

体拡大を伴う商特異点のCohen-Macaulay表現

朝永 龍

東京大学大学院数理科学研究科

2025/02/10

R : 完備Cohen-Macaulay局所環

CM R : 極大Cohen-Macaulay R 加群からなる圏

例

$$R = k[[t]]$$

$\leadsto$ CM $R = \text{proj } R$ (有限生成射影加群のなす圏)

$$R = k[t]/(t^n)$$

$\leadsto$ CM $R = \text{mod } R$ (有限生成加群のなす圏)

Cohen-Macaulay表現論とは、このようなCM R の圏構造を調べる分野のことである。

定理 (Krull-Schmidt)

任意の $M \in \text{CM } R$ は、直既約な $M_1, \dots, M_n \in \text{CM } R$ を用いて

$$M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_n$$

の形に一意的に表せる。

この定理より、CM R の圏構造を知るためには、直既約な $M \in \text{CM } R$ にのみ着目すれば十分だとわかる。

定義 (有限CM型)

$\text{ind}(\text{CM } R) := \{M \in \text{CM } R: \text{直既約}\} / \cong$ とおく。 $\text{ind}(\text{CM } R)$ が有限集合のとき、 R は有限CM型であるという。

例

$$R = k[[t]]$$

$\leadsto \text{ind}(\text{CM } R) = \{R\}$

$\leadsto R$: 有限CM型

$$R = k[t]/(t^n)$$

$\leadsto \text{ind}(\text{CM } R) = \{k[t]/(t), k[t]/(t^2), \dots, k[t]/(t^n)\}$

$\leadsto R$: 有限CM型

定義 (Auslander-Reiten 簾)

圏CM R のAR簾AR(CM R)とは、次のような有向グラフのことである。

頂点: $\text{ind}(\text{CM } R)$

矢: 既約写像(=非自明な分解を持たない準同型)

CM R の圏構造は、AR簾によって視覚的に表せる！

例

$$R = k[[t]]$$

$\leadsto \text{AR}(\text{CM } R)$:

$$R \rightrightarrows t$$

$$R = k[t]/(t^n)$$

$\leadsto \text{AR}(\text{CM } R)$:

$$k[t]/(t) \xrightarrow{\frac{t}{1}} k[t]/(t^2) \xrightarrow{\frac{t}{1}} \dots \xrightarrow{\frac{t}{1}} k[t]/(t^{n-1}) \xrightarrow{\frac{t}{1}} k[t]/(t^n)$$

Problem

① 有限CM型であるような R を分類せよ。

② そのような R に対し、AR(CM R) を描け。

以下、 $\dim R = 2$ である R に対しこの問題を考える。

R の剰余体が代数閉ならば、次の分類結果が古典的に知られている。

定理 ([Auslander][Esnault])

k を標数0の代数閉体とし、 $(R, \mathfrak{m}, k)$ を2次元の完備Cohen-Macaulay局所環とする。

R が有限CM型であることは、ある有限部分群 $G \subseteq GL_2(k)$ が存在して $R \cong k[[x, y]]^G$ が成り立つことと同値である。

ここで $G \subseteq GL_2(k)$ は、small(pseudo-reflectionを単位行列以外含まない) となるようにとれる。

本論文では、この結果を、剰余体が代数閉ではない状況へ拡張した。

定理 ([T])

k を標数0の体とし、 $(R, \mathfrak{m}, k)$ を2次元の完備Cohen-Macaulay局所環とする。

R が有限CM型であることは、ある有限次Galois拡大 I/k とある有限部分群 $G \subseteq GL_2(I) \rtimes \text{Gal}(I/k)$ が存在して $R \cong I[[x, y]]^G$ が成り立つことと同値である。

ここで G は、 $H := G \cap GL_2(I) \subseteq GL_2(I)$ がsmallとなるようにとれる。

以下、この定理中の S^G に対し、CM表現を考える。もし古典的な状況、すなわち $G \subseteq GL_2(I)$ ならば、AR(CM S^G) は群環 IG のMcKay簾に一致することが知られている(代数的McKay対応)。本論文では、この代数的McKay対応を体拡大を含む設定へ拡張した。

定理 ([T])

① 直既約CM S^G 加群は、ねじれ群環 $I * G$ の既約表現と1:1に対応する。

② AR(CM S^G) は、 $I * G$ のMcKay簾に一致する。

ここでねじれ群環 $I * G$ とは、群 G が係数体 I に作用する状況への群環の一般化であり、その表現は次の表示を持つ。

$$\{I * G \text{ 加群}\} = \{(V, G \curvearrowright V) \mid V: I \text{線型空間}, g(\lambda v) = g(\lambda)g(v)\}$$

また、McKay簾とは、既約表現を頂点に持ち、表現の情報から定まる矢を持つ簾である。

本論文では、ねじれ群環 $I * G$ の表現の決定を、群環 IH のそれに帰着させた。

定理 ([T])

① $\text{Gal}(I/k)$ は、 IH の既約表現の同型類のなす集合に作用する。その軌道全体は、 $I * G$ の既約表現の同型類と1:1に対応する。

② $\text{Gal}(I/k)$ は、 H のMcKay簾(= AR(CM S^H)) に作用する。この作用による商は、 G のMcKay簾(= AR(CM S^G)) と一致する。

例

$$G := \left\langle \left(\begin{bmatrix} \zeta_{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-1} \end{bmatrix}, \text{id} \right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \overline{(-)} \right) \right\rangle \subseteq GL_2(\mathbb{C}) \rtimes \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$$

$$\leadsto H := G \cap GL_2(\mathbb{C}) = \left\langle \begin{bmatrix} \zeta_{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle$$

H のMcKay簾:

$$\begin{array}{c} W_0 \begin{array}{c} \nearrow W_1 = \dots = W_{n-1} \\ \searrow W_{-1} = \dots = W_{-n+1} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow W_n \\ \searrow W_n \end{array} \end{array}$$

$\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ は H のMcKay簾に、上下を入れ替えることで作用する。

$\leadsto G$ のMcKay簾:

$$V_{0 \atop (1,2)}^{(2,1)} V_{\pm 1} = \dots = V_{\pm(n-1) \atop (2,1)}^{(1,2)} V_n$$

矢印の上に乗っている $(2, 1)$ などはvaluationと呼ばれ、AR簾を構成する重要な要素である。