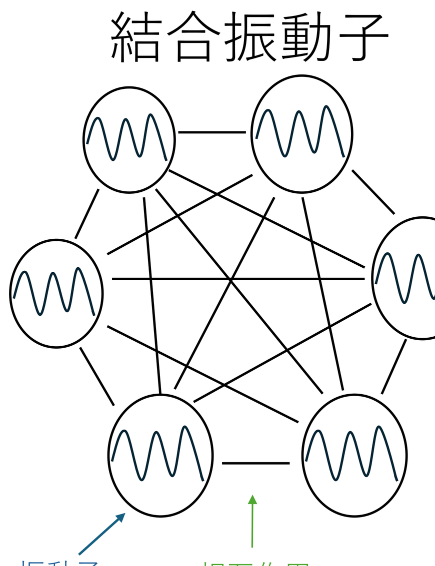
非線形入力を持つ振動子集団のダイナミクス: シグモイド型関数とそこから誘導される高次相互作用ネットワークについて

徳永 海
東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻

背景

結合振動子



多数の振動子が互いに相互作用しあうような系を結合振動子系という。結合振動子系は概日リズム、電力網、化学反応、ニューロンの発火など広範な応用を持ち注目されてきた。

位相縮約

結合振動子 $\dot{x}_i = f(x_i) + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=0}^{N} p_{ij}(x_i, x_j)$

位相縮約

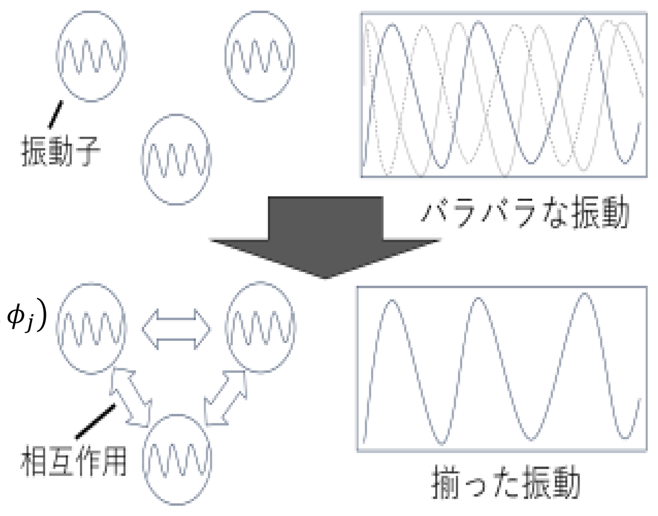
結合位相振動子 $\dot{\phi}_i = \omega + grad_X\phi_i \cdot \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=0}^{N} p_{ij}(\phi_i, \phi_j)$

$\approx \omega + Z(\phi_i) \cdot \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=0}^{N} p_{ij}(\phi_i, \phi_j)$

$Z(\phi_i) = grad_X\phi_i|_{X=\chi(\phi_i)}$:位相感受性

位相のみを変数とする振動子を位相振動子という。解析的な取り回しに向くため理論的に重要な対象である。結合振動子に対し位相縮約を行うことで位相振動子からなる結合振動子が得られる。

同期現象



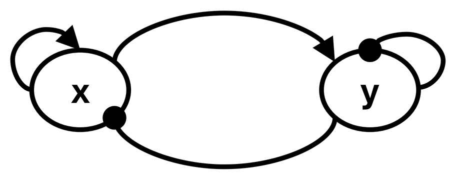
振動子同士が相互作用を通して振動のタイミングをそろえる現象を同期現象という。タイミングが完全に一致する位相同期(同相同期)の他に有利数比で一致する$m:n$同期や、平均周波数について一致する周波数同期など様々なものがある。

①非線形なインプット

$$\dot{X}_i = f_i(X_i) + g(X_i)G(h)$$

ある振動子が周囲からの効果hを非線形に取り込む時の$G(h)$を非線形インプット呼ぶことにする

例

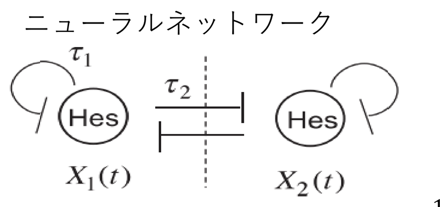


$\dot{x}_i = -x_i + \varphi(\frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} a_{ij}x_j - \frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} b_{ij}y_j + u_{x_i})$

$\dot{y}_i = -y_i + \varphi(\frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} c_{ij}x_j - \frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} d_{ij}y_j + u_{y_i})$

