箙Hecke環上の加群圏のアファイン最高ウェイト圏構造

村田遼人

東京大学大学院数理科学研究科

概要

箙Hecke環の加群圏が，アファイン最高ウェイト圏と呼ばれるホモロジカルに調べやすい構造を持っていることを示した．

まず，私の専門である**箙Hecke環の表現論**について説明する．対称化可能Kac-Moody代数$\mathfrak{g}$を固定する．これは，半単純Lie代数やアファインLie代数を含み，数学や物理のあらゆる分野で登場する対象である．また，$\mathbf{k}$を体とする．箙Hecke環は$\mathfrak{g}$(のルート系)のデータから定義される$\mathbf{k}$代数で，発見者の名前を冠してKhovanov-Lauda-Rouquier代数とも呼ばれる．箙Hecke環は$\mathfrak{g}$に由来する様々な理論の対称性を記述する上で重要な役割を担っている．詳しく言えば，2-Kac-Moody代数($\mathfrak{g}$の2-圏版)の2-射をコントロールする．また，アファインHecke環やp進群，対称群，量子アファイン代数など他の代数系との関連もある．
箙Hecke環を理解するために表現論を展開する．

表現論

- 箙Hecke環のもつ代数構造を，線型空間と線型写像で実現したものを箙Hecke環上の**加群**と呼ぶ．
- 表現論では加群圏の研究(加群そのものと加群同士の関係の研究)を通じて，箙Hecke環の代数構造に迫る．

さて，箙Hecke環は次のような特徴を持っている．

箙Hecke環の特徴

- 無限次元で，下に有界な次数つき環．
- 二つの加群M,Nから合成積$M\circ N$という新しい加群を作り出す操作があり，加群圏はモノイダル圏．

無限次元ではあるが次数が入っていることで取り扱いが容易になる．ここでは，加群も次数つきのもののみ考える．また合成積は重要な操作で，本研究の証明でも合成積に関連する技術を駆使している．
箙Hecke環の表現論において基本的なのは次の定理である．

量子群の圏化(Khovanov-Lauda)

$$K(H\text{-gmod}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}.$$

左辺は有限次元加群のなす圏のGrothendieck群であり，単純加群の同型類が$\mathbb{Z}$-基底をなす．右辺は量子群という$\mathfrak{g}$の普遍包絡環の1パラメータ変形である．この同型により，単純加群の情報は量子群からある程度読み取れる．しかし，**箙Hecke環上の加群は一般には半単純とは限らない**ためこれでは不十分で，次のことが問題になる．

問題

- 二つの加群の間の拡大がどのくらいあるか．
- 与えられた加群の構造，例えばどういったフィルトレーションを持つか，の決定．

つまり，**箙Hecke環上の加群に対するホモロジー代数**を考える必要がある．理論の枠組みとして，最高ウェイト圏というものがある．

最高ウェイト圏

ホモロジカルな性質を帰納的な議論で調べられる仕組み(stratification)を備えた圏．BGG圏$\mathcal{O}$が典型例．

最高ウェイト圏の無限次元次数つき版として，Kleshchevの導入した**アファイン最高ウェイト圏**がある．これらの枠組みでは，単純加群，射影加群に加えて**標準加群**と呼ばれる種類の加群が重要である．圏$\mathcal{O}$の場合，標準加群はVerma加群である．
さて，箙Hecke環に対するアファイン最高ウェイト圏構造については，$\mathfrak{g}$が有限型か対称アファイン型の場合には知られていた[Kat14, BKM14, McN17]．しかし，次のような問題点があった．

- 証明は一部で$\mathfrak{g}$の型に依存した計算が必要．
- 標準加群の明示的な代数的記述がない．

こうした事情から，先行研究の方法は一般の$\mathfrak{g}$には通用せず，全く異なるアプローチを取る必要があった．

アプローチ

- Kang，柏原，Kim，Oh，Parkらが導入したdeterminantial加群を用いて，**標準加群を具体的に構成**する．
- R行列と呼ばれる特別な準同型を調べることで，構成した標準加群の性質を明らかにする．

