

# 積分形誘電率テンソルを用いた有限要素法における低域混成波の全波計算

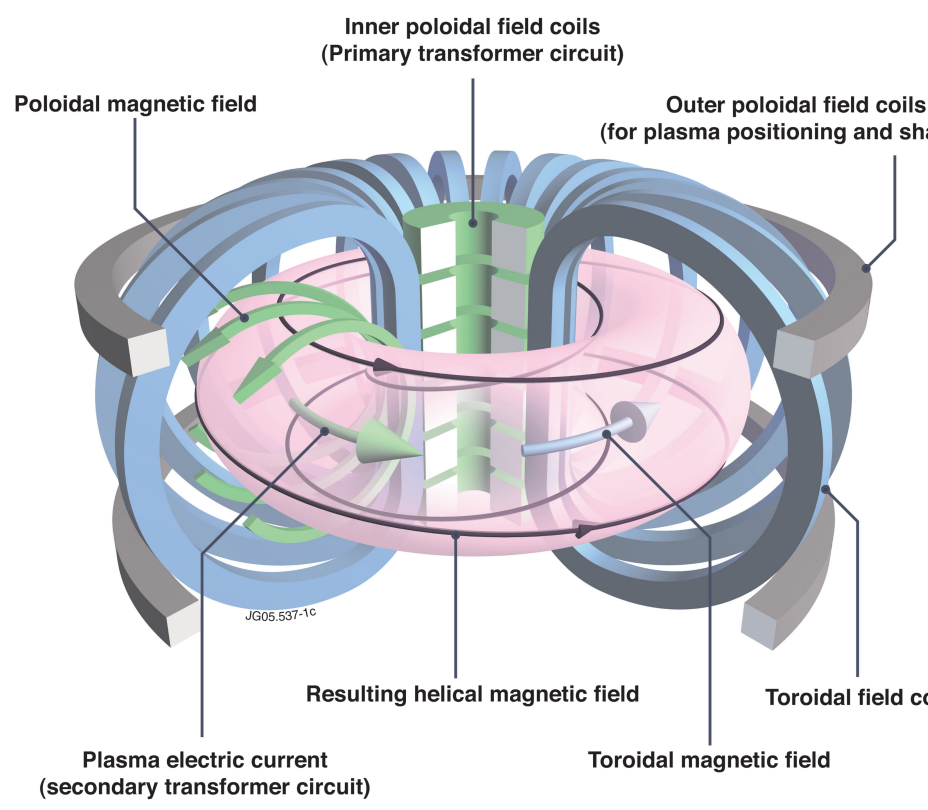
安立史弥

東京大学大学院新領域創成科学研究科

## 概要

- TST-2球状トカマクでは低域混成波 (Lower-hybrid wave, LH波) によるプラズマ立ち上げを研究している
- LH波の定量的な波動シミュレーションでは全波計算が有用である
- 有限要素法を用いた全波計算に反復計算によって熱いプラズマの寄与を実装した