φ :活性化関数

ニューラルネットワーク



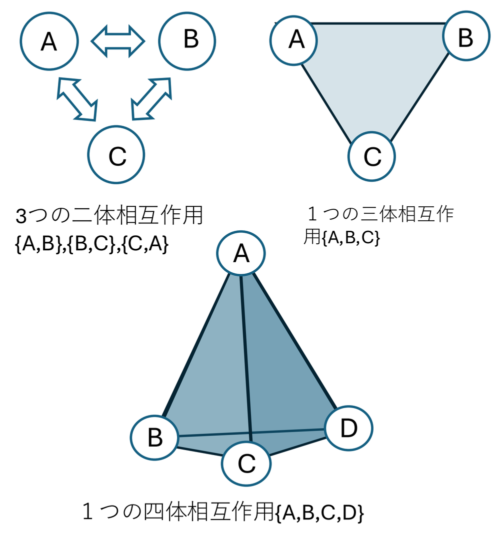
$$\dot{x}_i = a\frac{K_1{}^n}{K_1{}^n + x_i(t-\tau_1)^n} - bx_i - Ka\frac{K_1{}^n}{K_1{}^n + x_i(t-\tau_1)^n}\frac{(\frac{1}{N}\sum x_j(t-\tau_2))^m}{1 + K(\frac{1}{N}\sum x_j(t-\tau_2))^m}$$

細胞間相互作用

応用上重要であると考えられるが体系的な研究はあまりなされていない。

②高次相互作用

- n個の対象が一つの相互作用をなすときn体相互作用と言う。特にnが3より大きい時通常の相互作用と区別して高次相互作用と呼ぶ。
- 近年、高次相互作用を持つ振動子ネットワークが注目を集めている。



高次相互作用を持つ振動子ネットワークの主要な研究

1. 従来の位相縮約の拡張(高次位相縮約)により高次相互作用位相振動子を導出する研究：
   I Leon et al. Physical Review E. (2019) [1] , E Gengel et al. Journal of Physics: Complexity.(2020) [2]
2. 高次相互作用位相振動子における不連続同期転移の研究：
   PS Skardal et al. *Communications Physics*. (2020) [3] , AP Millan et al. Physical Review Letters.(2020) [4]

しかし以下のような課題があると考えられる。

- 高次位相縮約のような現在知られている高次相互作用位相振動子モデルの導出では高次相互作用項は摂動論の高次の項として現れるため、不連続転移などの高次相互作用が重要な役割を果たすと考えられるを現象は現れない。
- 不連続転移などの現象は高次相互作用ネットワーク以外でも得られるため、高次相互作用特有の現象とは言えない。

研究目的①

非線形インプットを持つ振動子集団に対し一般的に適応可能な理論的枠組みを構築し、ダイナミクスに対して与える影響を調べる。

研究目的②

- 不連続同期転移を示す高次相互作用位相振動子モデルを理論的に自然な形で導出する。
- 高次相互作用を持つ振動子系に特有な現象を解析する。

数理モデル

非線形ウィンフリーモデル

$$\dot{X}_i = f_i(X_i) + g(X_i)G(h) \quad ,h = \frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} P(X_j) \xrightarrow{\text{位相縮約}} \dot{\phi}_i = \omega_i + Z(\phi_i)G(h) \quad ,h = \frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} P(\phi_j)$$

非線形インプット結合振動子　平均場

非線形ウィンフリーモデル

$G(h) = h$の時は通常のウィンフリーモデル

高次ウィンフリーモデル

$G(h)$がマクローリン展開できるとして

$$G(h) = G(0) + G'(0)h + \frac{1}{2!}G''(0)h^2 + \frac{1}{2!}G^{(3)}(0)h^3 + \cdots$$

例えば

$$Z(\phi_i)h^2 = Z(\phi_i)(\frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} P(\phi_j))^2 \xrightarrow{\text{展開}} Z(\phi_i)P(\phi_l)P(\phi_K)$$

三体相互作用

一般にh^nからはn+1体相互作用が現れることがわかる。ここでh^nをn次平均場と呼ぶ。

高次ウィンフリーモデル

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + KZ(\phi_i)\mathrm{G(h)} \quad ,\mathrm{G(h)} = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n \quad (a_n \neq 0, n \geq 2)$$

