# 混標数の幾何学的佐武対応とシュプリンガー対応

板東克之

東京大学数理科学研究科 数理科学専攻

## 要約


- 幾何学的佐武対応と呼ばれる関手と, シュプリンガー対応と呼ばれる関手がある.
- これらはいずれも, 幾何学を用いて定義される圏から表現論を用いて定義される圏への関手である.
- 幾何学的佐武対応については, 整数論との関連も知られている.
- この 2 つの対応の関係を, 以下の図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "\text{幾何学的佐武対応}"] \arrow[d, "\Psi", "\text{幾何学的関手}"'] & \mathrm{Rep}(\check{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d, "\text{表現論的関手}", "\Phi"'] \\
\mathrm{Perv}_{\bar{G}}(\mathcal{N}_{\bar{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "\text{シュプリンガー対応}"'] & \mathrm{Rep}(W_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{tikzcd}$$

幾何学的対象　　表現論的対象

が自然同型を除いて可換である, という形で述べる


## 幾何学的佐武対応

$F$ を完備離散付値体で, 剰余環 $k$ は代数閉体とする.
$\mathcal{O}$ をその付値環とする.
$G$ を $\mathcal{O}$ 上の連結簡約代数群スキームとする.
$k$ の標数を $p(\geq 0)$, $\ell$ を $p$ とは異なる素数とする.
以下の 2 つの圏が定義できる.

### 幾何学側の圏

$$\mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell):$$

$G$ に関するアファイングラスマン多様体と呼ばれる無限次元の "多様体" $\mathrm{Gr}_G$ の上の, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 係数の同変偏屈層と呼ばれる "層" のなすモノイダル圏.

### 表現論側の圏

$$\mathrm{Rep}(\check{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell):$$

$G$ のラングランズ双対群 $\check{G}$ の, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を係数とする有限次元代数的表現のなすモノイダル圏.

幾何学的佐武対応は, 上記 2 つの圏の間のモノイダル圏同値である:

**幾何学的佐武対応**

$$\mathscr{S}_G\colon \mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(\check{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

幾何学的佐武対応は，$F$ が等標数の場合は [MV07]，混標数の場合は [Zhu17] で示された．

## 幾何学的佐武対応と数論との関係

数論において，佐武同型と呼ばれる $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-代数の同型が存在する．

$$\mathcal{H} \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathbb{X}_*(T)]^{W_G}$$

ただし，

| | |
|---|---|
| $\mathcal{H}$ | :ヘッケ環と呼ばれる環 |
| $T \subset G$ | :トーラス |
| $\mathbb{X}_*(T)$ | :T の余指標格子 |
| $W_G$ | :G のワイル群 |

これは，数論における重要な問題である局所ラングランズ対応と呼ばれる問題の，不分岐と呼ばれる特別な場合を扱ったものであり，数論で重要な役割を果たす．
幾何学的佐武対応は，この佐武同型の圏化である．すなわち，幾何学的佐武対応の左辺 $\mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ のグロタンディーク環はヘッケ環であり，右辺 $\mathrm{Rep}(\check{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ のグロタンディーク環は $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathbb{X}_*(T)]^{W_G}$ となる．
この意味で，幾何学的佐武対応は，佐武同型を「幾何学的に実現」したものであると考えることができる．

## シュプリンガー対応

$\bar{G} = G \otimes_{\mathcal{O}} k$ とおく．以下の 2 つの圏が定義できる．

**幾何学側の圏**

$$\mathrm{Perv}_{\bar{G}}(\mathcal{N}_{\bar{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell):$$

$\bar{G}$ のリー代数の冪零錐上の同変偏屈層と呼ばれる対象のなす圏．

**表現論側の圏**

$$\mathrm{Rep}(W_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell):$$

$G$ のワイル群 $W_G$ の，$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を係数とする有限次元代数的表現のなす圏．

シュプリンガー対応は，上記 2 つの圏の間の関手である:

**シュプリンガー対応**

$$\mathbb{S}_G\colon \mathrm{Perv}_{\bar{G}}(\mathcal{N}_{\bar{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Rep}(W_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

## 表現論的関手

$$\Phi\colon \mathrm{Rep}(\check{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Rep}(W_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),\ \ V \mapsto V^{\check{T}} \otimes \varepsilon$$

を，ウェイト 0 の空間をとり，コクセター群 $W_G$ の符号指標 $\varepsilon\colon W_G \to \{\pm 1\} \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ で捻る，という関手として定義する．

# 主定理

有限次元閉部分スキーム $\mathrm{Gr}^{\mathrm{sm}} \subset \mathrm{Gr}_G$ を定義し，幾何学的佐武対応を $\mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{sm}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に制限したものを $\mathscr{S}_G^{\mathrm{sm}}$ とかく．
主定理は以下の通り:

**主定理**

$p \neq 2$, $v_F(p) \gg 1$ とする．
開部分スキーム $\mathcal{M}_G \overset{j}{\subset} \mathrm{Gr}_G$ と，射

$$\pi \colon \mathcal{M}_G \to (\mathcal{N}_{\check{G}})^{p^{-\infty}}$$

が存在して，ここから定まる幾何的な関手

$$\begin{aligned}\Psi := \pi_* \circ j^* \colon \mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}_{\check{G}}(\mathcal{N}_{\check{G}}^{p^{-\infty}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ = \mathrm{Perv}_{\check{G}}(\mathcal{N}_{\check{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\end{aligned}$$

について，

$$\Phi \circ \mathscr{S}_G^{\mathrm{sm}} \cong \mathbb{S}_G \circ \Psi$$

が成り立つ．すなわち，以下の図式は自然同型を除き可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "\mathscr{S}_G^{\mathrm{sm}}"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathrm{Rep}(\check{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathrm{Perv}_{\check{G}}(\mathcal{N}_{\check{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "\mathbb{S}_G"'] & \mathrm{Rep}(W_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{tikzcd}$$

# 主定理の証明について

[AHR15] は，主定理を，$F = \mathbb{C}((t))$ の場合に扱った．
混標数も含めた主定理の証明も，大まかな流れは [AHR15] と同様である．それは以下の通りである．
まず，次のように，「制限関手」を定義し，それらの可換性を確かめる．

**制限関手の可換性**

$L \subset G$ を Levi 部分群とする．主定理に現れる 4 つの圏について，$G$ の場合の圏から $L$ の場合の圏への，制限関手と呼ばれる 4 つの関手が定義できる．

$$\begin{aligned} R_L^G &\colon \mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}_{L^+L}(\mathrm{Gr}_L^{\mathrm{sm}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ R_{\check{L}}^{\check{G}} &\colon \mathrm{Rep}(\check{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Rep}(\check{L}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \\ \mathcal{R}_L^G &\colon \mathrm{Perv}_{\check{G}}(\mathcal{N}_{\check{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}_{\check{L}}(\mathcal{N}_{\check{L}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \\ R_{W_L}^{W_G} &\colon \mathrm{Rep}(W_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Rep}(W_L, \overline{\mathbb{Q}}_\ell). \end{aligned}$$

さらに，これらの 4 つの制限関手と主定理に現れる 4 つの関手は，「可換性」をみたす．

これを用いて，$G$ がトーラスまたは階数 1 の半単純群の場合に帰着する．トーラスまたは階数 1 の半単純群の場合は直接確かめる．

しかし，証明の一部で，混標数に特有の新しい方法を使う点が存在する．次項以降でそれらを説明する．

# 混標数と等標数の間の同型

開部分スキーム $\mathcal{M}_G \subset \mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm}}$ は，$F = k((t))$ の場合は $G(k[t^{-1}])$-軌道を用いて定義されるが，$F$ が混標数の場合はそのように定義することはできない．そこで，次のことを示した．
$F = k((t))$ のときの $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm}}$ を $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm},\flat}$ とかく．

**混標数と等標数の間の同型**

$v_F(p) \gg 1$ ならば，自然な同型

$$\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm}} \cong \mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm},\flat}$$

がある．

この結果により，混標数の $\mathcal{M}_G$ は等標数からの引き戻しによって定義できる．
この結果は，$\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{sm}}$ ではなく，任意の $\mathrm{Gr}_G$ の有限次元閉部分スキームについても成り立つ事実である．

# 制限関手のモノイダル構造

証明の過程で，佐武圏 $\mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の制限関手

$$\mathrm{Perv}_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}_{L^+L}(\mathrm{Gr}_L, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

のモノイダル構造を定義する必要がある．等標数では，フュージョン積と呼ばれるものを用いてこれを行っているが，今の設定でフュージョン積を考えることは，少なくとも直接は難しいため，等標数と混標数両方に通用する新たな方法で構成を行った．

# 今後の展望

- 混標数と等標数の間の部分的な同型について
  ここでの方針が，$\mathrm{Gr}_G$ ではない別の幾何学的対象についても，適用できないか．
- 制限関手のモノイダル構造について
  ここでの構成法は，幾何学的佐武対応とは無関係に行われている．よって，このモノイダル構造の構成法が，幾何学的佐武対応自体の構成に応用できないか．


[AHR15] P. N. Achar, A. Henderson and S. Riche, Geometric Satake, Springer correspondence, and small representations II, Represent. Theory 19 (2015), 94–166.

[MV07] I. Mirković and K. Vilonen, Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings, Ann. of Math. (2) 166 (2007), no. 1, 95–143.

[Zhu17] X. Zhu, Affine Grassmannians and the geometric Satake in mixed characteristic, Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 2, 403–492.