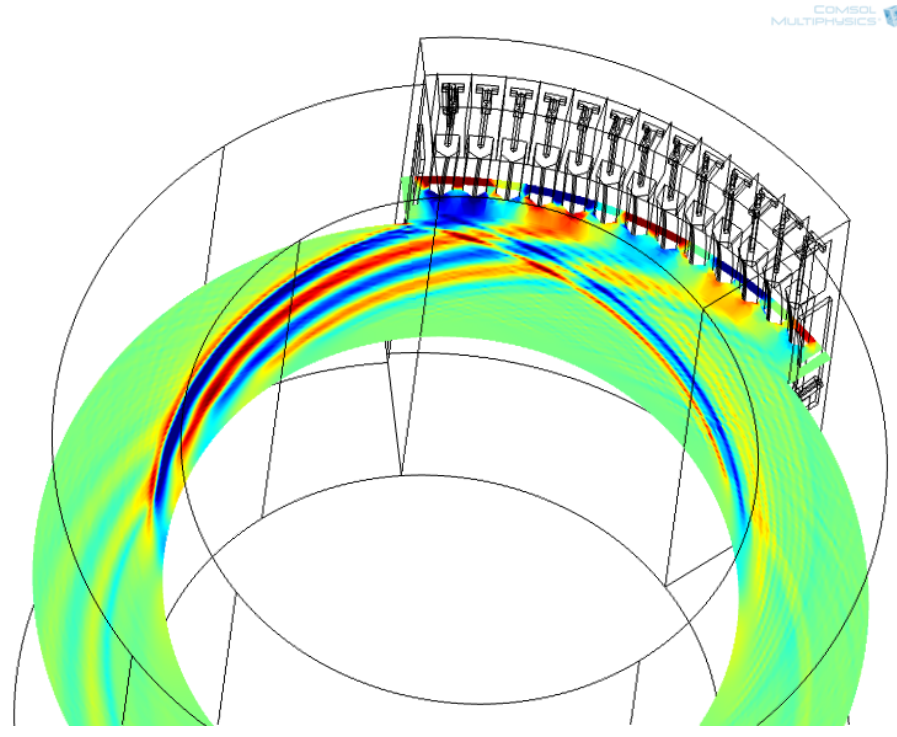
トカマク型核融合炉ではプラズマ電流駆動が必須である



- コイルでトロイダル磁場を生成する
- プラズマ電流でポロイダル磁場を生成する  
→ 螺旋状磁場でプラズマを閉じ込める
- 電流駆動手法として電磁波の利用が考えられる

\*S. Li et al., Abstract and applied analysis 2014, 940965

低域混成波によって定常的な電流駆動が行える



- 磁化プラズマ中にのみ存在する
- 電流駆動効率が高い
- ランダウ減衰によって電子を磁力線方向に加速する  
→ 波の位相速度と等しい速度の電子と相互作用

電流駆動予測に効率的な全波計算手法が必要である

- 光線追跡法は簡便な波の伝播・吸収解析手法
  - × 低密度カットオフのためにLH波では励起スペクトルに仮定が必要  
→ 不正確で、電流駆動予測に影響
- 従来の全波計算はスペクトル法を利用\*
  - 非局所的な熱いプラズマ誘電率の実装が単純
  - × 複雑な形状の取り扱いが非効率
- 本研究は有限要素法を利用
  - 複雑な形状の効率的な記述  
→ アンテナ周辺と炉心プラズマの統一した取り扱い
  - △ 熱いプラズマモデルの実装が単純でない

\* E. Jaeger et al., Phys. Plasmas 8, 1573 (2001)

誘電率/伝導度が波の伝播・吸収を決める

通常、線形なプラズマの応答を仮定:

$$\mathbf{j} = \int d\mathbf{r}' \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')$$

周波数解析  $\mathbf{E} \propto e^{i\omega t}$  における波動方程式:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} &= -i\omega\mu_0 \mathbf{j}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

ここで

$$\mathbf{K} = \mathbf{1} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{\epsilon_0\omega}$$

K: プラズマ誘電率  
σ: プラズマ伝導度

- 誘電率・伝導度は一般に積分演算子  
→ 非局所的
- スペクトル法では局所的な一様性を仮定して一様プラズマに対する誘電率を使用:  
 $\mathbf{K}(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$
- 誘電率は各波数成分に対しては代数的:  
 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$   
→ スペクトル法では熱いプラズマの実装が単純

伝導度の例

運動論を導入した伝導度:

