$\mathrm{Mp}(4)$のp通常的な尖点的保型表現の個数の有界性について

石倉 麟太郎
東京大学 数理科学研究科

$\mathbb{A}$を有理数体$\mathbb{Q}$のアデール環，$\mathbb{A}^{\infty,p}$を有限アデール環$\mathbb{A}^{\infty}$から素点pを除外した環とする．Mp_{2n}でシンプレクティック群Sp_{2n}の2重被覆群を表す．

定義：$\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A})$の保型表現

$\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$とおき，$K_\infty \cong U_n$を$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$の最大コンパクト部分群とする．genuine保型形式$\phi\colon \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$のなす空間$\mathcal{A}(\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A}))$と尖点形式のなす空間$\mathcal{A}_0(\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A}))$は$(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)\times \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A}^\infty)$加群である．

- 既約$(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)\times \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A}^\infty)$加群$\pi$が$\mathcal{A}(\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A}))$の部分商と同型なとき，$\pi$は保型表現であるという．
- 既約$(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)\times \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A}^\infty)$加群$\pi$が$\mathcal{A}_0(\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A}))$の部分商と同型なとき，$\pi$は尖点的保型表現であるという．

$\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{A})$の尖点的保型表現$\pi$は制限テンソル積分解

$$\pi = \pi_\infty \otimes \bigotimes_{l:\mathrm{prime}}{}' \pi_l.$$

をもつ．ここでπ_∞は既約許容$(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$加群，$\pi_l$は$\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Q}_l)$の既約スムーズ表現である．

定義：離散的Aパラメータ

$\mathrm{Mp}_4(\mathbb{A})$の離散的Aパラメータとは，表現の形式的和

$$\phi = \bigoplus_i \phi_i \boxtimes S_{d_i} \quad \left(\sum_i n_i d_i = 4\right)$$

であって，次の条件をみたすもの．

- ϕ_iは$\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A})$の尖点的保型表現(+いくつかの条件)．
- S_{d_i}は$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$の$d_i$次元既約表現.

Aパラメータϕが緩増加であるとは，すべてのiに対して$d_i = 1$をみたすこと．

Aパラメータϕの局所化$\phi_l = \bigoplus_i \phi_{i,l} \boxtimes S_{d_i}$は局所Aパラメータ$\phi_l\colon L_{\mathbb{Q}_l}\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$を定め，

$$\varphi_{\phi_l}(w) = \phi_l(w, \begin{pmatrix} |w|_p^{\frac{1}{2}} & \\ & |w|_p^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix})$$

によりLパラメータ$\varphi_{\phi_l}\colon L_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$を与える．

上三角Borel部分群$B \subset \mathrm{Sp}_4$と正整数$r \in \mathbb{Z}_{>0}$に対して

$$B(p^r) = \left\{ g \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_p) \;\middle|\; g \bmod p^r \in B(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \right\}$$

とおき，$B(p^r)$の$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{Mp}_4(\mathbb{Q}_p)$による像を$\widetilde{B}(p^r)$とする．

半整数aに対して$W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$の指標$z \mapsto (z/\overline{z})^a$を$W_{\mathbb{R}}$に誘導した2次元既約表現を$\mathcal{D}_a$と表す．

定義：Hecke作用素

$j \geq 0$と$k > 3$を整数とする．$\mathrm{Mp}_4(\mathbb{A})$の尖点的保型表現$\pi$の無限素点でのLパラメータが$\mathcal{D}_{k+j-\frac{3}{2}} \oplus \mathcal{D}_{k-\frac{5}{2}}$であるとする．$r \in \mathbb{Z}_{>0}$に対してHecke作用素

$$\widetilde{U}_r^{(1)} = p^{k+j-\frac{5}{2}} \times \left(\widetilde{B}(p^r)\,\mathrm{diag}(p,1,1,p^{-1})\widetilde{B}(p^r)\text{の作用素}\right),$$
$$\widetilde{U}_r^{(2)} = p^{2k+j-7} \times \left(\widetilde{B}(p^r)\,\mathrm{diag}(p,p,p^{-1},p^{-1})\widetilde{B}(p^r)\text{の作用素}\right)$$

を定め，その帰納極限を

$$\widetilde{U}^{(1)} = \varinjlim_{r\in\mathbb{Z}_{>0}} \widetilde{U}_r^{(1)}, \quad \widetilde{U}^{(2)} = \varinjlim_{r\in\mathbb{Z}_{>0}} \widetilde{U}_r^{(2)}$$

