

# N = 4超対称Yang-Mills理論のS-dualityから導かれるある表現論的予想について

arXiv:2505.01253に基づく, 共同研究者:立川 裕二

小島 悠暉, Kavli IPMU

## 概要

N = 4 SYMのS-dualityから以下の主張を導出し、部分的に証明する。これはS-dualityの検証にもなっている。

### Conjecture

$\Gamma$ をSU(2)の有限部分群、Gを連結コンパクト単純リー群、 $G^\vee$ をそのLanglands dualとする。この時、

$$\#\{\Gamma\text{から}G\text{への準同型}\}/G = \#\{\Gamma\text{から}G^\vee\text{への準同型}\}/G^\vee$$

が成り立つ。ただし準同型はG( $G^\vee$ )の共役作用による違いを無視している。

## 背景

### S-dualityとは

N = 4 SYMが持つ強結合と弱結合を入れ替える双対性で、結合定数gの双対を $g^\vee = 1/g$ とし、ゲージ群GのLanglands dualを $G^\vee$ と書いた時、

$$\{N = 4 \text{ SYM with } (G, g)\} \cong \{N = 4 \text{ SYM with } (G^\vee, g^\vee)\}$$

のように2つの理論が等価であるという主張である。これは古典電磁気学における電場と磁場の入れ替えに対応しているので電磁双対性の一つである。

### N = 4 SYM on $\mathbb{R} \times S^3/\Gamma$

$\Gamma$ を $S^3 (= SU(2))$ の有限部分群とした時、N = 4 SYMを4次元時空 $\mathbb{R} \times S^3/\Gamma$ 上で考え、S-dualのペアが理論として等価になっているかを検証する。 $\Gamma$ は5種類に限ることが知られており、証明ではそれらの性質を利用している。

ADE	symbol	order	name	G	$G^\vee$
$A_{n-1}$	$\mathbb{Z}_n$	n	cyclic	SU(n)	SU(n)/ $\mathbb{Z}_n$
$D_{n+2}$	$\hat{D}_n$	4n	binary dihedral	SO(2n+1)	Sp(n)
$E_6$	$\hat{E}_6$	24	binary tetrahedral	Spin(2n+1)	Sp(n)/ $\mathbb{Z}_2$
$E_7$	$\hat{E}_7$	48	binary octahedral	Spin(2n)	SO(2n)/ $\mathbb{Z}_2$
$E_8$	$\hat{E}_8$	120	binary icosahedral	$E_8$	$E_8$

表: SU(2)の有限部分群 $\Gamma$ の分類

表: Langlands dual pairの例

## Indexの等式

S-dualな理論同士は等価なので、スペクトルも一致する。そこで、次のIndexという一種の分配関数も両側で一致するはずである。

$$Z = \text{Tr} (-1)^F e^{-\beta(Q, Q^\dagger)} t^{H-\frac{R}{2}}$$

ここで、Fはフェルミオン数演算子、 $Q := Q_+$ は超対称変換の生成子、Rは $U(1) \subseteq SU(4)_R$ の生成子。このIndexは $\{Q, Q^\dagger\} = 0$ を満たす状態のなす部分空間についての分配関数であり、結合定数に依らないという著しい性質から、自由場での計算に帰着する。

特に、tの最低次に寄与する状態を真空と呼ぶことにすると、

「S-dualの両側では真空の数が一致する」

ということが分かる。

## 真空と準同型の1対1対応

真空と空間部分の曲率Bが0という条件は1対1対応するので[2]、その接続が与えられた主束と、そのホロノミー準同型を考えることで、

$$\begin{aligned} & \{N = 4 \text{ SYM on } \mathbb{R} \times S^3/\Gamma \text{の真空}\} \\ & \stackrel{1:1}{\leftrightarrow} \{S^3/\Gamma \text{上の平坦主}G\text{束の同型類}\} \\ & \stackrel{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{準同型 } \rho: \pi_1(S^3/\Gamma) \rightarrow G \text{の共役類}\} \end{aligned}$$

という関係を得る。 $\pi_1(S^3/\Gamma) = \Gamma$ だから、結局前節の主張は、

「S-dualの両側では準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow G$ の共役類の数が一致する」

と言い換えられる。

## 準同型の数の一致

### 諸定義

$\Gamma$ からGへの準同型 $\rho_1, \rho_2$ に対し、

$$\exists g \in G \forall \gamma \in \Gamma \quad \rho_1(\gamma) = g\rho_2(\gamma)g^{-1}$$

が成り立つ時 $\rho_1 \sim \rho_2$ と定義し、

$$\begin{aligned} \psi(\Gamma, G) &:= \{\text{準同型 } \rho: \Gamma \rightarrow G\}/\sim \\ N(\Gamma, G) &:= \#\psi(\Gamma, G) \end{aligned}$$