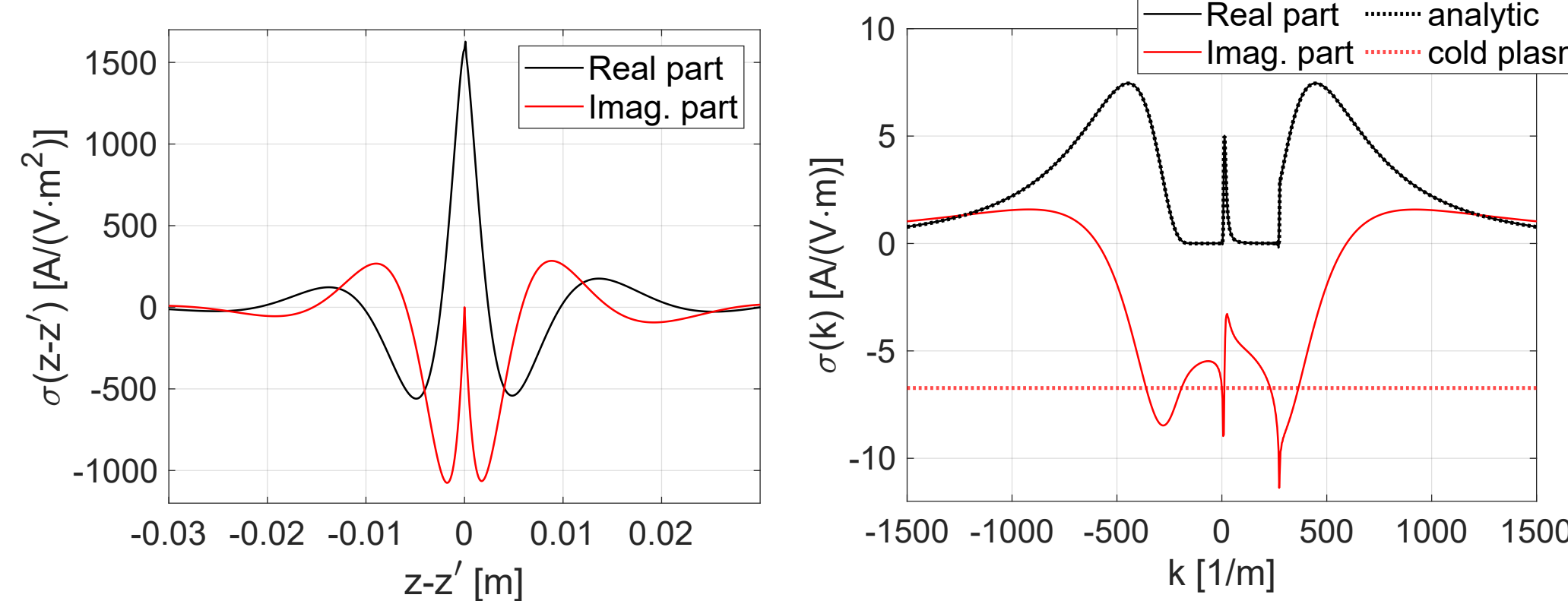
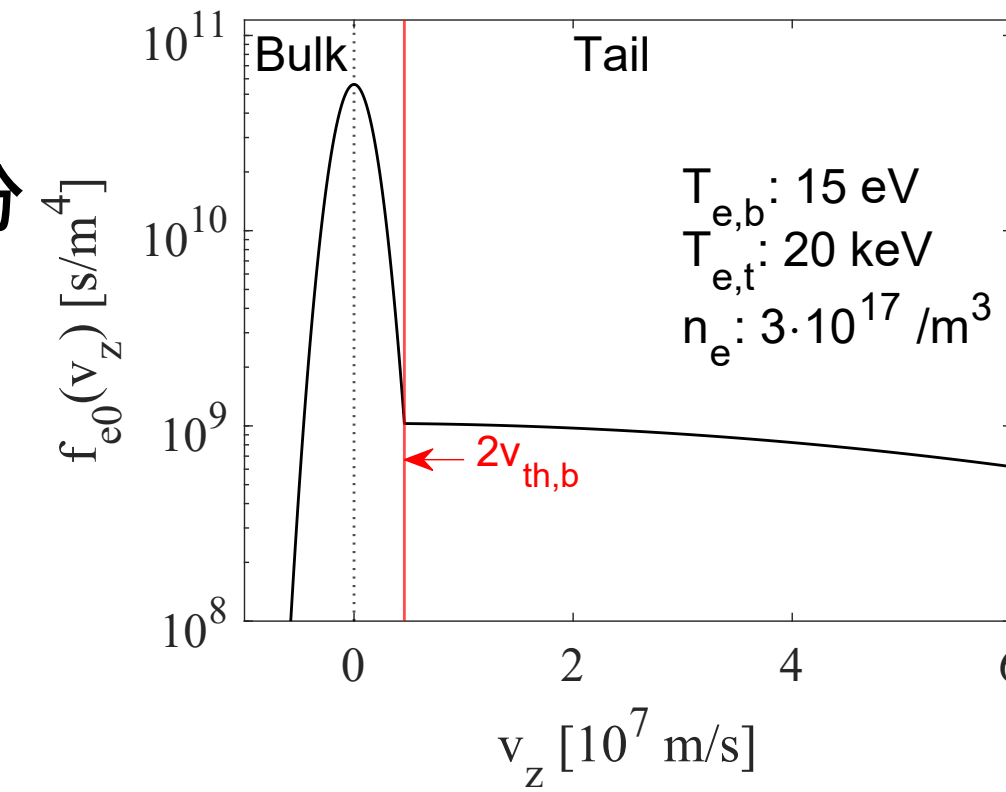
$$\sigma_{\text{hot},s}(z-z') = -\frac{q_s^2}{m_s} \int_0^\infty d\tau \frac{z-z'}{\tau^2} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \left( z, \frac{z-z'}{\tau} \right) e^{i\omega\tau}$$