G(h)の選択

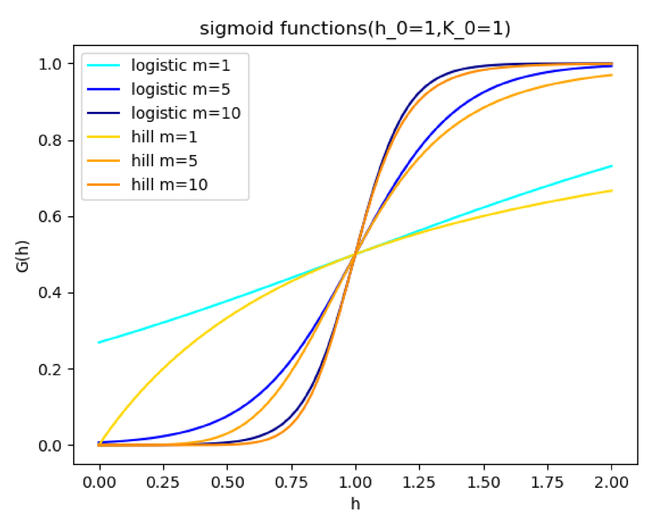
$G(h)$ を0以上の値を取るシグモイド型関数とする

① ヒル関数 $G(h) = \beta\frac{h^m}{K_0{}^m + h^m}$

m: 協同性　K_0 : 閾値　β:最大値

② ロジスティック関数 $G(h) = \beta\frac{1}{1+e^{-m(h-h_0)}}$

m: 協同性　h_0: 閾値　β:最大値



シグモイド型関数

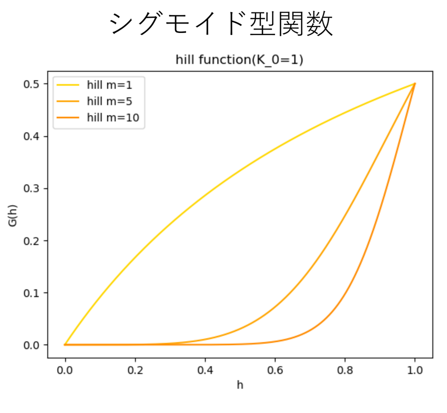
ヒル関数について$G(h)$をマクローリン展開すると

$$G(h) = \beta\frac{h^m}{K_0{}^m + h^m} = \beta\frac{(\frac{h}{K_0})^m}{1 + (\frac{h}{K_0})^m} = \frac{\beta}{K_0{}^m}h^m - \frac{\beta}{K_0{}^{2m}}h^{2m} + \cdots \quad (\left|\frac{h}{K_0}\right| < 1)$$

半シグモイド

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + Z(\phi_i)G\left(\frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} P(\phi_j)\right) \approx \omega_i + \beta Z(\phi_i)(\frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N}\frac{P(\phi_j)}{K_0})^m$$

最小次の項がすでに高次相互作用になっている。



半シグモイド

Ott-Antonsen仮説

仮定: $Z(\phi_i)$ が正弦波(単純な場合として$Z(\phi_i)$ = - $\sin(\phi_i)$) , $g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi((\omega-\omega_0)^2+\Delta^2)}$ (ローレンツ分布), $N \to \infty$

$\dot{\phi}_i = \omega_i + Z(\phi_i)G(h) = \omega_i + Im(e^{i\phi_i}G(h))$について位相分布$f(\phi, \omega, t)$ は以下の連続の式を満たす。

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\phi}\{f\left[\omega + Im\left(e^{i\phi}G(h)\right)\right]\}$$

位相分布のフーリエ展開を$f(\phi, \omega, t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n(\omega, t)e^{-in\phi}$とした時以下を仮定する

Ott-Antonsen 仮説

$$\alpha_n(\omega, t) = \alpha(\omega, t)^n$$

すると各フーリエ係数は次の式に従う。 $\dot{\alpha} = -i\omega\alpha + \frac{KG(h)}{2}(1 - \alpha^2)$

蔵本秩序変数: $A = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\alpha(\omega, t)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\int_0^{2\pi} f(\theta, \omega, t)e^{-i\theta}d\theta\, d\omega$

は留数定理から $\bar{A} = \alpha(-i\Delta + \omega_0, t)$と求まる。 ($A = re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{i\theta_k}$ if $N < \infty$)

$$\dot{A} = -i(-\Delta + \omega_0)A + \frac{K\, G(h(A))}{2}[(1 - A^2)]$$

振動子集団の低次元ダイナミクス

($h = \frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} p(\phi_j)$ フーリエ展開$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_ne^{-in\theta}$ から $h(A) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty}[c_nA^n + \overline{c_nA^n}]$)

ホップ分岐標準系

$A \to Ae^{i\theta}, \theta = \omega_0 t$　Δ, G(h) $\ll 1$ とすると

$$\dot{A} = -\Delta A + \frac{G(h(Ae^{i\theta}))}{2}\left(1 - A^2e^{2i\theta}\right)e^{-i\theta}$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\Delta A + \frac{G(h(Ae^{i\theta}))}{2}\left(1 - A^2e^{2i\theta}\right)e^{-i\theta}d\theta \quad \text{(平均化近似)}$$

$$= \left(-\Delta + \frac{c_1G'(c_0)}{2}\right)A + \frac{A|A|^2}{4}\bar{c_1}\left(-2G'(c_0) + 2c_2G''(c_0) + c_1{}^2G'''(c_0)\right) + O(A|A|^4)$$

$$= a_1A + a_3A|A|^2 + O(A|A|^4) \quad a_1 = -\Delta + \frac{c_1G'(c_0)}{2}$$

ホップ分岐標準形　$a_3 = \bar{c_1}\left(-2G'(c_0) + 2c_2G''(c_0) + c_1{}^2G'''(c_0)\right)$

