で，共役について閉じているものを C^* 環という．

例

- $n \times n$ 行列のなす環 $M_n(\mathbb{C})$ は C^* 環である．
- 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対し X 上の無限遠点で消える複素数値連続関数のなす環 $C_0(X)$ は可換な C^* 環である．

C^* 環の最も基本的な構成法の一つに局所コンパクト群からできる群 C^* 環がある．群 C^* 環は古典的な研究対象であり，群環の研究を通して局所コンパクト群の性質を理解することは作用素環論の分野で重要な課題の一つである．ここでは特に群の C^* 単純性と呼ばれる性質に注目する．

定義 1 (被約群 C^* 環)

G を局所コンパクト群，$L^2(G)$ を左 Haar 測度 μ に関する L^2 空間とする．G 上のコンパクト台を持つ連続関数全体を $C_c(G)$ とし，任意の $f_1, f_2 \in C_c(G)$ と $g \in G$ に対し，積 $f_1 * f_2(g) := \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g) d\mu(h)$ と共役 $f_1^*(g) := \Delta(g)\overline{f_1(g^{-1})}$ を定めることで $*$ 環とする．ただし Δ は G のモジュラー関数である．$C_c(G)$ の $*$ 表現 $\lambda \colon C_c(G) \to B(L^2(G))$ を

$$\lambda(f)\xi(g) := \int_G f(h)\xi(h^{-1}g)d\mu(h) \quad \forall f \in C_c(G) \quad \forall \xi \in L^2(G) \quad \forall g \in G$$

で定める．この時 $\lambda(C_c(G))$ のノルム位相に関する閉包を $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(G)$ と書き，被約群 C^* 環と呼ぶ．

例

G を離散群 $\mathbb{Z}$ とすると，$\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{Z})$ はフーリエ変換により $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上の連続関数環 $C(\mathbb{T})$ と同型な C^* 環となる．

定義 2 (C^* 単純性)

局所コンパクト群 G に対し，その被約群 C^* 環 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{r}}(G)$ が非自明なノルム閉両側イデアルを持たないとき，G は C^* 単純性を持つと呼ばれる．

例 (Powers 1975)

2 つの元で生成される自由群 $\mathbb{F}_2$ は離散な C^* 単純群である．

離散群の C^* 単純性については以下の特徴づけが重要である．

定理 3 (Kalantar-Kennedy 2014)

離散群 Γ に対して以下は同値である．

(1) Γ は C^* 単純性を持つ．

(2) Γ のフルステンベルグ境界 $\partial_F\Gamma$ への作用が自由である．

定理 4 (Haagerup 2014, Kennedy 2014)

離散群 Γ に対して以下は同値である．

(1) Γ は C^* 単純性を持つ．

(2) Γ は *Powers averaging property* を持つ．

Powers averaging property については次ページで解説する．

離散群の場合に比べ, 一般の局所コンパクト群の C^* 単純性には未知な部分が多く, 上記のような特徴付けが可能かどうかは分かっていない. 一方で非離散的な C^* 単純群について以下のようなことが知られている.

Q. 5 (de la Harpe 2005)

離散でない C^* 単純群は存在するか?

→ A. 存在する. (鈴木 2016)
鈴木の研究で得られた非離散的な C^* 単純群の構成法を用い, Raum は以下を証明した.

定理 6 (Raum 2021)

n, m を整数とし, バウムスラッグ・ソリター群 $BS(n,m) := \langle a, t \mid ta^n t^{-1} = a^m \rangle$ とその剰余類 $BS(n,m)/\langle a \rangle$ への左掛け算から誘導される作用を考える. この時対称群 $Sym(BS(n,m)/\langle a \rangle)$ の位相に関する $BS(n,m)$ の閉包を $G(n,m)$ とすると以下が成立する.

(1) $G(n,m)$ が離散群となる. $\Leftrightarrow |n| = |m|$.

(2) $G(n,m)$ が C^* 単純性を持つ. $\Leftrightarrow |n|, |m| \neq 1$.

問題意識

- Raum の結果を一般化されたバウムスラッグ・ソリター群（以下 GBS 群とよぶ.）に拡張できるか?
- 局所コンパクト群に対して Powers averaging property の類似を考え, C^* 単純性を証明できるか?

修士論文内で我々は上記の問題意識のもと以下を行った.

