

いくつかの随伴型単純群の深度0超尖点表現に関する局所Langlands対応

藤井天守

東京大学数理科学研究科

定義（enhanced Lパラメータ）

F ：非アルキメデス局所体， G ： F 上の連結簡約群． G の**enhanced Lパラメータ** (φ, ϵ) とは、

- G のLパラメータ $\varphi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^{\mathrm{L}}G := \widehat{G} \rtimes W_F$
- 既約表現 $\epsilon \in \mathrm{Irr}(\pi_0 Z_{\widehat{G}}(\varphi))$ のうち適当なもの

の組である．Lパラメータおよびenhanced Lパラメータの共役類のなす集合をそれぞれ $\Phi(G)$, $\Phi_e(G)$ と書く．

厳密には、上の定義は G が準分裂群の純内部形式の構造を持つ場合にのみ適用できる．より一般の場合には $Z_{\widehat{G}}(\varphi)$ を少し修正しなければならない．

予想（局所Langlands対応）

以下の全単射が存在し、様々な条件を満たす：

$$\mathrm{Irr}(G(F)) \xleftarrow{1:1} \Phi_e(G).$$

局所Langlands対応は GL_n をはじめとしていくつかの具体的な G には構成できているが、一般の場合（特に例外群の場合）は未解決である．

例（ GL_n の局所Langlands対応）

$G = \mathrm{GL}_n$ のとき、任意のLパラメータのenhancementは自明なものしかなくなる．また、Lパラメータを与えることは（半単純な）連続準同型 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を与えることと等価になる．つまり、 GL_n の局所Langlands対応とは、 $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現が F のGalois群の変種 n 次元表現と対応することを意味する．

局所Langlands対応の満たすべき性質の一つとして、平賀・市野・池田による形式次数に関する予想を説明する．以下、簡単のため $Z(G)^\circ$ はanisotropicであるとする． $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}(G(F))$ を**本質的二乗可積分表現**とすると、 $G(F)$ のHaar測度に応じて**形式次数**と呼ばれる正実数 $\mathrm{fdeg}(\pi) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が定まる．今、指標 $\psi\colon F \rightarrow \mathbb{C}^\times$ で $\mathcal{O}_F$ 上自明、 $\mathfrak{p}_F^{-1}$ 上非自明なものを固定すると、これによってHaar測度が一つ定まる．したがって π の形式次数も定まる．

予想 ([HI08])

局所Langlands対応によって $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ が $\mathfrak{s}(\varphi, \epsilon) \in \Phi_e(G)$ に対応するとき、

$$\mathrm{fdeg}(\pi) = \frac{\dim(\epsilon)}{|\pi_0 Z_{\widehat{G}}(\varphi)|} \cdot |\gamma(0, \varphi, \mathrm{Ad}, \psi)|$$

が成り立つ．ただし $\gamma(s, \varphi, \mathrm{Ad}, \psi)$ は φ のadjoint γ -factor.

次に、 $G(F)$ の既約表現（およびenhanced Lパラメータ）の中でも特別なクラスを2つ説明する．

定義（深度）

- (π, V) ： $G(F)$ の既約表現が**深度0**であるとは、あるパラホリック部分群 $K \subset G(F)$ が存在して、 $V^{K_+} \neq 0$ となること．
- φ ：Lパラメータが**深度0**であるとは、 $\varphi|_{P_F}$ が自明であること．このとき、enhanced Lパラメータ (φ, ϵ) も深度0であるという．

ここで、パラホリック部分群 $K \subset G(F)$ とは G の**Bruhat–Tits building**のfacetから定まるコンパクト開部分群である． K はpro- p な正規開部分群 K_+ を備え、 K/K_+ は k 上のある連結簡約群 $\mathbb{G}$ の有理点のなす群と同型になる（ k は F の剰余体）．

定義（尖点性）

- (π, V) ： $G(F)$ の既約表現が**超尖点表現**であるとは、任意の放物部分群 $P = LN \subsetneq G$ に対してcoinvariant $V_{N(F)}$ が0になること．
- (φ, ϵ) ：enhanced Lパラメータが**尖点的**であることは、 $Z_{\widehat{G}}(\varphi|_{W_F})$ の一般Springer対応の理論を用いて定義できる ([AMS18]).

