# Relative bi-exactness and structural results for graph-wreath product von Neumann algebras (グラフ環積の相対的双完全性およびその構造)


星野 泰佑

東京大学大学院数理科学研究科


2026年2月16日

以下, 可算離散群のことを単に群とかく.

**Definition**

群$G$に対して, 左正則表現

$$\lambda : G \to \mathcal{B}(\ell^2(G)); (\lambda(g)(f))(h) := f(g^{-1}h)$$

の像$\lambda(G) \subset \mathcal{B}(\ell^2 G)$により生成されるフォンノイマン環を**群フォンノイマン環**とよび, $LG$とかく.

フォンノイマン環論において次の問いは古典的・中心的な話題である.

**General Question**

**$LG$には群$G$の情報がどの程度残っているか?**

**Examples**

- 1以上の整数$k$に対して, フーリエ変換$\ell^2(\mathbb{Z}^k) \cong L^2(\mathbb{T}^k, m)$によって$L\mathbb{Z}^k \cong L^\infty(\mathbb{T}^k, m)$となる. とくに, $L\mathbb{Z}^k \cong L\mathbb{Z}$となる.
- (Connes) $G$が従順群かつi.c.c. のとき, $LG$はすべて同型.
- (McDuff) $LG$としてありうる$\mathrm{II}_1$型因子環は非可算通りある.
- (Free Group Factor Problem)「$L\mathbb{F}_m \cong L\mathbb{F}_n$ならば$m = n$」かどうかは未解決.

本研究では群の**グラフ積**および**グラフ環積**について, **bi-exact性**とよばれる性質に着目し, 上のGeneral Questionを考察した.

## 1. グラフ積・グラフ環積

以下, グラフは全て単純無向グラフとし, 頂点集合$V\Gamma$と辺集合$E\Gamma \subset V\Gamma \times V\Gamma$をもつグラフ$\Gamma$を単に$\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$とかく.

**Definition (グラフ積)**

グラフ$\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$および頂点集合$V\Gamma$で添字づけられた群の族$(G_v)_{v \in V\Gamma}$ に対して, それらの**グラフ積**$G_\Gamma$を

$$G_\Gamma = \Gamma\{G_v\} := \langle (G_v)_{v \in V\Gamma} \mid [G_v, G_w] = 1 (\forall (v, w) \in E\Gamma) \rangle.$$

で定義する.