- 離散群の Powers averaging property に類似する, C^* 単純性の十分条件と被約群 C^* 環上のモジュラーフローに関する KMS-weight が一意的となる十分条件の設定.
- $\{BS(n,m) \mid |n| \neq |m|, |n| \neq 1, |m| \neq 1\}$ を含むあるクラスの GBS 群の自然な位相に関する完備化が上の十分条件を満たすことの証明.

離散群 C^* 環と Powes averaging property について

- Γ を離散群とすると $C^*_r(\Gamma)$ は単位的な C^* 環で, 稠密な $*$ 部分環 $\mathbb{C}[\Gamma] = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\lambda_s \mid s \in \Gamma\}$ を持ち, 単位元の係数を取り出す写像 $\mathbb{C}[\Gamma] \ni \sum_{s\in\Gamma} \alpha_s \lambda_s \mapsto \alpha_e \in \mathbb{C}$ は $C^*_r(\Gamma)$ 上の tracial state $\tau\colon C^*_r(\Gamma) \to \mathbb{C}$ へ拡張される.
- 任意の $x \in C^*_r(\Gamma)$ に対し $\tau(x)1_{C^*_r(\Gamma)}$ が $\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \lambda_{s_i} x \lambda_{s_i}^* \mid m \geq 1, s_i \in \Gamma\}$ で近似できるとき, Γ は Powers averaging property を持つと呼ばれる.
- 離散群 Γ が Powers averaging property を持つとき, 自然に Γ の C^* 単純性と $C^*_r(\Gamma)$ 上の tracial state の一意性が従う. したがって定理 4 から離散群が C^* 単純であるとき被約群 C^* 環上の tracial state は一意的である.

局所コンパクト群の諸性質

- G を局所コンパクト群とし, Δ を G のモジュラー関数とする. この時, $\mathbb{R}$ の $C^*_r(G)$ への作用 σ^φ で任意の $f \in C_c(G)$, $g \in G$, $t \in \mathbb{R}$ に対し, $\sigma^\varphi_t(f)(g) = \Delta(g)^{it} f(g)$ となるものが存在する. この σ^φ をモジュラーフローと呼ぶ.
- $C^*_r(G)$ の代数的な $*$ 部分間 $C_c(G)$ に対し $C_c(G) \ni f \mapsto f(e) \in \mathbb{C}$ は $C^*_r(G)$ 上の σ^φ-KMS-weight φ に拡張される. これを Plancherel weight と呼ぶ. ただし, weight とは C^* 環上の非有界正汎関数であり (今回は特に proper と呼ばれる条件も仮定する.), weight ψ が $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sigma^\varphi_t(a) \in C^*_r(G)$ が正則に拡張されるような $a \in C^*_r(G)$ に対し, KMS 条件 $\psi(a^*a) = \psi(\sigma^\varphi_{\frac{i}{2}}(a)\sigma^\varphi_{\frac{i}{2}}(a)^*)$ を満たすとき, σ^φ-KMS-weight と呼ばれる.
- 群 G が離散であること, $C^*_r(G)$ が単位的であること, Plancherel weight が有界であることはすべて同値である.
- H を G の開部分群とすると $C^*_r(H)$ は自然に $C^*_r(G)$ の部分 C^* 環となり, これらの間には自然な条件付き期待値 $E_H\colon C^*_r(G) \to C^*_r(H)$ が存在する.

我々は離散群の場合に倣い，一般の局所コンパクト群に対して Powers averaging property に類似する C* 単純性の十分条件について考えた．特に局所コンパクト群の C* 単純性について以下が知られている．

定理 7 (Raum 2016)

任意の C^* 単純群は完全不連結である．

局所コンパクト群 G が完全不連結であるとき，コンパクト開部分群の減少ネット $\{K_\nu\}_\nu$ で $\cap_\nu K_\nu = \{e\}$ となるものが存在する．この時 μ を G の Haar 測度とし，$p_\nu := \frac{1}{\mu(K_\nu)} \int_{K_\nu} \lambda_g d\mu(g)$ とすると，p_ν は $\mathrm{C}^*_\mathrm{r}(G)$ の射影で，ネット $(p_\nu)_\nu$ は近似的単位元を成す．我々は条件付き期待値の族 $\{E_{K_\nu}\}_\nu$ に着目し以下の補題を得た．