この方法により，私は**任意の$\mathfrak{g}$に対して結果を一般化**した．また，有限型や対称アファイン型の場合でも**標準加群の明示的記述は新しい**もので，今後より精密な研究を行うことが可能だと期待される．
結果を正確に述べるために，記号を用意する．まず$\mathfrak{g}$のルート系のデータからのインプットとして，Weyl群の元wと正ルート格子の元βをとる．主定理は，有限生成加群のなす圏のある重要なSerre部分圏$\mathcal{C}_w(\beta)$に関するものである．おおよそ，量子群の圏化定理を通じて$\mathcal{C}_w(\beta)$は$U_q(\mathfrak{n}_-\cap w\mathfrak{n}_+)$に対応する．$w$が長いほど圏$\mathcal{C}_w(\beta)$は大きい．例えば$\mathfrak{g}$が有限型で$w$が最長元ならば，$\beta$を動かすことで有限生成加群を全て含む．
以下の構成はwの最短表示$\underline{w}$の取り方に依存するので，それも固定しておく．まず，$\mathcal{C}_w(\beta)$の単純加群を次のようにラベルづけする(Tingley-Websterによる分類法)．

$\{\mathcal{C}_w(\beta)$の単純加群の同型類(次数のずれは無視)$\} = \{L(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{\underline{w}}(\beta)\}$.

ここで，$\Lambda_{\underline{w}}(\beta)$は$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}$の有限部分集合で，$\beta$のある種のKostant分割からなっている．そして，

- $P(\lambda)$: $L(\lambda)$の$\mathcal{C}_w(\beta)$における射影被覆，
- $\Delta(\lambda)$: 標準加群(具体的に構成)，
- $\leq$: $\Lambda_{\underline{w}}(\beta)$上の辞書式順序，
- $K(\lambda) = \sum_{\mu\in\Lambda_{\underline{w}}(\beta),\mu\not\leq\lambda, f\colon P(\mu)\to P(\lambda)} \operatorname{Im} f \subset P(\lambda)$,

とする．次が修士論文の主定理である．

主定理

$\mathcal{C}_w(\beta)$は辞書式順序$\leq$に関してアファイン最高ウェイト圏である．すなわち，各$\lambda\in\Lambda_{\underline{w}}(\beta)$に対して以下が成立する．

- $\Delta(\lambda) \simeq P(\lambda)/K(\lambda)$.
- $K(\lambda)$の有限なフィルトレーションであって，その逐次商が全て$\Delta(\mu)$ $(\mu\in\Lambda_{\underline{w}}(\beta), \mu>\lambda)$の形であるものが存在する．
- $\operatorname{End}_R(\Delta(\lambda)) \simeq \mathbf{k}[z_1,\dots,z_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell(w)}}]$.

辞書式順序$\leq$に従って帰納的に多項式環に帰着できる，という感じである．例えば，多項式環の大域次元が有限であることから，次を得る．

系

$\mathcal{C}_w(\beta)$の大域次元は有限である．

今後は，次のようなテーマで研究を進めていきたい．

展望

- $\mathcal{C}_w(\beta)$の外側の研究．
- 量子群への組紐群作用を，箙Hecke環の加群圏に持ち上げる．

- Jonathan Brundan, Alexander Kleshchev, and Peter J. McNamara, *Homological properties of finite-type Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 7, 1353–1404. MR 3205728
- Syu Kato, *Poincaré-Birkhoff-Witt bases and Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 3, 619–663. MR 3165425
- Peter J. McNamara, *Representations of Khovanov-Lauda-Rouquier algebras III: symmetric affine type*, Math. Z. **287** (2017), no. 1-2, 243–286. MR 3694676