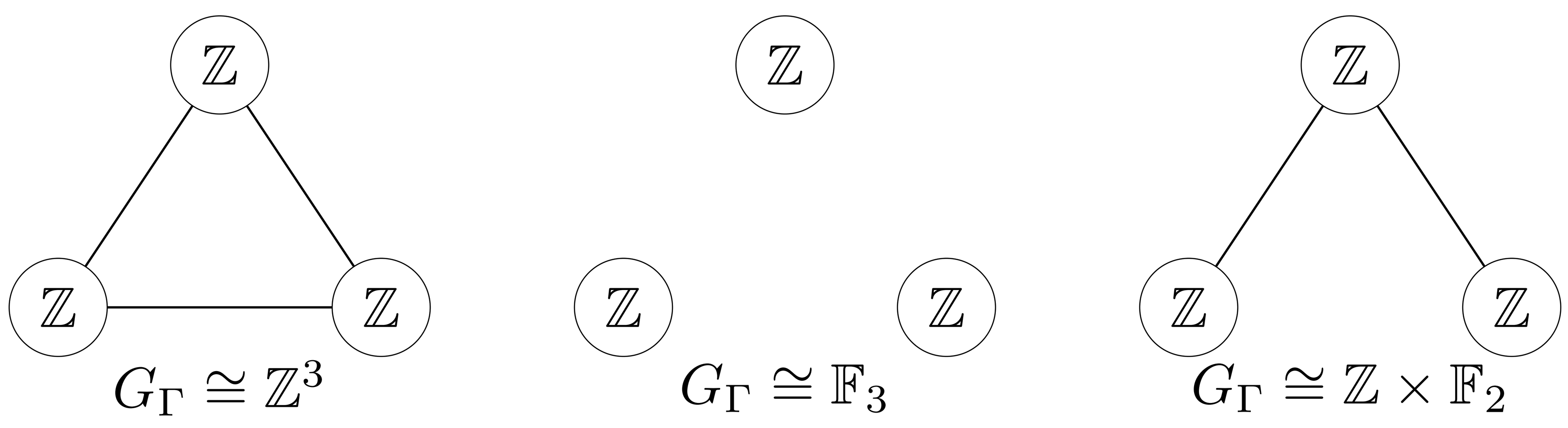


Figure: $\Gamma$が3頂点からなるグラフで, $G_v \equiv \mathbb{Z}$の場合の例

**Definition (グラフ環積)**

$H$を群, $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$をグラフとし, 群$G$が$\Gamma$に作用しているとする. このとき, 各頂点群を$H_v \equiv H$とした$\Gamma$上のグラフ積$H_\Gamma$には$G$が次のように作用する;

$$\sigma_g : H_v \ni h \longmapsto h \in H_{gv} \ (v \in V\Gamma).$$

この作用による半直積$H_\Gamma \rtimes_\sigma G$を**グラフ環積**とよぶ.

**グラフ積・グラフ環積に対するGeneral Question**

**グラフ積やグラフ環積の群フォンノイマン環$LG_\Gamma$や$L(H_\Gamma \rtimes G)$には$(G_v)_v$や$G$, $H$, $\Gamma$の情報がどの程度残っているか?**

グラフ積に関しては次の結果が知られている.

**Theorem (Horbez-Ioana)**

*$\Gamma$, $\Lambda$をtransvection-freeかつ内周5以上の有限グラフとし, $(G_v)_{v \in V\Gamma}$, $(H_w)_{w \in V\Lambda}$ を無限群の族とする. もしグラフ積の群フォンノイマン環$LG_\Gamma$と$LH_\Lambda$が同型となったならば,* **グラフの同型$\alpha : \Gamma \to \Lambda$が存在**し, *任意の$v \in V\Gamma$に対し$LG_v \prec LH_{\alpha(v)}$, $LH_{\alpha(v)} \prec LG_v$となる.*

## 2. bi-exact性

bi-exact性はOzawaにより見出された群の性質である.

**Definition (Relative bi-exact性)**

群$G$とその部分群の族$\mathcal{G}$が以下の条件をみたすとき, 群$G$は**$\mathcal{G}$に対してbi-exact**であるという;

ある写像$\mu : G \to \mathrm{Prob}G$が存在し, 任意の$g, h \in G$に対して$\|\mu(gsh) - g.\mu(s)\|_1 \to 0$ ($s \in G, s \to \infty/\mathcal{G}$). をみたす.

ここで, $\mathrm{Prob}G$は$G$上の確率測度全体のなす集合である.

bi-exact性は(AO) propertyとよばれる$C^*$-環的な性質によっても特徴づけられることが知られている.

**Examples**

自由群$\mathbb{F}_n$は自明群のみからなる族$\{\{e\}\}$に対してbi-exact(単にbi-exactという). より一般に, 双曲群はbi-exact.

bi-exact性は以下の性質によりフォンノイマン環論的に重要である.

**Theorem (Ozawa)**

*群$G$は$\mathcal{G}$に対してbi-exactであるとする. このとき, 任意の部分フォンノイマン環$P \subset LG$に対して, $P' \cap LG$が非従順ならば, ある$H \in \mathcal{G}$が存在して$P \prec_{LG} LH$となる.*

## 3. 主結果

bi-exact性に関する$C^*$-環の理論と組み合わせ論的な議論を組み合わせることにより, 次のrelative bi-exact性の結果を得た.

**Theorem (H.)**

*$H$をexactな群, $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$をグラフとし, bi-exactな群$G$が$\Gamma$に作用しているとする. このとき, もし作用$G \curvearrowright V\Gamma$の各頂点での等方群がすべて有限であり, かつ有限個の軌道を持つならば, グラフ環積$H_\Gamma \rtimes G$は族$\{H_{St_v} = \langle H_w \mid v = w \ or \ (v, w) \in E\Gamma \rangle\}_{v \in V\Gamma}$に対してbi-exact.*

この結果と先に述べたHorbez-Ioanaの手法を組み合わせることで冒頭のQuestionに対する次のような部分的な回答を得た.

