馴分岐超尖点的なtypeのHecke環について

小原和馬

東京大学大学院数理科学研究科

修士論文の要約

- 「馴分岐超尖点的な type の Hecke 環」という p-進群の表現論において重要な対象が，「深度 0 の type の Hecke 環」というよく調べられている対象と同型であることを示した．
- この結果は馴分岐超尖点的な type を定義した Yu によって予想されていたものである．

この結果の説明に必要な単語の説明を行う．最初に私の専門分野である p-進群の表現論とはどのような分野であるのかを説明する．

表現論とは

- 線型空間の上の対称性（群作用）に関する分野．
- 線型作用素の間の関係式を与えたとき，それらの作用がどのように実現されるかを調べる．
- 現代の整数論で重要な問題の一つである Langlands 対応は表現論の言葉で定式化されている．

どのような群の作用を考えるかによってその表現論は大きく異なるが，私の専門は p-進数と呼ばれる数に関係のある群 (p-進群) の表現論である．

p-進数とは

- $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$のように$p$-進法での展開が無限に続いていくような数．
- pで割れる回数が多いほど“小さい”数になる世界．
- 実数とは異なる性質を多数持つ（例：全不連結性）．

p-進数の持つ特別な性質によって，p-進数体上定義された群やその表現論も実数体上のそれらとは大きく異なる性質を持つ．特に次の二つの性質は私の研究に大きく関わるものである．

p-進群の特徴

- 開コンパクト部分群からなるフィルトレーションの存在．
- 超尖点表現の存在．

超尖点表現とは

- 放物型誘導という操作によって真の部分群の表現から得ることができない表現のこと．
- p-進群の表現論においては超尖点表現を理解することが大切．
- 多くの場合（すべて？）開コンパクト部分群の表現からコンパクト誘導という操作によって構成できる．

p-進群の表現論を理解するための一つのアプローチとしてtypeの理論というものがある．これはp-進群の表現をその表現がどのようなコンパクト部分群のどのような既約表現を含むかという観点で分類・理解しようという理論である．コンパクト部分群Kとその既約表現ρの組がtypeと呼ばれる特別な組である場合には，ρを含む既約表現を（実際にはより強くρ-isotypic partで生成されるような既約とは限らない表現）を(K, ρ)に付随するHecke環と呼ばれる対象を用いて理解することができる．

以上のことより次の二つの問題が重要である．

問題

- “十分に多くの” type を構成する．
- それらの type に付随する Hecke 環の構造を調べる．

一つ目の問題に対する答えとして Yu によって構成された馴分岐超尖点的な type と呼ばれる type が知られている [Yu01]．いくつかの条件のもとで全ての既約超尖点表現がこの種類の type を含むことが Fintzen によって証明されており，その意味で馴分岐超尖点的な type は “十分に多い” といえる．馴分岐超尖点的な type の構成の一つの特徴は，それ以前から知られていた深度 0 の type と呼ばれる type をインプットとして用いているということである．深度 0 の type やそれに付随する Hecke 環については様々な研究がなされており，特に Morris によって深度 0 の type に付随する Hecke 環の生成元と関係式による “良い” 記述が与えられている [Mor93]．

私が修士論文で得た結果は次の通りである [Oha21, Theorem 4.5]．

主定理

馴分岐超尖点的な type に付随する Hecke 環は，その構成でインプットとして用いられた深度 0 の type に付随する Hecke 環と同型である．

この定理の意義は馴分岐超尖点的な type に付随する Hecke 環の構造を調べるという問題を，深度 0 の type に付随する Hecke 環の構造を調べるという問題に帰着させたということである．先に述べた通り，深度 0 の type に付随する Hecke 環についてはよく知られているため，主定理と組み合わせることで馴分岐超尖点的な type に付随する Hecke 環についても深い理解を得ることができる．また，この同型はもともと Yu によって予想されていたものである．

今後の展望

- Kim-Yu type に付随する Hecke 環の構造の決定．
- 表現論・整数論の諸問題への応用．

それぞれについて説明する．先に述べたようにいくつかの条件のもとで全ての既約超尖点表現は馴分岐超尖点的な type を含む．一方で Yu による馴分岐超尖点的な type の構成は Kim と Yu によって一般化され，彼らによって構成された Kim-Yu type については，いくつかの条件のもとで全ての既約表現がこの種類の type を含むことが知られている．そのため Kim-Yu type の Hecke 環の構造を決定するということは自然に表れる重要な問題である．Kim-Yu type についても馴分岐超尖点的な type と同様に深度 0 の type がインプットとして用いられるため，Kim-Yu type に付随する Hecke 環についても深度 0 の type に付随する Hecke 環を用いた記述ができるのではないかと考えている．

さらに馴分岐超尖点的な type や Kim-Yu type に付随する Hecke 環の計算を表現論や整数論の諸問題に応用する研究も行っていきたいと考えている．具体的には放物型誘導の可約点の決定や，局所 Langlands 対応の明示的な実現，深度 0 の場合への帰着などを考えている．

- Lawrence Morris, *Tamely ramified intertwining algebras*, Invent. Math. **114** (1993), no. 1, 1–54. MR 1235019
- Kazuma Ohara, *Hecke algebras for tame supercuspidal types*, arXiv e-prints (2021), arXiv:2101.01873.
- Jiu-Kang Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 579–622. MR 1824988