- 連続転移システム :$d \ll 1$で連続同期転移(超臨界ホップ分岐$a_3 < 0$)
- 不連続転移システム :$d \ll 1$で不連続同期転移 (亜臨界ホップ分岐$a_3 > 0$)

連続転移システム ⇄(一般化ホップ分岐) 不連続転移システム

$$a_3 = \bar{c_1}\left(-2G'(c_0) + 2c_2G''(c_0) + c_1{}^2G'''(c_0)\right) = 0$$

の時に一般化ホップ分岐

結果($N \to \infty$)

高次ウィンフリーモデル

$\dot{\phi}_i = \omega_i + KZ(\phi_i)(\frac{1}{N}\sum_{J=1}^{N} P(\phi_j))^m$　$Z(\phi_i)$ = - $\sin(\phi_i)$, $P(\phi) = \frac{1+\cos(\phi)}{2}$

$N \to \infty$, $g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi((\omega-\omega_0)^2+\Delta^2)}$,OA 仮説により

$$\dot{A} = (i\omega_0 - \Delta)A + \frac{K}{2}(1 - A^2)h(A)^m \quad h(A) = \frac{2 + A + \bar{A}}{4}$$

ホップ分岐標準形は

$$\dot{A} = \left(-\Delta + \frac{Km}{4}\right)A + \frac{A|A|^2}{32}mK(m^2 - 3m - 6) + O(A|A|^4)$$

$m < \frac{3+\sqrt{33}}{2}$で連続転移、 $m > \frac{3+\sqrt{33}}{2}$で不連続転移

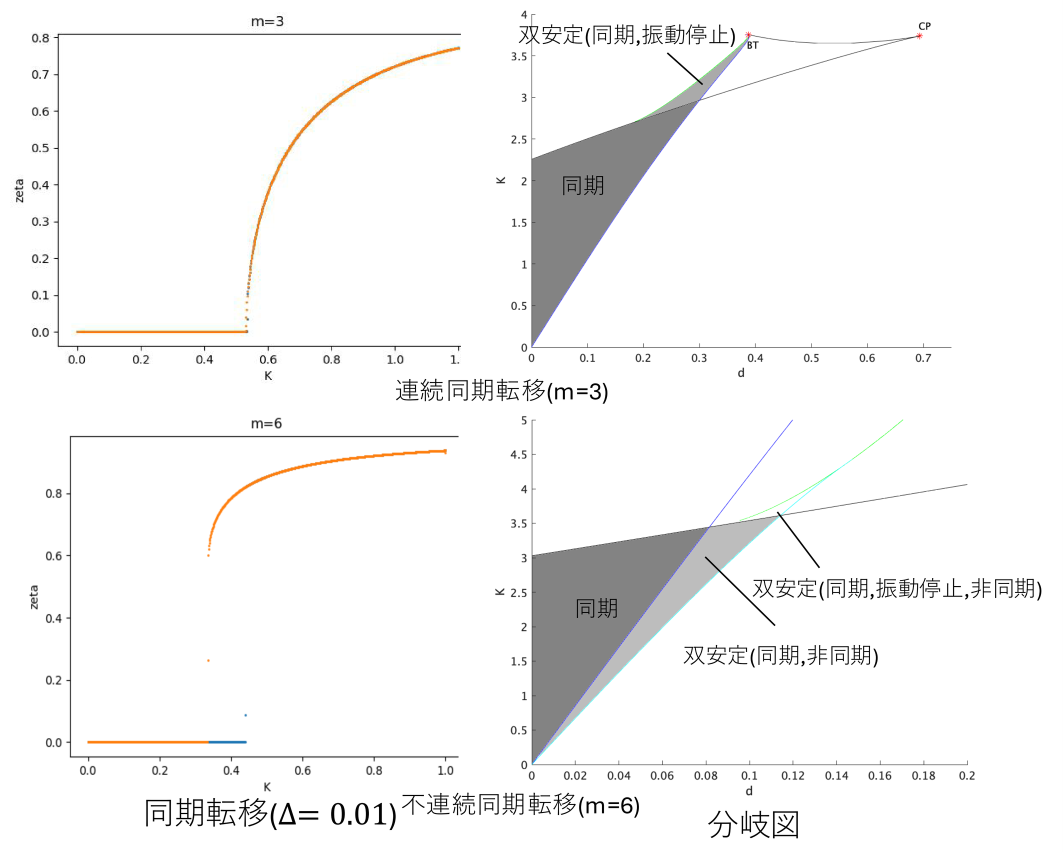
連続転移の場合(m=3)と不連続転移の場合(m=6)についてそれぞれKを増加させた時の秩序パラメタの変化と、2パラメータ追跡による分岐図を作成した。分岐図の作成にはMATCONTを用いた。

秩序パラメタの変化

- 非共鳴項を含むモデルであるため倉本篠本秩序パラメタ$\zeta = \langle A - \langle A\rangle\rangle$を用いている。
- 不連続同期転移では転移点周辺で同期状態と非同期状態の双安定性が見られる。