補題 8

$\{K_\nu\}_\nu$ を G のコンパクト開部分群の減少ネット，$\{A_\nu\}_\nu$ を $\mathrm{C}^*_\mathrm{r}(G)$ の C^* 部分環の上昇ネットで

$$\cap_\nu K_\nu = \{e\}, \quad \overline{\cup_\nu A_\nu} = \mathrm{C}^*_\mathrm{r}(G), \quad p_\nu \in A_\nu$$

を満たすものとする．各 ν で，任意の $\epsilon > 0$ と自己共役な $x \in A_\nu$ に対し，

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_{g_i}(x - E_{K_\nu}(x))\lambda^*_{g_i}\| < \epsilon, \quad \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_{g_i} p_\nu \lambda^*_{g_i} - p_\nu\| < \epsilon$$

を満たす $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ が存在する時，G は C^* 単純群である．
また特に $\cup_\nu p_\nu C_c(G) p_\nu \subset \cup_\nu A_\nu$ で各 g_i がモジュラー関数のカーネルから取れるとき，$\mathrm{C}^*_\mathrm{r}(G)$ の σ^φ-*KMS-weight* は一意的である．

現時点で知られている非離散な C* 単純群の構成法には鈴木の論文 [S1], [S2] による二種類がある．これらの方法で構成される C* 単純群は共に補題 8 の仮定を満たす．
続いて群グラフとその基本群について説明し，主定理を述べる．

定義 9 (群グラフ)

群グラフ (G, Y) とは，連結グラフ $Y = (V(Y), E(Y))$，頂点群 $\{G_P\}_{P \in V(Y)}$，辺群 $\{G_y\}_{y \in E(Y)}$，と単射準同型の族 $\{\iota_y \colon G_y \to G_{t(y)}\}_{y \in E(Y)}$ の組で，各 $y \in E(Y)$ に対し $G_y = G_{\overline{y}}$ を満たすものである．ただし $t(y), o(y)$ は辺 y の端点で，$\overline{y}$ は $t(\overline{y}) = o(y)$, $o(\overline{y}) = t(y)$ となる辺とする．

基本群と普遍被覆

任意の連結グラフ Y に対しその部分グラフ T で極大な木が存在し，T と Y の頂点集合は一致する．
群グラフ (G, Y) と極大な木 $T \le Y$ に対し，基本群 $\pi_1(G, Y, T)$ と，普遍被覆と呼ばれる木 $\tilde{X}(G, Y, T)$ が存在し，$\tilde{X}(G, Y, T)$ は自然な $\pi_1(G, Y, T)$ の作用を持つ．

例

群グラフ (G, Y) ですべての辺群と頂点群が自明群な時，基本群 $\pi_1(G, Y, T)$ は位相空間 Y の基本群 $\pi_1(Y)$ と一致する．

例

Y を一つの頂点 $\{P\}$ と二つのループ $\{y, \overline{y}\}$ からなるグラフとし，$G_y \cong G_P \cong \mathbb{Z}$, $\iota_y \colon \mathbb{Z} \ni 1 \mapsto n \in \mathbb{Z}$, $\iota_{\overline{y}} \colon \mathbb{Z} \ni 1 \mapsto m \in \mathbb{Z}$ とする．
この時基本群 $\pi_1(G, Y, \{P\})$ は $BS(n, m) = \langle a, t \mid ta^n t^{-1} = a^m \rangle$ と同型で，普遍被覆 $\tilde{X}(G, Y, T)$ は次数 $|n| + |m|$ の正則グラフとなる．
また定理 6 の群 $G(n, m)$ は位相群として $\overline{\pi_1(G, Y, \{P\})} \le \mathbf{Aut}(\tilde{X}(G, Y, \{P\})$ と同型である．ただし $\mathbf{Aut}(\tilde{X}(G, Y, \{P\}))$ は普遍被覆 $\tilde{X}(G, Y, \{P\})$ 上の同型群で各点ごとの収束に関する位相により完全不連結群とみなす．

定義 10 (GBS 群)

群グラフ (G, Y) がすべての頂点 P とすべての辺 y について $G_P \cong G_y \cong \mathbb{Z}$ を満たすとき，その基本群 $\pi_1(G, Y, T)$ は GBS 群と呼ばれる．

修士論文の主定理では，いくつかの条件を満たす GBS 群についてその完備化を考えることで非離散な C* 単純群の具体例を構成した．Raum は定理 6 で整数 n, m が $|n|, |m| \neq 1$, $|n| \neq |m|$ を満たすとき，群 $G(n,m)$ はモジュラー関数 Δ のカーネルと $\mathbb{Z}$ の半直積に分解され，$\ker\Delta$ に [S1] の命題が適用できることを証明し，その C* 単純性を示した．以下の定理は $G(n,m)$ の C* 単純性の別証明を含んでいる．

定理 11

(G, Y) を群グラフ，$T \leq Y$ を極大な木として以下を仮定する．

(1) 任意の Y の頂点 P と辺 z に対し，$G_P \cong G_y \cong \mathbb{Z}$.

