単位直交束のルジャンドル接触ホモロジーに対するトポロジー的な解釈に向けて

岡本幸大
東京大学大学院 数理科学研究科

シンプレクティック多様体

はじめにシンプレクティック幾何学の研究対象であるシンプレクティック多様体とラグランジュ部分多様体について説明する．本稿を通して (部分) 多様体は全て滑らかなものとする．

$$\begin{cases} W\colon & 2n \text{ 次元多様体} \\ L\colon & W \text{ の } n \text{ 次元部分多様体} \end{cases}$$

とする．k 次微分形式を単に k-形式と呼ぶ．

定義 (シンプレクティック形式, ラグランジュ部分多様体)

- ω を W 上の 2-形式とする．ω がシンプレクティック形式であるとは, 非退化な閉形式 (i.e. $(\omega^n)_x \neq 0$ $(\forall x \in W)$ かつ $d\omega = 0$) であることと定義する．この組 (W, ω) を**シンプレクティック多様体**と呼ぶ．
- L が $\omega|_L = 0$ を満たすとき, (W, ω) の**ラグランジュ部分多様体**であるという．

本稿で扱う具体例は主に左の例, 及びそれに派生するものとする．

具体例

$W := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ とする．標準的な座標を $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ で表し, 1-形式 λ を

$$\lambda := \textstyle\sum_{i=1}^n p_i dq_i$$

で定義すると, $d\lambda = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ は W 上のシンプレクティック形式である．

また, $\mathbb{R}^n$ の部分多様体 K に対して,

$$L_K := \{(q, p) \in W \mid q \in K,\ p \in (T_q K)^\perp\}$$

とすると, L_K は $(W, d\lambda)$ のラグランジュ部分多様体である．($(\cdot)^\perp$ は直交補空間を表す.)

注意

- 一般の多様体 Q に対して, 余接束 T^*Q 上には標準的なシンプレクティック形式が存在し, $Q = \mathbb{R}^n$ の場合に上の例と一致する．
- シンプレクティック幾何は古典的な解析力学に起源をもつ．上の例では, W は位置 $(= (q_1, \ldots, q_n))$ と運動量 $(= (p_1, \ldots, p_n))$ の空間と考えられる．一般のシンプレクティック多様体上でもハミルトン力学系が展開される．

擬正則曲線

Gromovによって1980年代に導入された擬正則曲線について説明する.

(W, ω) をシンプレクティック多様体, L をそのラグランジュ部分多様体とする. $J\colon TW \to TW$ を W 上の概複素構造 (i.e. $J^2 = -\mathrm{id}_{TW}$) であって, $\omega(\cdot, J\cdot)$ が W 上のリーマン計量となるものとする.

定義 (擬正則曲線)

リーマン面 Σ から W への写像 $u\colon \Sigma \to W$ が非線形偏微分方程式 (コーシー・リーマン方程式)

$$(du)^{0,1} = 0$$

を満たすとき, u を**擬正則曲線**と呼ぶ.

Σ が境界 $\partial\Sigma$ を持つとき, 境界条件

$$u(\partial\Sigma) \subset L$$

を課すことが一般的である.

擬正則曲線を用いて定義される代数的な量を調べることで, シンプレクティック多様体の様々な性質が発見されてきた. 例えばFloerは (現在では) ハミルトニアンFloerホモロジーを呼ばれるホモロジー群を使い, ハミルトン力学系に関するArnold予想を部分的に解決した. (ただし, このとき使う偏微分方程式は上の定義に摂動を加えたものである.)

本稿で考える代数的な量を定義する ([1] 参照). K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな部分多様体とする. 始めに以下の (i)〜(iii) の準備をする:

(i) $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を単位球面として, $M := \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, $\Lambda := L_K \cap M$ と定義する. 開埋め込み

$$\varphi\colon \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\colon (r, (q, p)) \mapsto (q, e^r p)$$

により, $(\mathbb{R} \times M, \varphi^*(d\lambda))$ はシンプレクティック多様体, $\varphi^{-1}(L_K) = \mathbb{R} \times \Lambda$ はそのラグランジュ部分多様体となる.