分岐図

- 不連続転移システムと連続転移システムは分岐構造に多くの違いを持つ(カスプ点の消失、ホップ分岐線の曲がる向きなど)
- 不連続転移システムには3つの状態からなる双安定領域が存在する



非線形ウィンフリーモデル

$Z(\phi_i)$ = - $\sin(\phi_i)$, $P(\phi) = 1 + \cos(\phi)$, $g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi((\omega-\omega_0)^2+\Delta^2)}$としてOA仮説を適用

①ヒル関数

$$\dot{A} = (i\omega_0 - \Delta)A + \frac{\beta}{2}(1 - A^2)\frac{h(A)^m}{K_0{}^m + h(A)^m}$$

ホップ分岐標準形は

$$\dot{A} = \left(-\Delta + \frac{\beta mK_0{}^m}{4(1+K_0{}^m)^2}\right)A + \frac{A|A|^2\beta mK_0{}^m}{32(1+K_0{}^m)^4}\left((K_0{}^{2m} - 4K_0{}^m + 1)m^2 - 3(K_0{}^m - 1)m - 6(1 + K_0{}^m)^2\right) + O(A|A|^4)$$

よって不連続転移する条件は

$$K_0 < (\frac{2m^2+6-m\sqrt{3m^2+45}}{m^2-3m-6})^{\frac{1}{m}}, K_0 > (\frac{2m^2+6+m\sqrt{3m^2+45}}{m^2-3m-6})^{\frac{1}{m}}$$

②ロジスティック関数

$$\dot{A} = (i\omega_0 - \Delta)A + \frac{\beta}{2}(1 - A^2)\frac{1}{1 + e^{-m(h(A)-h_0)}}$$

ホップ分岐標準形は

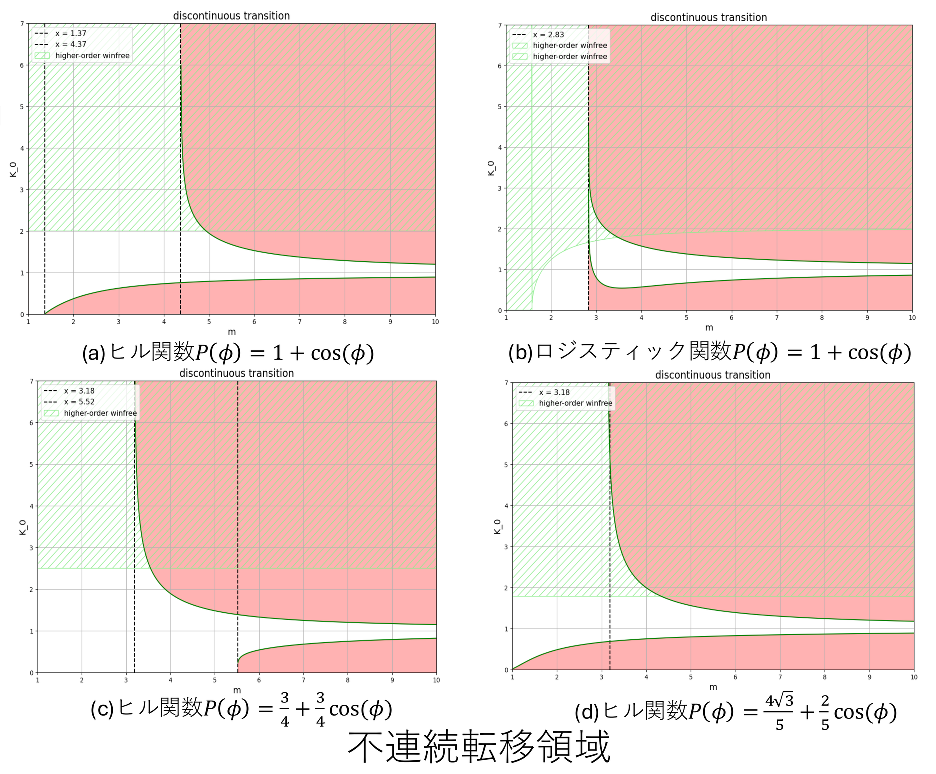
$$\dot{A} = \left(-\Delta + \frac{\beta me^{-m(1-h_0)}}{4(1+e^{-m(1-h_0)})^2}\right)A + \frac{A|A|^2\beta me^{-m(1-h_0)}}{32(1+e^{-m(1-h_0)})^4}\left((e^{-2m(1-h_0)} - 4e^{-m(1-h_0)} + 1)m^2 - 8(1 + e^{-m(1-h_0)})^2\right) + O(A|A|^4)$$

よって不連続転移する条件は

$$h_0 < \frac{\log(\frac{2m^2+8-m\sqrt{3m^2+48}}{m^2-8})}{m} + 1, h_0 > \frac{\log(\frac{2m^2+8+m\sqrt{3m^2+48}}{m^2-8})}{m} + 1$$