注意

超尖点表現は本質的二乗可積分である．したがって形式次数が定まる．

深度0であることや（超）尖点的であることは、局所Langlands対応で保存されると期待されている．

以下、

- $\mathrm{Irr}(G(F))_{0,c} \subset \mathrm{Irr}(G(F))$ ：深度0超尖点表現からなる部分集合
- $\Phi_e(G)_{0,c} \subset \Phi_e(G)$ ：深度0尖点的enhanced Lパラメータからなる部分集合とする．

主結果

G ： F^{ur} 上分裂する随伴型単純群．このとき全射

$$\mathrm{LLC}\colon \Phi_e(G)_{0,c} \rightarrow \mathrm{Irr}(G(F))_{0,c}$$

が存在する．さらに、以下のいずれかを満たすとする：

- G の型が A_n, E_6, E_8, F_4, G_2 のいずれか．
- G は C_n または E_7 型で F 上分裂する．
- $\mathrm{char}(k) > 2$ で、さらに G は B_n または D_{2n+1} 型で F 上分裂する．

このとき、写像LLCは全単射であり、平賀・市野・池田の予想を満たす．

注意

写像LLCの構成はいくつかの非標準的なchoiceに依存している．

深度0超尖点表現よりも狭いクラスでは、より一般の G について次の結果がある：

- [DR09]：深度0正則超尖点表現（ $\leftrightarrow \varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ が自明）
- [FOS20]：冪単超尖点表現（ $\leftrightarrow \varphi|_{I_F}$ が自明（Lパラメータが**不分岐**））

主結果におけるLLCには注意の通りの任意性があるが、これらのクラスに制限すれば[DR09], [FOS20]で得られた対応と一致する．

以下、証明のアイデアを述べる．以下の定理が重要である：

定理 ([Lus84])

$\mathbb{G}$ を有限体 k 上の連結簡約群とし、 $\widehat{\mathbb{G}}$ をその（ k 上の）双対群とする．このとき、分割

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{G}(k)) = \coprod_{[s]} \mathrm{Irr}(\mathbb{G}(k))_s$$

がある．ここで $[s]$ は $\widehat{\mathbb{G}}(k)$ の半単純元の共役類を走る．さらに、全単射

$$J\colon \mathrm{Irr}(\mathbb{G}(k))_s \rightarrow \mathrm{Irr}(Z_{\widehat{\mathbb{G}}}(s)(k))_1$$

が存在する（既約指標のJordan分解）．

定義（冪単表現）

k 上の簡約群 $\mathbb{G}$ に対して、 $\mathrm{Irr}(\mathbb{G}(k))_1$ に属する既約表現を**冪単表現**と呼ぶ．

$\varphi \in \Phi(G)$ を深度0の（離散的な）Lパラメータとする．このとき、 F 上の連結簡約群 H （の内部形式たち）が $\widehat{H} = Z_{\widehat{G}}(\varphi|_{I_F})$ によって定まり、不分岐なLパラメータ $\varphi_H \in \Phi(H)$ が取れる．さらに、 φ, φ_H の尖点的なenhancementは一対一に対応する．

一方、 H と G のBruhat–Tits buildingの一部を関係づけることで、これらのパラホリック部分群を対応させることができる． $G(F)$ のパラホリック部分群 K が $H(F)$ のパラホリック部分群 K_H に対応するとし、 $\mathbb{G}(k) = K/K_+$ および $\mathbb{H}(k) = K_H/K_{H_+}$ とおく．すると、 φ から $\mathrm{Irr}(\mathbb{G}(k))_s \subset \mathrm{Irr}(\mathbb{G}(k))$ が定まり、 $\mathbb{H} = Z_{\widehat{\mathbb{G}}}(s)^\circ$ となる．したがって、既約指標のJordan分解によって $\mathrm{Irr}(\mathbb{G}(k))_s$ と $\mathrm{Irr}(\mathbb{H}(k))_1$ が（おおむね）対応する．この対応を K, K_H の正規化群の既約表現の対応にうまく延長すると、 $G(F)$ の深度0超尖点表現の一部が $H(F)$ の冪単超尖点表現と対応することがわかる．この延長の議論は、 G の具体的な構造に応じてcase by caseで考える必要がある． H に[FOS20]の結果を適用すれば、冪単超尖点表現と不分岐な尖点的enhanced Lパラメータが対応するから、これを経由して G の深度0超尖点表現と深度0尖点的enhanced Lパラメータの対応が構成される．この構成を辿ると、既約指標のJordan分解の性質の一つが平賀・市野・池田の予想を導くこともわかる．

▣ A.-M. Aubert, A. Moussaoui, and M. Solleveld, *Generalizations of the Springer correspondence and cuspidal Langlands parameters*, Manuscripta Math. **157** (2018), no. 1-2, 121–192.

▣ S. DeBacker and M. Reeder, *Depth-zero supercuspidal L -packets and their stability*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 795–901.

▣ Y. Feng, E. Opdam, and M. Solleveld, *Supercuspidal unipotent representations: L -packets and formal degrees*, J. Éc. polytech. Math. **7** (2020), 1133–1193.

▣ K. Hiraga, A. Ichino, and T. Ikeda, *Formal degrees and adjoint γ -factors*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 1, 283–304.

▣ G. Lusztig, *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Mathematics Studies, vol. 107, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.