

Spin-Sp(4), Spin-SU(8), Spin-Spin(16)同境群の計算

黒田直樹

東京大学数理学研究科

本研究では3つのSpin-G同境群を7次元までの範囲で計算し、それらの生成元を多様体を用いて明示的に与えた。まず、関連する用語について説明する。以下、多様体は全て C^∞ 級であるとする。

同境群

ある決まった構造を持つ n 次元閉多様体の集合を、同境と呼ばれる同値関係で割って得られる $\mathbb{Z}$ 加群を、同境群と呼ぶ。

- ▶ n 次元閉多様体 M と N が同境であるとは、 $n+1$ 次元コンパクト多様体 X が存在して、 $\partial X \cong M \amalg N$ となることである。
- ▶ 和構造は非交和で与えられる。

Spin-G同境群

リー群の二重被覆 $G \twoheadrightarrow H$ があったとき、 $\text{Spin}(n) \times_{\{\pm 1\}} G \twoheadrightarrow \text{SO}(n) \times H \rightarrow \text{SO}(n) \rightarrow O(n)$ というリー群の準同型から得られる
 $f : B(\text{Spin}(n) \times_{\{\pm 1\}} G) \rightarrow BO(n)$
を考える。 n 次元閉多様体 M に対して接束 TM の分類写像 $M \rightarrow BO(n)$ の f によるliftをSpin-G構造、この構造を課して得られる同境群をSpin-G同境群と呼び、 $\Omega_n^{\text{Spin-G}}$ と表す。

対称性 G を持つ物理理論がanomalyを持つかをSpin-G同境群で調べられる[1][2]という背景のもと、本研究では超重力理論の対称性として現れる $(G, H) = (\text{Sp}(4), \text{Sp}(4)/\{\pm I\}), (\text{SU}(8), \text{SU}(8)/\{\pm I\}), (\text{Spin}(16), \text{SemiSpin}(16))$ に対してSpin-G同境群を計算した。

Pontjagin-Thom構成

Spin-G同境群 $\Omega_n^{\text{Spin-G}}$ は、対応するMadsen-Tillmann spectrum $MT(\text{Spin-G})$ の n 次ホモトピー群と同型であることが知られている (Pontjagin-Thom構成)。

$$\pi_n(MT(\text{Spin-G})) \cong \Omega_n^{\text{Spin-G}}$$

これによりSpin-G同境群はホモトピー群の計算に帰着され、Adams spectral sequenceを用いて計算することが出来る。

このAdams spectral sequenceの E_2 項を作成するのに $H^*(BH; \mathbb{Z}_2)$ への Sq^1, Sq^2 の作用の情報が必要である。特に $H^*(B(\text{Sp}(4)/\{\pm I\}); \mathbb{Z}_2)$ の4次の生成元 y_4 の Sq^2 による行き先の決定が難しかったが、 $(\text{Sp}(2) \times \text{Sp}(2))/\{\pm(I, I)\} \hookrightarrow \text{Sp}(4)/\{\pm I\}$ と $\text{Sp}(2)/\{\pm I\} \cong \text{SO}(5)$ を用いてよく知るケースに帰着させる事で、計算することが出来た。

主結果

n	$\Omega_n^{\text{Spin-Sp}(4)}$	$\Omega_n^{\text{Spin-SU}(8)}$	$\Omega_n^{\text{Spin-Spin}(16)}$
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
5	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
6	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
7	0	0	0

各元の多様体を用いた表示については、特性類により与えられる $\mathbb{Z}$ 加群準同型を用いて求めた。例として $\Omega_6^{\text{Spin-SU}(8)} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ について具体的に説明する。まず、 $x_2 \in H^2(B(\text{SU}(8)/\{\pm I\}); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, $y_4 \in H^4(B(\text{SU}(8)/\{\pm I\}); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $z_6 \in H^6(B(\text{SU}(8)/\{\pm I\}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ をうまく取る。Spin-SU(8)構造を持つ6次元閉多様体 M に対して $f_M : M \rightarrow B(\text{SU}(8)/\{\pm I\})$ が自然に定まるが、これを用いて

$$M \mapsto \left(\frac{1}{2} \int_M f_M^* z_6, \int_M f_M^*(x_2 y_4) \right)$$

で $\Omega_6^{\text{Spin-SU}(8)}$ から $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ への $\mathbb{Z}$ 加群準同型を構成することが出来る。

$\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^1, \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ にうまく

Spin-SU(8)構造を入れ、この準同型でそれぞれ $(0, 1), (1, 0)$ に写るように出来る。 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ の自己全射は自動的に自己同型となることから、これにより上で与えた2つの多様体が $\Omega_6^{\text{Spin-SU}(8)}$ の生成元を与えることが分かる。

■ Arun Debray, and Matthew Yu

What Bordism-Theoretic Anomaly Cancellation Can Do for U, 2024.

■ Arun Debray, Markus Dierigl, Jonathan J. Heckman, and Miguel Montero

The Chronicles of IIBordia: Dualities, Bordisms, and the Swampland, 2023.