不連続転移領域

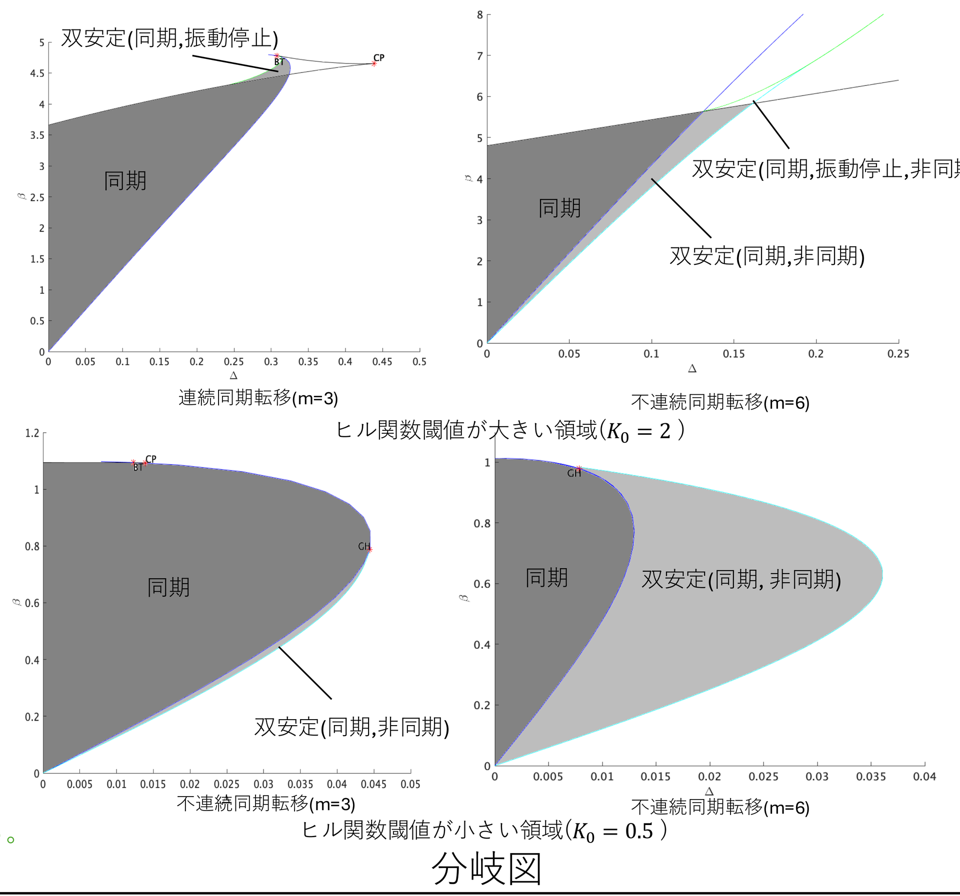
- ヒル関数、ロジスティック関数について不連続同期転移する領域を図示した(a)(b)。
- 不連続同期転移する領域は閾値が大きい領域と閾値が小さい領域の二つ領域に分かれる。
- ヒル関数では二つの領域が始まる協同性の値が異なるのに対しロジスティック関数では二つとも同一となる。
- ヒル関数についてシグナル$P(\phi)$を変えると、閾値が大きい領域でより小さい共同性に対し不連続転移が始まる場合(c)や閾値が十分小さければ協同が1以下であっても不連続転移が発生するような場合(d)が見つかった。



不連続転移領域

分岐図

- 閾値が大きい領域では高次ウィンフリーモデルの場合と大きな違いは現
- 閾値が小さい領域では高次ウィンフリーモデルとは大きく異なりサドル分岐による振動停止が発生する前にホップ分岐により非同期状態に至る
- 閾値が小さい領域ではこれまで観察されなかった広い双安定領域が現れる。



分岐図

結果($N = 3$)

$N = 3$高次ウィンフリーモデル

$$\dot{\phi_1} = 1 + a\Delta - K\sin\phi_1\frac{(2 + \cos\phi_2 + \cos\phi_3)^m}{4^{m-1}}$$

$$\dot{\phi_2} = 1 - K\sin\phi_2\frac{(2 + \cos\phi_2 + \cos\phi_3)^m}{4^{m-1}}$$

$$\dot{\phi_3} = 1 - \Delta - K\sin\phi_3\frac{(2 + \cos\phi_2 + \cos\phi_3)^m}{4^{m-1}}$$

(固有周波数は一様分布から選び、aは非対称性パラメータ。自己相互作用項と$\frac{1}{N}$は省略)

異なる(Δ, K)の値に対し数値計算を行い集団的挙動に基づいて分類(相図)

