混標数における非ネフ集合

岩根 僚太朗
東京大学数理科学研究科

まず，取り組んだ問題の背景について説明する．Xを体k上の正規射影代数多様体，DをX上の$\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-因子とする．

定義（ネフ）

Dがネフであるとは，任意のZariski閉な曲線$C \subset X$に対して，$(D.C) \geq 0$が成り立つことをいう．

Dの「非ネフ性」を測るXの部分集合として，制限基底集合と非ネフ集合というものが定義される．
以下簡単のため，Dを巨大$\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-因子とする．

定義（安定基底集合・制限基底集合）

$$\mathbf{B}(D) := \bigcap_{\substack{m\,:\,\text{正整数}\\ mD\ \text{Cartier}}} \mathrm{Bs}|mD|, \quad \mathbf{B}_-(D) := \bigcup_{\substack{A\,:\,\text{豊富}\\ \mathbb{Q}\text{-Cartier } \mathbb{Q}\text{-因子}}} \mathbf{B}(D+A).$$

$\mathbf{B}(D)$をDの安定基底集合，$\mathbf{B}_-(D)$をDの制限基底集合と呼ぶ．

定義（非ネフ集合）

$K(X)$の離散付値$v : K(X) \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$が$X$上空の因子的付値であるとは，正規射影多様体からの双有理射$\mu : Y \to X$とY上の素因子Γが存在して，$v = \mathrm{ord}_\Gamma$となることをいう．このとき，$c_X(v) := \mu(\Gamma)$をvのX上の中心という．

$$v_{\mathrm{num}}(D) := \inf_{\substack{m\,:\,\text{正整数}\\ mD\ \text{Cartier}}} \inf_{G \in |mD|} \frac{1}{m} v(G),$$

をvに沿ったDの数値的消滅次数と呼び，

$$\mathrm{NNef}(D) := \bigcup_{\substack{v\,:\,X\text{上の因子的付値}\\ v_{\mathrm{num}}(D) > 0}} c_X(v)$$

をDの非ネフ集合と呼ぶ．

性質

- $\mathrm{NNef}(D)$と$\mathbf{B}_-(D)$はともにXの閉集合の和集合で，Dの数値的同値類のみから定まる．
- $\mathrm{NNef}(D) \subset \mathbf{B}_-(D)$.
- Dがネフ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{B}_-(D) = \emptyset$.
- 体kが非可算の時，Dがネフ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{NNef}(D) = \emptyset$.

予想([Boucksom-Broustet-Pacienza'13])

$$\mathrm{NNef}(D) = \mathbf{B}_-(D).$$

解決状況([Cacciola-Di Biagio'13],[佐藤'18])

Xが以下の穏やかな特異点を持つ場合（特にXが非特異の場合）に肯定的に解決されている．

kの標数	特異点のクラス	証明の手法
0	川又対数的端末(型)	乗数イデアル
$p > 0$	強F正則	判定イデアル

川又対数的端末特異点・乗数イデアルは特異点解消を用いて定義され，強F正則特異点・判定イデアルは標数$p > 0$に特有のフロベニウス射を用いて定義される．それぞれ標数0および標数$p > 0$の特異点論や双有理幾何で重要な役割を果たす．また，これらは正標数還元と呼ばれる標数0と標数$p > 0$を関係づける操作で対応し，様々な類似の応用を持つ．
近年，可換環論の未解決問題であったbig Cohen-Macaulay代数の存在が，Y.Andréによってパーフェクトイド代数を用いて証明されたことをきっかけに，混標数の状況（例えば上の体kをp進整数環$\mathbb{Z}_p$に置き換えた状況）で，強F正則特異点や判定イデアルの類似を定義する様々な試みが為されている．強F正則特異点の混標数類似の一つとしてBCM-regular特異点というものが定義されている．