(2) 辺 $y \in E(Y) \setminus E(T)$ で

$$[\iota_{\overline{y}}(G_y) : \iota_{\overline{y}}(G_y) \cap \iota_y(G_y)] \neq [\iota_y(G_y) : \iota_{\overline{y}}(G_y) \cap \iota_y(G_y)]$$

を満たすものが存在する．ただし $\iota_{\overline{y}}(G_y) \cap \iota_y(G_y)$ は $\pi_1(G, Y, T)$ の部分群としての共通部分である．

(3) 任意の辺 z に対し，ι_z は全射でない．

この時 $\overline{\pi_1(G, Y, T)} \leq \mathbf{Aut}(\tilde{X}(G, Y, T))$ は非離散的な完全不連結群で，補題 8 の仮定を満たす．

Remark 12

- 定理 11 において，条件 (2) は $G(n,m)$ の場合の $|n| \neq |m|$ に対応し，条件 (3) は $G(n,m)$ の場合の $|n|, |m| \neq 1$ に対応する．
- 条件 (2) は $\overline{\pi_1(G, Y, T)}$ がユニモジュラーでないことと同値である．
- Δ を定理 11 の群 $\overline{\pi_1(G, Y, T)}$ のモジュラー関数とすると $\ker\Delta$ は $\overline{\pi_1(G, Y, T)}$ の開部分群であるが，これは [S1] の命題の仮定を満たす C* 単純群である．

例

I を添え字集合とし，以下のような群グラフ (G, Y) を考える．

- グラフ Y は一つの頂点 P とループの族 $\{y_i, \overline{y_i}\}_{i \in I}$ からなる．
- 辺群と頂点群はすべて $\mathbb{Z}$ と同型で，$n_i := [G_P : \iota_{y_i}(G_{y_i})]$, $m_i := [G_P : \iota_{\overline{y_i}}(G_{y_i})]$ とする．

この時，任意の $i \in I$ で $m_i, n_i \neq 1$ であり，$n_{i_0} \neq m_{i_0}$ となるような $i_0 \in I$ が存在すれば，群グラフ (G, Y) は定理 11 の仮定を満たす．

今後の課題について

- 今回は Raum の結果の一般化として GBS 群を考えたが，一般化の方法としては辺群や頂点群を変える方法もあり，そのような状況で非離散な興味深い C* 単純群の具体例を構成できるのかについて検討したい．特に局所コンパクト C* 単純群に対して Wesolek の elementary group と呼ばれる離散に近いクラスの群であるかどうかというのは気にかけられることが多い．今回の群は elementary group であったが，木に作用する局所コンパクト C* 単純群で elementary でないものが構成できれば良いと考えている．
- 群のフルステンベルグ境界は一般の局所コンパクト群に対して定義されるが，非離散的な群の C* 単純性について境界作用を使った特徴づけは行われていない．今回構成した群が自由な境界作用を持つのか，ネルティン群などの自由な境界作用を持つ事が知られている非離散群が C* 単純性を持つのかなど，具体例を中心に C* 単純性と境界作用の関係について考察を行いたい．
- 定理 4 にあるように離散群では Powers averaging property によって C* 単純性が特徴づけられる．非離散な場合にこの類似が成り立つのか，またもし成り立つとすると，補題 8 のような定式化が適当かどうかということについて，C* 単純性と KMS-weight の一意性との関係も含めて調査したい．

参考文献

[R1] S. Raum; *C*-simplicity of locally compact Powers groups.* J. Reine Angew. Math. **748** (2019), 173–205.

[R2] S. Raum; *Erratum to C*-simplicity of locally compact Powers groups (J. reine angew. Math. 748 (2019), 173–205).* J. Reine Angew. Math. **772** (2021), 223–225.

[S1] Y. Suzuki, Elementary constructions of non-discrete C*-simple groups, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 1369–1371.

[S2] Y. Suzuki, C*-simplicity has no local obstruction,Preprint, arXiv:2103.10404v1