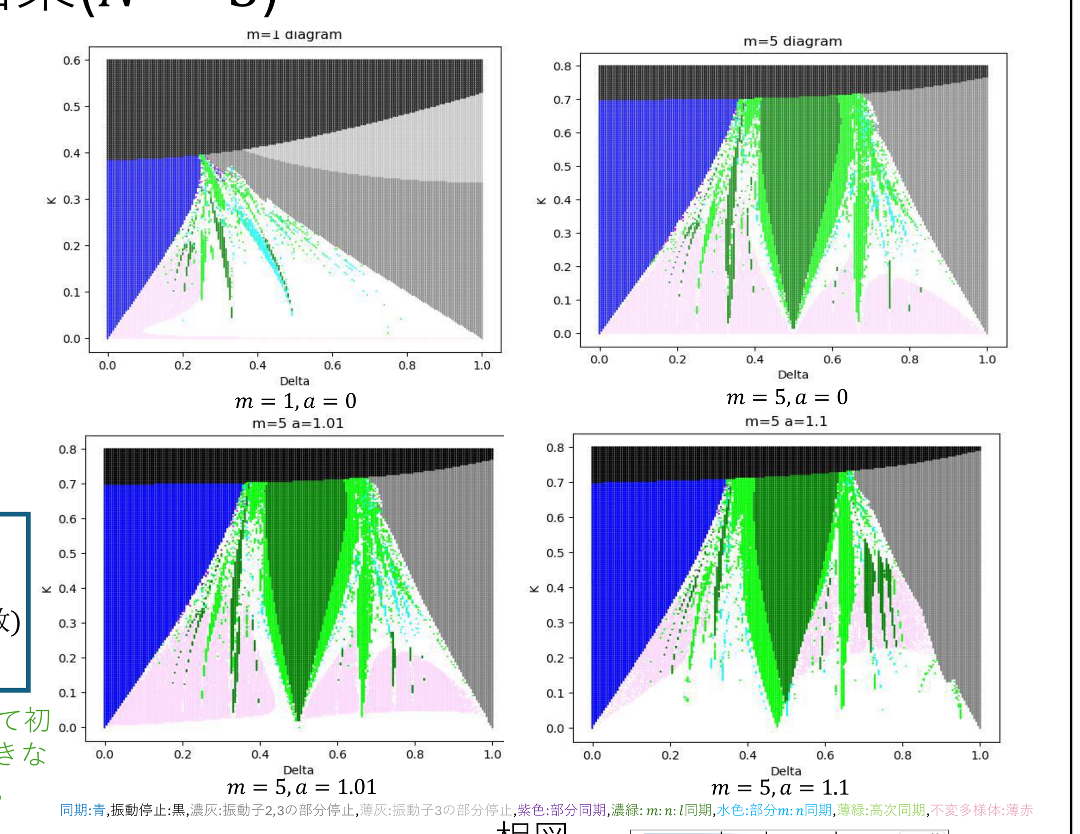
$m = 5$(高次相互作用)の場合のみ広い高次同期の領域が存在

高次同期

いかなる二つの振動子間にも有理数比の引き込みが存在しないが以下が成立

$$k_1\langle\dot{\theta_1}\rangle + k_2\langle\dot{\theta_2}\rangle + k_3\langle\dot{\theta_3}\rangle = 0 \quad (k_1, k_2, k_3\text{: 最大公約数1の整数})$$

高次同期は3個(以上)の振動子が単一の式を満たすことによって初めて成立し、いかなるに振動子間の関係に帰着することもできない。よって本質的に高次の相互作用を必要とする現象である。



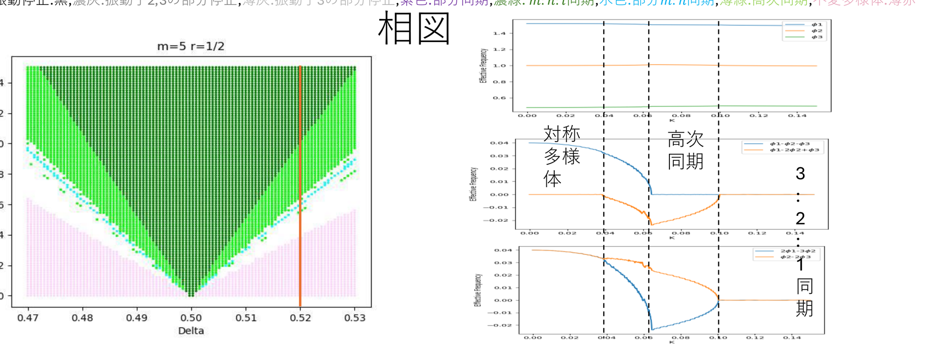
同期:青,振動停止:黒,濃灰:振動子2,3の部分停止,薄灰:振動子3の部分停止,紫色:部分同期,濃緑: $m:n:l$同期,水色:部分$m:n$同期,薄緑:高次同期,不変多様体:薄赤