Sをネーター整スキーム，$f : X \to S$を正規整スキームからの射影的全射とする．本研究では，X上の$\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-因子Dに対して，制限基底集合と非ネフ集合の相対版(それぞれ$\mathbf{B}_-(D/S)$，$\mathrm{NNef}(D/S)$と表す)を導入した．体上の場合と同じく，これらは「相対的ネフ性（f-ネフ性）」を反映したものとなっている．

予想の相対版

$$\mathrm{NNef}(D/S) = \mathbf{B}_-(D/S).$$

[Hacon-Lamarche-Schwede'24]は，判定イデアルの混標数類似の一つで，一様大域生成性という性質を持つものを定義し，その応用として，Xが非特異でSが剰余体が無限の混標数完備ネーター局所整域$(R, \mathfrak{m})$（つまり，Rの商体が標数0で$R/\mathfrak{m}$が標数$p > 0$の無限体）のスペクトラムの場合に，実質的にこの予想を示した．本研究ではこの結果を，Xが穏やかな特異点を持ち，Sが完備局所とは限らない場合に拡張した．

主定理

Rはデデキント整域であって，商体が標数0，すべての剰余体が正標数であるようなもの（例えば$R = \mathbb{Z}$）とする．$f : X \to S = \mathrm{Spec}\, R$は射影的全射で，$X$は正規$\mathbb{Q}$-Gorenstein整スキームであるとする．さらに，生成ファイバーX_ηの特異点はすべて川又対数的端末で，生成ファイバーに入らない点$x \in X \setminus X_\eta$に対しては，次のどちらかの条件が成り立つと仮定する：

1. $\mathfrak{m}_x$-進完備化$\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$は対数的正則局所環である．
2. $\kappa(x)$を剰余体にもつ正則局所環S_xが存在し，本質的有限型な純射$\mathcal{O}_{X,x} \to S_x$が存在する．

このとき，予想が成立する．

上記の特異点はBCM-regular特異点の代表的な例である．対数的正則局所環はトーリック特異点の混標数類似と見做せる．環の射$\phi : A \to B$が純射であるとは，任意のA加群Mについて自然な射$M \to M \otimes_A B$が単射であることをいい，ϕがA線型写像として分裂する場合や忠実平坦である場合を含む．
以下，証明を概説する．制限基底集合と非ネフ集合の相対版の性質から，Rが混標数のDVRの場合が本質的となる．体上の場合と同じく，$\mathrm{NNef}(D)$，$\mathbf{B}_-(D)$，$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathrm{Zeros}(\tau(X, \|mD\|))$ の三つを比較する．ここで$\tau(X, \|mD\|) \subset \mathcal{O}_X$は，[Bhatt et al.'25]により導入された混標数の判定イデアル（に漸近的構成を施したもの）であり，局所化および完備化を施すとBCM-regular性を測るイデアルとなる．この性質が特異点を持つ状況を考えるのに適している．
三つ目が一つ目に含まれることを示すのが最も難しく，次の特異点の問題に帰着される．$A := \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$とすることを想定している．

問題

BCM-regularな混標数完備ネーター局所環Aに対し，$\alpha_{\mathrm{BCM}}(A) > 0$か？

$\alpha_{\mathrm{BCM}}(A)$は本研究でBCMアルファ不変量という名前で導入したものであり，任意の正則元$g \in A$による摂動でAのBCM-regular性が，gの消滅次数に対してどの程度保たれるかを表す非負実数値である．この正値性を主定理の特異点の場合に証明した．

今後の課題・展望

- $\mathbb{Q}$-Gorenstein性の仮定を外すこと（対数的対への拡張）
- 一般のBCM-regular特異点での解決
- BCMアルファ不変量α_{BCM}は正標数のフロベニウスアルファ不変量α_Fの混標数類似である．近年α_Fは正標数で重要な別の不変量であるF符号との関係において研究されている（これ自体も標数0においてK安定性の文脈で重要なアルファ不変量と正規化体積の類似である）．F符号の混標数類似であるperfectoid signatureという量が既に定義されていることから，α_{BCM}とperfectoid signatureの関係について今後研究したいと考えている．