**Theorem (H.)**

*$(H_1, G_1 \curvearrowright \Gamma_1)$, $(H_2, G_2 \curvearrowright \Gamma_2)$を以下の条件をみたす組とする.*

- *$H_1$, $H_2$はexactでi.c.c., さらにProperty (T) をもつ無限群,*
- *$\Gamma_1 = (V\Gamma_1, E\Gamma_1)$, $\Gamma_2 = (V\Gamma_2, E\Gamma_2)$は連結でtransvection-free, 内周が5以上の局所有限無限グラフ.*
- *$G_1$, $G_2$はbi-exactな無限群でそれぞれ$\Gamma_1$, $\Gamma_2$に作用し, 頂点集合への作用$G_i \curvearrowright V\Gamma_i$は自由かつ有限個の軌道を持つ.*

*いま, 2つの群フォンノイマン環$L((H_1)_{\Gamma_1} \rtimes G_1)$と$L((H_2)_{\Gamma_2} \rtimes G_2)$ が同型ならば,* **2つの商グラフ$G_1 \backslash \Gamma_1$と$G_2 \backslash \Gamma_2$は互いに同型.**

**Example**

*$k, l \geq 3$, $m, n \geq 2$を正整数とし, $H_1 = PSL_k(\mathbb{Z})$, $H_2 = PSL_l(\mathbb{Z})$, $G_1 \curvearrowright \Gamma_1 = \mathbb{F}_m \curvearrowright T_m$, $G_2 \curvearrowright \Gamma_2 = \mathbb{F}_n \curvearrowright T_n$を自由群のそのケイリーグラフへの作用とする. このときこれらのなすグラフ環積群フォンノイマン環$L((H_i)_{\Gamma_i} \rtimes G_i)$が同型ならば$m = n$.*

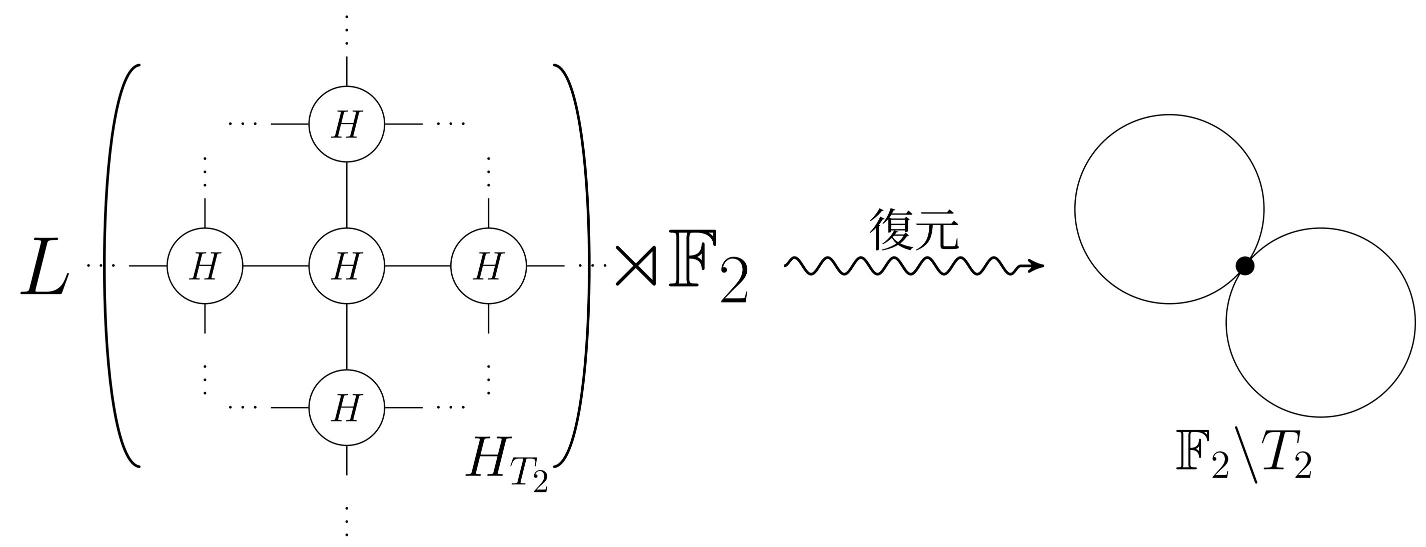


Figure: グラフ環積フォンノイマン環から商グラフを復元するイメージ図