相図

固有周波数分布の影響

- ここで$\langle\dot{\theta_1}\rangle - 2\langle\dot{\theta_2}\rangle + \langle\dot{\theta_3}\rangle = 0$ については注意が必要。これは固有周波数分布の対称性によって生じるものであり、通常のアーノルドの舌をなす高次同期とは異なる。よってこの場合を他と区別して対称多様体と呼ぶ。
- 非対称性の増加に伴いこの領域は$K = 0$を離れ全体として縮小する
- また非対称性により高次同期と$m:n:l$同期の位置関係が変化し高次同期領域が広くなる。

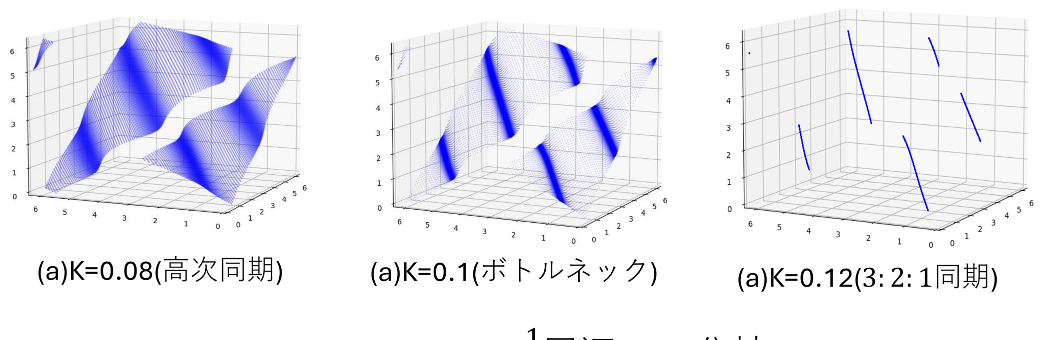
高次同期のアトラクターは$\mathbb{T}^3$トーラスの相空間上で$k_1\theta_1 + k_2\theta_2 + k_3\theta_3 = c$ (cは定数)で表される$\mathbb{T}^2$トーラス(a)(ただし非線形性により歪められている)



平均周波数の変化

$m = 5, \Delta = 0.52$でKを0から増加させた時の分岐

1. 最初は対称多様体の$\mathbb{T}^2$トーラス上を動くがトーラスのサドルノード分岐が逆向きに発生することで対称多様体が消滅し相空間全体を動くようになる
2. トーラスのサドルノード分岐により高次同期アトラクターが生じその上を動く。
3. 高次同期アトラクター上でリミットサイクルのサドルノード分岐が発生し3: 2: 1同期に対応するリミットサイクルが生じる。この際サドルノード分岐直前ではリミットサイクル解の周辺にボトルネックが見られる。またこのリミットサイクルは$m = 5, \Delta = \frac{1}{2}$で共鳴条件を満たす全ての高次同期$\mathbb{T}^2$トーラスの共通部分に現れる(対称多様体も含める)



(a)K=0.08(高次同期)　(a)K=0.1(ボトルネック)　(a)K=0.12(3: 2: 1同期)

$m = 5, \Delta = \frac{1}{2}$周辺での分岐

まとめ

1. 非線形インプットを持つ結合振動子に対して位相縮約とOtt-Antonsen仮説を用いることで、振動子集団を支配する低次元の巨視的なダイナミクスを導出した。
2. 非線形インプットを持つ振動子から自然な形で不連続同期転移する高次相互作用位相振動子が導出できることを示した。特に非線形インプットとしてヒル関数を選択すると高次相互作用の効果が強く現れることが分かった。
3. 同期転移の性質(連続or不連続) の変化を分岐として特徴付け、パラメータの条件を導出した。
4. 非線形インプットを持つ振動子からなる振動子集団では、広い双安定性をはじめとした従来の位相振動子モデルでは見られないような動的挙動を見せることを解明した。
5. 高次相互作用を特徴付ける現象として高次同期現象に着目し解析を行なった。

参考文献

[1] Iván León and Diego Pazó ,Phase reduction beyond the first order: The case of the mean-field complex Ginzburg-Landau equation,Phys. Rev. E **100**, 012211(2019)
[2] Gengel, Erik, et al. "High-order phase reduction for coupled oscillators." *Journal of Physics: Complexity* 2.1 (2020): 015005.
[3] Skardal, P.S., Arenas, A. Higher order interactions in complex networks of phase oscillators promote abrupt synchronization switching. *Commun Phys* **3**, 218 (2020).
[4] Millán, Ana P., Joaquín J. Torres, and Ginestra Bianconi. "Explosive higher-order Kuramoto dynamics on simplicial complexes." *Physical Review Letters* 124.21 (2020): 218301.
[5] What Are Higher-Order Networks?,Christian Bick, Elizabeth Gross, Heather A. Harrington, and Michael T. Schaub,SIAM Review 2023 65:3, 686-731
[6]蔵本由紀, 河村洋史. 同期現象の科学: 位相記述によるアプローチ. 京都大学学術出版会,2017.