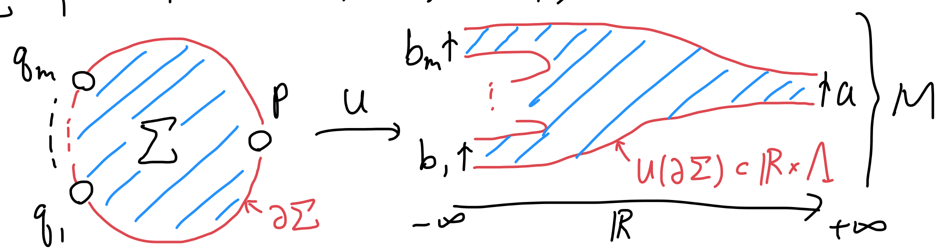
(ii) M 上のベクトル場 $X := \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ から

$$\begin{aligned}\mathcal{R} :=& \{a\colon [0,T] \to M \\ & \mid \dot{a}(t) = X_{a(t)} (\forall t \in [0,T]) \text{ かつ } a(0), a(T) \in \Lambda\}\end{aligned}$$

が定まる. $\mathcal{R}$ は有限集合であると仮定する.

(iii) $(\mathbb{R} \times M, \varphi^*(d\lambda))$ に対して, 適当な条件を満たす概複素構造を取り, 下図で表される擬正則曲線の同値類の集合を $\mathcal{M}(a, (b_1, \ldots, b_m))$ とする. これに向き付き多様体の構造が与えられ, 0 次元ならば向きを込めて数えた個数 $\#\mathcal{M}(a, (b_1, \ldots, b_m))$ が定義される.

$\Sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} - \{p, q_1, \cdots, q_m\}$, $\quad a, b_1, \cdots, b_m \in \mathcal{R}$



Λ を K の**単位直交束**と呼ぶことにする．以下のように $(A_*(K),\partial)$ と，そのホモロジーを定義する．

- $A_*(K)$: $\mathcal{R}$ によって自由生成される単位的次数付 $\mathbb{Z}$ 代数 (任意の $a\in\mathcal{R}$ の次数 $|a|$ はMaslov指数によって定義される)．
- $\partial\colon A_*\to A_{*-1}$: 下の式で定義される準同型:

$$\partial a=\sum_{\sum_{i=1}^{m}|b_i|=|a|-1}\#\mathcal{M}(a,(b_1,\dots,b_m))\ b_1\cdots b_m.$$

このとき $\partial^2=0$ が成り立ち，ホモロジー

$$H_*(A_*(K),\partial):=(\operatorname{Ker}\partial)/(\operatorname{Im}\partial)$$

が定義される．この同型類は K の C^∞ 級アイソトピー (=部分多様体の移動) で不変である．

$H_*(A_*(K),\partial)$ は (M,Λ) の**ルジャンドル接触ホモロジー**と呼ばれる (下の注意参照)．この $\mathbb{Z}$ 代数 (もしくはその変種) の定義は抽象的であり，擬正則曲線を直接数えて計算することは困難である．

注意 (接触多様体, ルジャンドル部分多様体)

接触多様体 (=(奇数次元多様体)+(接触構造)) と，そのルジャンドル部分多様体と呼ばれる幾何学的対象がある．(i) で定義した (M,Λ) について，$\lambda|_M$ は接触形式であり，M 上の接触構造を与える．このとき Λ は M のルジャンドル部分多様体である．

この (M,Λ) を含むクラスの接触多様体とルジャンドル部分多様体の組に対して，擬正則曲線を用いてルジャンドル接触ホモロジーが定義される．

しかし，一部の場合では擬正則曲線を使わない，トポロジー的な表示が与えられている．[1] は

$$\begin{cases} Q: & \text{向き付き Riemann 多様体} \\ K: & Q\,\text{のコンパクト向き付き部分多様体} \\ & \underline{\text{余次元}}(=\dim Q-\dim K)\underline{=2} \end{cases}$$

に対して，ある次数付 $\mathbb{Z}$ 加群 $C_*(\Sigma)$ と，準同型

$$\delta=\delta_Q+\delta_N\colon C_p(\Sigma)\to C_{p-1}(\Sigma)\ (\underline{p=0,1,2})$$