とする。上の議論から、真空の数の一致は以下のように言い換えられる:

$$N(\Gamma, G) = N(\Gamma, G^\vee)$$

我々は任意の $\Gamma$ と $(SU(n), SU(n)/\mathbb{Z}_n)$ 、任意の $\Gamma$ と $(SO(2n+1), Sp(n))$ 、例外型の $\Gamma$ と $(Spin(2n+1), Sp(n)/\mathbb{Z}_2)$ の場合に証明した。本発表では、

$$\Gamma = \mathbb{Z}_{2m+1}, \hat{\Gamma} \text{ に対して } (G, G^\vee) = (SO(2n+1), Sp(n))$$

の場合の証明を与える。

## 準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow G$ を数え上げる方法

### 表現の分類

$\rho$ を有限群の、複素ベクトル空間V上の表現とする。

- $\bar{\rho} \neq \rho$ の時、 $\rho$ を複素表現と言う
- $\bar{\rho} \simeq \rho$ の時、さらに
  - $\rho$ が実ベクトル空間上の表現のVへの複素化として実現する時、 $\rho$ を実表現と言う
  - Vが $\mathbb{H}$ -加群であり、 $\mathbb{H}$ の作用と $\Gamma$ の作用 $\rho$ が可換になる時、 $\rho$ を四元表現と言う

### G = SO(2n+1)の時

準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow SO(2n+1)$ を取った時、 $SO(2n+1)$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ に自然に作用するので、 $\rho$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上の表現になる。一方、 $\rho'$ を $\Gamma$ の $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上の表現とし、以下のように既約表現の直和に分解する:

$$\rho' \simeq \rho_1 \oplus \cdots \oplus \overbrace{\rho_k \oplus \cdots \oplus \rho_k}^{r_k \text{個}} \oplus \cdots \oplus \rho_s$$

この時、 $\rho'$ がある $\rho$ の複素化として実現するための必要十分条件は、

$$\begin{cases} \rho_k \text{が複素表現なら、その重複度 } r_k \text{ と } \overline{\rho_k} \text{ の重複度 } r_{\bar{k}} \text{ に対し } r_k = r_{\bar{k}} \\ \rho_k \text{が四元表現なら、その重複度 } r_k \text{ は偶数} \\ \det \rho' = (\det \rho_1)^{r_1} \cdots (\det \rho_s)^{r_s} = 1 \end{cases}$$

この条件を満たす $\rho'$ の数を数えればよい。

### G = Sp(n)の時

準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow Sp(n)$ を取った時、 $Sp(n)$ は $\mathbb{H}^n$ に自然に作用するので、 $\rho$ は $\mathbb{H}^n$ 上の表現になる。一方、 $\rho'$ を $\Gamma$ の $\mathbb{C}^{2n}$ 上の表現とし、上と同様に既約表現の直和に分解する。この時、 $\rho'$ がある $\rho$ と同値になるための必要十分条件は、

$$\begin{cases} \rho_k \text{が複素表現なら、その重複度 } r_k \text{ と } \overline{\rho_k} \text{ の重複度 } r_{\bar{k}} \text{ に対し } r_k = r_{\bar{k}} \\ \rho_k \text{が実表現なら、その重複度 } r_k \text{ は偶数} \end{cases}$$

