

数論的D-加群による形式的冪級数環上の狭半安定スキームのp-進重みスペクトル系列

数理科学研究科 修士2年 劉元旻

この研究は**数論幾何学**と呼ばれる分野に属する。

「代数方程式が整数解を持つかどうか」を調べるために、素数 p で割った余りを調べるというアイデアが古くからある。

グラフの考え方を拡大し、代数方程式を幾何学的に捉えることで、数論的な情報と結びつけることが大まかな目標。

p-進コホモロジー

「コホモロジー」は代数多様体 X の重要な不変量の一つ。

代数多様体 X に対して、体 K 上の有限次元ベクトル空間を返す。位相幾何学における「ホモロジー」のようなものである。

数論幾何学では、今考えている素数 $p > 0$ と $K = \mathbb{Q}_\ell$ (ℓ -進体) の ℓ が異なるか、等しいかによって困難度が変わってくる。
($p = \ell$ の方が難しい)

p-進コホモロジーの基本的なアイデアは、代数多様体 X の「完備化」を取って、そこで de Rham コホモロジーを考えることである。

最も簡単な例である直線を考えよう。完備化は

$$\mathbb{Q}_p\langle X \rangle = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n X^n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \right\}$$

と考えるのが自然(単位円盤で収束する級数)。

これの de Rham complex を計算してみる:

$$\mathbb{Q}_p\langle X \rangle \xrightarrow{d} \mathbb{Q}_p\langle X \rangle dX$$

coker d は**無限次元**になってしまう。

これは $|p| = 1/p$ であることから、p のべき乗部分が収束半径に悪さをするのが原因である。

Monsky-Washnitzer のアイデア

収束半径を 1 より少し大きく取り、それを 1 に限りなく近づける。すなわち、 $\mathbb{Q}_p\langle X \rangle$ の代わりに「弱完備化」した

$$\mathbb{Q}_p\langle X \rangle^\dagger = \{ \sum_{n \geq 0} a_n X^n \mid \exists r > 1 (\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| r^n = 1) \}$$

を考えると、有限次元になる。

Monsky-Washnitzer のアイデアは**局所的**なものであり、代数多様体 X のコホモロジーという**大域的**な情報を得られるようにこの考え方を拡張しなければならない。

Berthelot は Monsky-Washnitzer のアイデアを幾何学的に整理することで、その拡張である**リジッドコホモロジー**を定義した。

リジッドコホモロジーは重要な p-進コホモロジーの一つである。

リジッドコホモロジーの問題点

リジッドコホモロジーの係数として自然に現れる**過収束 F-アイソクリスタル**だけでは「足りない」。例えば、引き戻しは定義できるが押し出しがうまく定義できない。

これは、 ℓ -進の場合で言うと局所定数層しか考えることができていないことに起因する。そのため、局所定数層を構成可能層に拡張したのと同じように、**過収束アイソクリスタル**を「**構成可能アイソクリスタル**」まで拡張して、圏を少し大きくしてやる必要がある。

数論的D-加群とは

過収束アイソクリスタルとは、本質的には微分方程式、すなわち、p-進解析空間上の平坦接続付きのベクトル束のことである。

複素数体上のときと同じように、D-加群と呼ばれる偏微分作用素を集めた環上の加群と圏同値になるはずである。

このように考えて、p-進完備な空間上に、代数的D-加群の類似物を作ったものが**数論的D-加群**である。

代数的D-加群との違いとして、フロベニウス構造でパラメータがべき乗されるため、収束半径が変わるという現象を捉えるために、 D^\dagger という弱完備な環を考えると都合が良い。しかし、この環は Banach-環にならない(LF という、Frechet 位相の極限位相が入る)ため、扱いが難しい。

Berthelot が数論的D-加群を80年代に考案してから、多くの数学者の努力によってp-進コホモロジーの係数理論として妥当であることが証明された。

重みスペクトル系列とは

完備離散付値 R 上の狭半安定スキーム X の閉ファイバーの既約成分を D_0, \dots, D_r とおき、これらの異なる m 個の共通部分で表されるもの全ての直和を $D^{(m)}$ とおく。一般ファイバーを X_η とおく。

このとき、次のような形の「重みスペクトル系列」が存在する:

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i \geq 0, -p} H^{q-2i}(D^{(p+2i)})(-i) \Rightarrow H^{p+q}(X_\eta)$$

先行研究

- Deligne, Steenbrink : mixed Hodge structure (標数 0 の場合)
- Rapoport-Zink : ℓ -進コホモロジーの場合
- Mokrane, Nakkajima : p-進コホモロジーの場合 (R が混標数、log crystalline, log de Rham-Witt コホモロジーなど)

研究の動機

- ℓ -進コホモロジーでできることは p-進コホモロジーでもできるはず (実際には技術的困難が多い)
- R が等標数の場合はまだ知られていない
- 数論的D-加群の応用例が少ない

修士論文の主定理

$R = k[[t]]$ が標数 $p > 0$ の完全体 k 上の形式的べき級数環であり、X が R 上の射影的狭半安定スキームであるとする。このとき以下の重みスペクトル系列が存在する:

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i \geq \max(0, -p)} H_D^{q-2i}(D^{(p+2i)}/K)(-i) \Rightarrow \Psi H_D^{p+q}(X_\eta/\mathcal{E}_K^\dagger).$$

K : 完備離散付値環で、剰余体が k となるもの

\mathcal{E}_K^\dagger : 有界 Robba 環

証明の方針

斎藤毅による ℓ -進の場合を真似る。

ℓ -進の場合は、 $R\psi \mathbb{Q}_\ell$ という nearby cycle と呼ばれる複体が (-d) シフトされた偏屈層になっており、そのモノドロミーフィルトレーションを考えることで得られる。

本修士論文でも同様の方針で nearby cycle Ψ を定義し、モノドロミーフィルトレーションを計算する。

↑ ℓ -進でできることは p-進でもできる!

今後の展望と課題

最終的には、 ℓ -進の場合の重みスペクトル系列と比較を行いたい。

そのためには

- 関手性
- 数論的D-加群で定義されたp-進コホモロジーの整備が必要である。

他にも、

- R が混標数の場合 (log 数論的D-加群の整備)
 - 数論的D-加群で定義されたp-進コホモロジーと、他のp-進コホモロジーの比較
- といった課題も残っている。

参考文献

- Daniel Caro. Arithmetic D-modules over Laurent series fields: absolute case, arXiv:2103.10362, (2021).
- Takeshi Saito. Weight spectral sequences and independence of ℓ , J. Inst. Math. Jussieu. 2, pp. 583–634, (2003).