を構成した．これらの正確な定義は述べないが，$C_*(\Sigma)$ は端点を K に持つ Q 内の道 (path) の列からなる空間 Σ の特異鎖で生成される．δ はストリングトポロジーと関連し，道の連結といったトポロジー的な意味が明瞭な操作で定義される．

∂^{sing} を特異鎖の境界作用素とすると $(\partial^{\text{sing}}+\delta)^2=0$ が成り立ち，鎖複体 $(C_*(\Sigma),\partial^{\text{sing}}+\delta)$ を得る．また，[1] は $(A_*(K),\partial)$ の精密化も定義した．これを $(\widetilde{A}_*(K),\widetilde{\partial})$ と表したとき次の定理が成り立つ．

定理 ([1])

$Q=\mathbb{R}^3$ かつ K が結び目ならば，次数 0 における同型

$$H_0(\widetilde{A}_*(K),\widetilde{\partial})\cong H_0(C_*(\Sigma),\partial^{\text{sing}}+\delta)$$

が成り立つ．

この結果の高次数や結び目以外の場合への拡張を本研究の目標とした．

結果

修士論文の主結果を述べる．筆者は

$$\begin{cases} Q: & \text{向き付き Riemann 多様体} \\ K: & Q\text{ のコンパクト向き付き部分多様体} \\ & \underline{\text{余次元が偶数}} \\ l: & \text{正実数} \end{cases}$$

に対して，次数付き $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $C_*^{[0,l)}(Q,K)$ と

$$\widehat{\delta}\colon C_p^{[0,l)}(Q,K) \to C_{p-1}^{[0,l)}(Q,K)\ (\underline{\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}})$$

を構成した．この $C_*^{[0,l)}(Q,K)$ は端点を K に持つ Q 内の道の列 (ただし，長さの和が $l+$ (誤差) 未満) からなる空間の de Rham 鎖 (後述) で生成される．$\widehat{\delta}$ は δ と同じアイデアを基に定義される．

de Rham 鎖は [2] で定義されたものであり，特異鎖に比べ $\widehat{\delta}$ の定義に適していた．∂^{dR} を de Rham 鎖の境界作用素としたとき，次の命題の証明が修士論文の核心である．

主定理

$$(\partial^{\mathrm{dR}} + \widehat{\delta})^2 = 0$$

これにより鎖複体 $\left(C_*^{[0,l)}(Q,K), \partial^{\mathrm{dR}} + \widehat{\delta}\right)$ を得た．[1] と比較すると，定義の対象が拡張されている．一方，$\mathbb{R}$ ベクトル空間を使う代償で取り込める情報は減ってしまう．

$A_*(K)$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群 $A_*^{[0,l)}(K)$ を，単位元と

$$\{a_1 \cdots a_m \mid a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{R},\ \textstyle\sum_{i=1}^m \int (a_i)^*\lambda < l\}$$

が生成するものとする．

予想

全ての次数 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して同型

$$H_p(A_*^{[0,l)}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \partial) \cong H_p(C_*^{[0,l)}(\mathbb{R}^n, K), \partial^{\mathrm{dR}} + \widehat{\delta})$$

が成り立つ．

この予想は [1] の定理の証明を参考にして立てた．同型写像は，$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d\lambda)$ 内の擬正則曲線であって，境界条件が L_K と $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ で与えられるもののモジュライ空間を用いて構成されると期待する．修士論文ではこのモジュライ空間の次元計算も与えた．

今後の課題

$Q = \mathbb{R}^3$, K が結び目の場合，[1] のトポロジー的な表示から更に，組み合わせ的な計算方法が導かれる．低次元の場合に $H_p(C_*^{[0,l)}(\mathbb{R}^n, K), \partial^{\mathrm{dR}} + \widehat{\delta})$ のより具体的な計算方法が与えられるか．

参考文献

[1] Kai Cieliebak, Tobias Ekholm, Janko Latschev, and Lenhard Ng. Knot contact homology, string topology, and the cord algebra. *J. Éc. polytech. Math.*, 4:661780, 2017.

[2] Kei Irie. A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (15):46024674, 2018.