Wiener空間の測度距離構造

三角 健太
東京大学数理科学研究科

要約

- Malliavin解析：Wiener空間（曲線全体のなす空間）上の微分積分学．

  応用例：確率微分方程式の解が滑らかな確率密度をもつかどうかが判定でき、その結果として、対応する偏微分方程式の弱解の正則性を、比較的弱い条件のもとで調べられるようになる（楕円性を仮定しなくていい！）．

- 研究結果：Malliavin解析を、「測度距離空間上のSobolev空間論」という観点で統一的に捉えることに成功．

以下，まず「測度距離空間上のSobolev空間論」を簡潔に説明し，Malliavin解析がこの枠組みの中でどのような意味で，そしてなぜ統一的に理解されるかを説明する．

測度距離空間上のSobolev空間論

本スライドでは，測度距離空間とは

- X : 集合
- d : X上の距離（∞を取ってよいとする）
- μ : (X, d)上の有限なBorel測度

の三つ組(X, d, μ)のこととする．

定義

f, GをX上のBorel可測関数，$G \geq 0$とする．任意の長さ有限な曲線$x : [0, 1] \to X$に対して

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq \int_x G$$

が成立するとき，GはfのUpper Gradientであるという．ここで$\int_x G$はGのxに沿った線積分である．

測度距離空間上のSobolev空間は，Upper Gradientを以下の意味で "完備化 "して構成する．$1 < p < \infty$とする．

定義

f, GをX上のBorel可測関数，$G \geq 0$とする．X上のBorel可測関数の列$(f_j), (G_j)$で，以下の条件を満たすものが存在するとき，Gはfのp-Relaxed Gradientであるという．

1. G_jはf_jのUpper Gradient.
2. $\int_X |f_j - f|^p d\mu \to 0$, $\int_X |G_j - G|^p d\mu \to 0$が成り立つ．

$\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{ch}} := \{f \in \mathrm{L}^p(\mu) \mid$
fはp乗可積分なRelaxed Gradientを持つ$\}$と定義し，Cheeger型Sobolev空間と呼ぶ．

この空間にノルムを定義する．

補題

$f \in W^{1,p}_{\mathrm{ch}}$とするとき，ある$p$乗可積分な$G^*$であって

1. G^*はfのRelaxed Gradient.
2. G^*はfのRelaxed Gradientの中でL^p-ノルム最小.

となるものが一意的に存在する．G^*を$|Df|_{\mathrm{ch}}$と書き，fのp-Minimal Relaxed Gradientと呼ぶ．

命題

$W^{1,p}_{\mathrm{ch}}$はノルム$\|f\|_{W^{1,p}} := (\|f\|_p^p + \||Df|_{\mathrm{ch}}\|_p^p)^{1/p}$によりBanach空間となる．

Malliavin解析

主結果を述べるため，Malliavin解析の基礎事項を確認する．

- X : Wiener空間（$\mathbb{R}^N$上の0を出発する連続曲線全体）
- H : Cameron Martin空間（$\mathbb{R}^N$上の0を出発する2-絶対連続曲線全体）
- μ : Wiener測度（X上のGauss分布で、Hを基準に正規化されたもの）

とし，Xのノルムとして一様ノルム，Hの内積として微分のL^2-内積を入れる．$\mathcal{P} \subset \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$を$X$上の多項式全体とする．

定義

$f \in \mathcal{P}$に対し，そのH-微分$Df : X \to H$を

$$\langle (Df)(x), h \rangle := (D_h f)(x)$$

で定義する（右辺はfのxにおけるh方向の微分）．

$1 \leq p < \infty$に対し，上で定義したDは$L^p(\mu)$から$\mathrm{L}^p(\mu, H)$への可閉作用素となる．その閉包の定義域を$D^{1,p}$とかき，Malliavin型Sobolev空間と呼ぶ．

主結果

X上の距離d_Hを$d_H(x, y) := \begin{cases} |x-y|_H & \text{if } x-y \in H \\ \infty & \text{if } x-y \notin H \end{cases}$で定義する．$\mu$は$(X, d_H)$上の有限Borel測度となり，測度距離空間$(X, d_H, \mu)$を考えることができる．

主結果

$1 < p < \infty$に対して$W^{1,p}_{\mathrm{ch}} = D^{1,p}$であり，
$|Df|_{\mathrm{ch}} = |Df|_H$ (右辺のDはH-微分)

以下，この定理の証明の概略を説明する．

ステップ1

$D^{1,p} \subset W^{1,p}_{\mathrm{ch}}$であり，$|Df|_{\mathrm{ch}} = |Df|_H$ $(f \in D^{1,p})$

Step1を示すには「$\mathcal{P} \subset W^{1,p}_{\mathrm{ch}}$で$|Df|_{\mathrm{ch}} = |Df|_H$ $(F \in \mathcal{P})$」を言えば十分．これは以下の定理を用いてH方向のずらしを計算することで示される．

Cameron Martin公式

$h \in H, \tau_h(x) := x + h : X \to X$とするとき，押し出し$(\tau_h)_*\mu$は$\mu$に絶対連続で，

$$\frac{d(\tau_h)_*\mu}{d\mu}(x) = \exp\left(-\frac{|h|_H^2}{2} + \langle h, x \rangle\right)$$

ステップ2

$W^{1,p}_{\mathrm{ch}} \subset D^{1,p}$が成立する．

Step2の証明には，Wiener空間上のOrnstein-Uhlenbeck半群$(T_t)_{t>0}$が用いられる（定義は略す）．$f \in W^{1,p}_{\mathrm{ch}}$とする．この時OU半群の平滑化効果から$T_t f \in D^{1,p}$である．OU半群の熱核表示から以下の評価が分かるため，$t \downarrow 0$で$|DT_t f|_H$が$|Df|_{\mathrm{ch}}$に収束することが示され，証明が完了する．

Bakry-Emery評価

$F \in \mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{ch}}$に対し，$\||D(T_t F)|_{\mathrm{ch}}\|_p \leq e^{-t} \|T_t(|DF|_{\mathrm{ch}})\|_p$.