

# Secondary Characteristic Classes in CR Geometry

松本周也

東京大学大学院数理科学研究科

今回の研究では、CR幾何学において古くから知られていた Burns–Epstein 不変量について、これまで知られていた2種類の構成を統一し、より一般的な設定に拡張しました。このポスターでは、①繰り込み Chern–Gauss–Bonnet 公式の一般化と mod  $\mathbb{Z}$  の議論の要請、②Cartan 接続の Cheeger–Simons 不変量としての mod  $\mathbb{Z}$  不変量、③佐々木  $\eta$ -Einstein 多様体上での計算例、の順に主結果を紹介します。

## ①繰り込み Chern–Gauss–Bonnet 公式の一般化

### 繰り込み接続

$X^{2(n+1)}$ : 複素多様体,  $\Omega \subset X$ : 相対コンパクト領域,  $M^{2n+1} := \partial X$ .

$\rho \in C^\infty(X)$ :  $\Omega$  の定義関数 s.t.  $\Omega = \{\rho < 0\}$ .

$g := -i\partial\bar{\partial}\log(-\rho)$ .

- $\Omega$  が強擬凸であるとは、 $\rho$  の複素 Hessian  $i\partial\bar{\partial}\rho$  が  $T^{1,0}M := T^{1,0}X \cap T^{\mathbb{C}}M$  上で正定値であること。
- $\rho$  がある Monge–Ampère 方程式の近似解であるとき、Fefferman 定義関数という。
- $\nabla := \nabla^g - 2\text{Sym}[-\partial\log(-\rho) \otimes \text{Id}_{T^{1,0}\Omega}]$  を繰り込み接続という。

以降、領域  $\Omega$  は強擬凸で Fefferman 定義関数を持つと仮定し、繰り込み接続は Fefferman 定義関数から作られたものと考えます。

### 定理 [丸亀 (2016)]

$\xi$ :  $M$  の外向き法線  $(1, 0)$  ベクトル,

$\nabla_{\xi\text{-triv}}$ :  $T^{1,0}X|_M$  の接続 s.t.  $\nabla_{\xi\text{-triv}}\xi = 0$ .

このとき、次の式が成り立つ:

$$\int_{\Omega} c_{n+1}(\nabla) = \chi(\Omega) + \int_M c_{n+1}(\nabla_{\xi\text{-triv}}, \nabla).$$

さらに、境界積分は CR 不変量である。これを  $\mu_{c_{n+1}}(M)$  とかき、Burns–Epstein 不変量という。

この議論は、障害理論を用いて直ちに一般化することができます。

### 留数サイクル

$T^{1,0}X|_M$  が  $(r+1)$ -フレーム  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{r+1})$  をもつとする。

$\mathbf{s}$  を  $\Omega$  に延長する際の障害類  $c_q(\mathbf{s}, T^{1,0}\Omega) \in H^{2q}(\bar{\Omega}, M)$ ,  $q = n - r + 1$

を第  $q$  相対 Chern 類という。

第  $q$  相対 Chern 類の Lefschetz 双対  $\text{Res}_{c_q}(\mathbf{s}, T^{1,0}\Omega) \in H_{2r}(\bar{\Omega})$  を留数サイクルという。

### 主定理 1

$T^{1,0}X|_M$  が  $(r+1)$ -フレーム  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{r+1})$  をもつとする。

$\nabla_{\mathbf{s}\text{-triv}}$ :  $T^{1,0}X|_M$  の接続 s.t.  $\nabla_{\mathbf{s}\text{-triv}}\mathbf{s} = 0$ .

$\Psi := c_{i_1} \cdots c_{i_p}$ ,  $i_1 + \cdots + i_p = r$ .

このとき、次の式が成り立つ:

$$\int_{\Omega} (c_q \cdot \Psi)(\nabla) = \langle \text{Res}(\mathbf{s}), \Psi(T^{1,0}\Omega) \rangle + \int_M c_q(\nabla_{\mathbf{s}\text{-triv}}, \nabla) \wedge \Psi(\nabla).$$

境界積分は  $\mathbf{s}$  のとり方に依存するが、境界積分を mod  $\mathbb{Z}$  したものは CR 不変量である。

丸亀先生の結果は  $r = 0$  の場合に相当します。この場合、canonical な  $(0+1)$ -フレーム  $\mathbf{s} = (\xi)$  があるため、境界積分を mod  $\mathbb{Z}$  する必要はありません。

## ② Cartan 接続の Cheeger–Simons 不変量

### Cheeger–Simons 微分指標

$M$ : 多様体,  $E \rightarrow M$ : 階数  $k$  の複素ベクトル束,  $\nabla$ :  $E$  の接続.