この条件を満たす $\rho'$ の数を数えればよい。

### $\Gamma = \mathbb{Z}_{2m+1}$ の既約表現

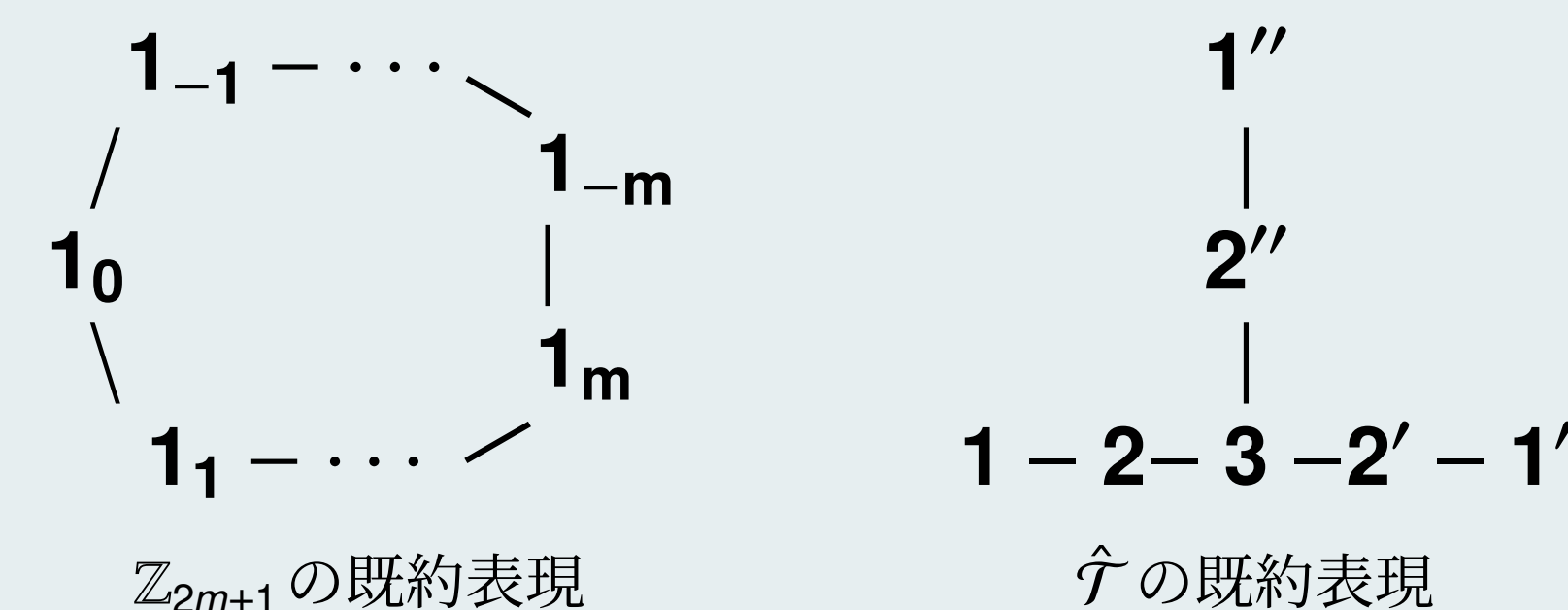
aを $\mathbb{Z}_{2m+1}$ の生成元とした時、 $\mathbb{Z}_{2m+1}$ の既約表現は

$$\rho_k(a) = e^{\frac{2\pi i k}{2m+1}} \quad (k = -m, \dots, m)$$

の $2m+1$ 個。 $\rho_0$ は実表現、他は $(\rho_k, \rho_{-k})$ でcomplex pair.

### $\Gamma = \hat{\Gamma}$ の既約表現

McKay対応により以下のように表示される。**1**と**3**は実。**2**は四元で $\det \mathbf{2} = 1$ 。 $(\mathbf{1}', \mathbf{1}'')$ と $(\mathbf{2}', \mathbf{2}'')$ は各々complex pairで $\det \mathbf{2}' = \mathbf{1}'$ ,  $\det \mathbf{2}'' = \mathbf{1}''$ .



## 数え上げと母関数の等式

### $\Gamma = \mathbb{Z}_{2m+1}$ の時

以上の結果より、準同型の数え上げは分割の問題に帰着する。Spの時は、

$$\begin{aligned} N(\mathbb{Z}_{2m+1}, Sp(n)) &= \#\{(r_{-m}, \dots, r_m) \mid r_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, r_k = r_{-k}, r_0 \text{は偶数}, \sum_{k=-m}^m r_k = 2n\} \\ &= \#\{(r_0, \dots, r_m) \mid r_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 2r_0 + 2(r_1 + \dots + r_m) = 2n\} \end{aligned}$$

従ってこの母関数は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} N(\mathbb{Z}_{2m+1}, Sp(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq r_0, \dots, r_m \\ 2(r_0 + \dots + r_m) = 2n}} q^{2n} = \frac{1}{(1-q^2)^{m+1}} \quad (1)$$

同様にして、 $G = SO(2n+1)$ の時は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} N(\mathbb{Z}_{2m+1}, SO(2n+1)) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1-q(1-q^2)^m} - \frac{1}{1+q(1-q^2)^m} \right\} \quad (2)$$

### $\Gamma = \hat{\Gamma}$ の時

同様に考えて、

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} N(\hat{\Gamma}, Sp(n)) = \frac{1}{(1-q^2)^3} \frac{1}{1-q^4} \frac{1}{1-q^6} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} N(\hat{\Gamma}, SO(2n+1)) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-q^2} \frac{1}{(1-q^4)^2} \left\{ \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q^3} - \frac{1}{1+q} \frac{1}{1+q^3} \right\} \quad (4)$$

(1)  $\times$  q = (2) と (3)  $\times$  q = (4) が直接計算から分かるので、これらの場合について予想が正しいことが証明された■

## 参考文献

- Y.Kojima and Y.Tachikawa, arXiv:2505.01253
- S. Choi and Y. Tachikawa, arXiv:2512.20307