とおく．$\widetilde{U}^{(1)}$と$\widetilde{U}^{(2)}$は$\pi_p^{B(\mathbb{Z}_p)}$に作用する．

定義：p通常的保型表現

上述の尖点的保型表現πがp通常的であるとは，次の3条件をみたすベクトル$v \in \pi_p^{B(\mathbb{Z}_p)}$が存在すること．

- vは$\widetilde{U}^{(1)}, \widetilde{U}^{(2)}$の固有ベクトル．
- 極限$\lim_{m\to\infty} (\widetilde{U}^{(1)})^{m!}v$と$\lim_{m\to\infty} (\widetilde{U}^{(2)})^{m!}v$が収束する．
- $\lim_{m\to\infty} (\widetilde{U}^{(1)}\widetilde{U}^{(2)})^{m!}v \neq 0$.

定義：集合$\mathcal{S}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{Mp}_4; K, j, k)$

コンパクト開部分群$K \subset \mathrm{Mp}_4(\mathbb{A}^{\infty,p})$と整数$j \geq 0$と$k > 3$に対し，$\mathrm{Mp}_4(\mathbb{A})$の$p$通常的な尖点的保型表現で，以下の3条件をみたすものの集合を$\mathcal{S}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{Mp}_4; K, j, k)$と表す．

- 無限素点成分はLパラメータが$\mathcal{D}_{k+j-\frac{3}{2}} \oplus \mathcal{D}_{k-\frac{5}{2}}$の正則離散系列表現である．
- 0でないK固定ベクトルを持つ．
- Aパラメータは緩増加である．

整数$j \geq 0$と$k > 3$を動かしたときの，集合$\mathcal{S}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{Mp}_4; K, j, k)$の濃度の有界性を得た．

主定理

素数$p \geq 5$と，$2, 3, 5, 7, 11, 13, p$と互いに素な正整数Nを固定する．また，$\mathrm{Mp}_4(\mathbb{A}^{\infty,p})$のコンパクト開部分群$K = \prod_{l\neq p:\mathrm{prime}} K_l$が素数$l \nmid N$に対して$K_l = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_l)$をみたすとする．このとき，定数$C(K) > 0$が存在して，任意の整数$j \geq 0$と$k > 3$に対して不等式

$$\#\mathcal{S}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{Mp}_4; K, j, k) < C(K)$$

が成り立つ．

$\mathrm{Mp}_4(\mathbb{A})$の緩増加Aパラメータは次の2種類に分類される．

- 吉田型：$\sigma \boxtimes 1 \oplus \sigma' \boxtimes 1$（$\sigma, \sigma'$は相異なる$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$の尖点的保型表現）.
- 一般型：$\tau \boxtimes 1$（τは$\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$の尖点的保型表現）.

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}), \mathrm{SO}_5(\mathbb{A})$では同様の有限性が知られている．吉田型Aパラメータはσ, σ'に対応させることで$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$における有限性に帰着する．一般型Aパラメータは$\mathrm{SO}_5(\mathbb{A})$のAパラメータとみることで$\mathrm{SO}_5(\mathbb{A})$における有限性に帰着する．

$l \mid N$成分　$\mathcal{S}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{Mp}_4; K, j, k)$の元の$l$成分は$K_l$固定ベクトルをもつため，一様に深さが抑えられる．局所Langlands対応と局所テータ対応の深さ保存を用いて，対応する$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l)$や$\mathrm{SO}_5(\mathbb{Q}_l)$の既約スムーズ表現の深さを一様に抑える．

$l = p$成分　$\pi \in \mathcal{S}_{\mathrm{temp}}(\mathrm{Mp}_4; K, j, k)$の$p$成分$\pi_p$へのHecke作用を考えると，Borel部分群に関するJacquet加群が$R_B(\pi_p) \neq 0$をみたすとわかる．よって，π_pはBorel部分群に関する放物型誘導表現の既約商に同型である．Hecke固有値を具体的に計算することで，超尖点台に関する条件を与える．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$や$\mathrm{SO}_5(\mathbb{Q}_p)$の既約スムーズ表現でも同様の考察を行う．

今後の課題

- Nの素因数に関する条件を緩める．
- 2次ベクトル値Siegelモジュラー形式と関連付ける．
- Mp_6など，高次のメタプレクティック群で同様の議論．
- 例外群の局所テータ対応の深さ保存の証明と応用．