$\Phi \in I_0^l(\mathfrak{gl}(k, \mathbb{C}))$ : 整係数 Ad-不変多項式.

- $M$  上の  $d$  次微分指標とは、準同型  $f: Z_{d-1}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  で、ある  $d$  次微分形式  $\omega$  が存在して  $f \circ \partial = \omega \pmod{\mathbb{Z}}$  が成り立つもの。
- $M$  上の  $2l$  次微分指標  $S_\Phi(\nabla)$  で、 $S_\Phi(\nabla) \circ \partial = \Phi(\nabla)$  を満たし、接続を保つ束写像に関して自然であるようなものがただ一つ存在する。これを Cheeger–Simons 微分指標という。

$\Omega, M$  を①の通りとします。このとき、通称  $\mathcal{G}^A(1, 0)$  と呼ばれる階数  $(n+2)$  の複素ベクトル束  $\mathcal{G}' \rightarrow M$  およびトラクター接続と呼ばれる接続  $\nabla^{\mathcal{G}'}$  が存在します。このベクトル束と接続は、 $M$  が複素多様体  $X$  に埋め込まれているかどうかに関わらず、内在的に存在します。

### 主定義

$\Phi := c_{j_1} + \cdots + c_{j_m}$ ,  $j_1 + \cdots + j_m = n+1$ .

$\langle M, S_\Phi(\nabla^{\mathcal{G}'}) \rangle \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を  $\tilde{\mu}_\Phi(M)$  とかき、Burns–Epstein 不変量と呼ぶ。

### 主定理 2

主定理 1 の状況で、次の式が成り立つ:

$$\tilde{c}_q \mu_\Phi(M) = \int_M c_q(\nabla_{\mathbf{s}\text{-triv}}, \nabla) \wedge \Psi(\nabla) + \mathbb{Z}.$$

### 系

主定義における不変量は [丸亀 (2016)] のものと mod  $\mathbb{Z}$  で一致する:

$\tilde{c}_{n+1} \mu_1 = \mu_{c_{n+1}} + \mathbb{Z}$ . さらに、[Burns–Epstein (1988, 1990)] のものとも mod  $\mathbb{Z}$  で一致する。

さらに、 $M$  上で  $c_1(\nabla) = 0$  であることから、次の系が従います。

### 系

もし  $\tilde{c}_1 \mu_\Psi(M) \neq 0$  となるような  $n$  次整係数 Ad-不変多項式  $\Psi$  があれば、 $M$  は  $\mathbb{C}^{n+1}$  には埋め込めない。

## ③ 計算例

$Y^{2n}$ : コンパクト複素多様体,  $(L, h) \rightarrow Y$ : 負の線束,  $\omega := -i\Theta_h$ .

$(Y, \omega)$  は Einstein 定数  $\lambda$  の Kähler–Einstein 多様体であると仮定する。

$\Omega := \{v \in L \mid \|v\|_h < 1\}$ .

### 主定理 3

$n$  次整係数 Ad-不変多項式  $\Psi$  に対して、次の式が成り立つ:

$$\tilde{c}_1 \mu_\Psi(M) = -\lambda \langle Y, \Psi(T^{1,0}Y) \rangle \pmod{\mathbb{Z}}.$$

一般の不変多項式についても同様に計算できますが、式が煩雑になるためここでは省略します。

- Daniel M. Burns, Jr. and Charles L. Epstein. A global invariant for three-dimensional CR-manifolds. Invent. Math., 1988.
- Daniel M. Burns, Jr. and Charles L. Epstein. Characteristic numbers of bounded domains. Acta Math., 1990.
- Taiji Marugame. Renormalized Chern–Gauss–Bonnet formula for complete Kähler–Einstein metrics. Amer. J. Math., 2016.