伝導度の表式:

$$\tau = \frac{z-z'}{v_z} > 0 \text{ で分布を積分}$$

→ 分布の非対称性を反映

- 実部がランダウ減衰に対応
- 虚部は冷たいプラズマを補正



電子の運動論効果を磁力線方向に導入した伝導度を数値計算に用いた

磁力線垂直方向には運動論を考慮しない:

$$\mathbf{K}_{\text{cold},\perp} = \begin{pmatrix} S & iD & 0 \\ -iD & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

磁力線方向には電子ランダウ減衰を導入:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{hot},\parallel} &= \hat{z} \hat{z} (P + \chi_{\text{hot},e}) \\ \chi_{\text{ELD}} &= \frac{i\sigma_{\text{ELD}}}{\epsilon_0\omega} \\ \sigma_{\text{ELD}} &= \Re\sigma_{\text{hot},e} \end{aligned}$$

- S, D, Pはプラズマの密度と磁場に依存した局所的な量

反復計算を用いて熱いプラズマの寄与を導入した

解くべき波動方程式は微分・積分方程式:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \int d\mathbf{r}' \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')$$

汎用有限要素法ソルバーCOMSOL Multiphysics\*は局所的な誘電率に対して波動方程式を解ける:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} = 0$$

⇒ 非局所的な成分は反復計算を用いて導入

$$\begin{cases} \mathbf{j}_{\text{NL}} = \hat{z} \int dz' \sigma_{\text{ELD}}(z-z') \cdot \mathbf{E}_z(z'): \text{完全に非局所的な表式} \\ \mathbf{j}_{\text{A}} = \hat{z} \sigma_{\text{ELD}}(k_{\parallel 0}) \cdot \mathbf{E}_z: \text{近似的な表式} \end{cases}$$

として

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}^{(N)}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\mathbf{K}_{\text{cold},\perp} + \mathbf{K}_{\text{hot},\parallel}(k_{\parallel 0})) \cdot \mathbf{E}^{(N)} \\ = -i\omega\mu_0 \mathbf{I}^{(N-1)} \\ \mathbf{I}^{(N-1)} = \delta \mathbf{j}^{(N-1)} = \mathbf{j}_{\text{NL}}^{(N-1)} - \mathbf{j}_{\text{A}}^{(N-1)} \end{cases}$$

収束性の改善のためアルゴリズムを変更:  
それ以前の解を用いて反復

$$\mathbf{I}^{(N-1)} = \mathcal{A} \{ \delta \mathbf{j}^{(N-1)}, \delta \mathbf{j}^{(N-2)}, \dots, \delta \mathbf{j}^{(0)} \}$$

A: アンダーソン加速\*\*

\* www.comsol.com

\*\* D. G. Anderson, J. Assoc. Comput. Mach., 12 (1965)

アンダーソン加速は最小残差を達成しうる解を予測する

Given  $k \geq 1$ : アンダーソン加速の深さ

For  $N = 1, 2, \dots$

Set  $k_N = \min \{k, N\}$

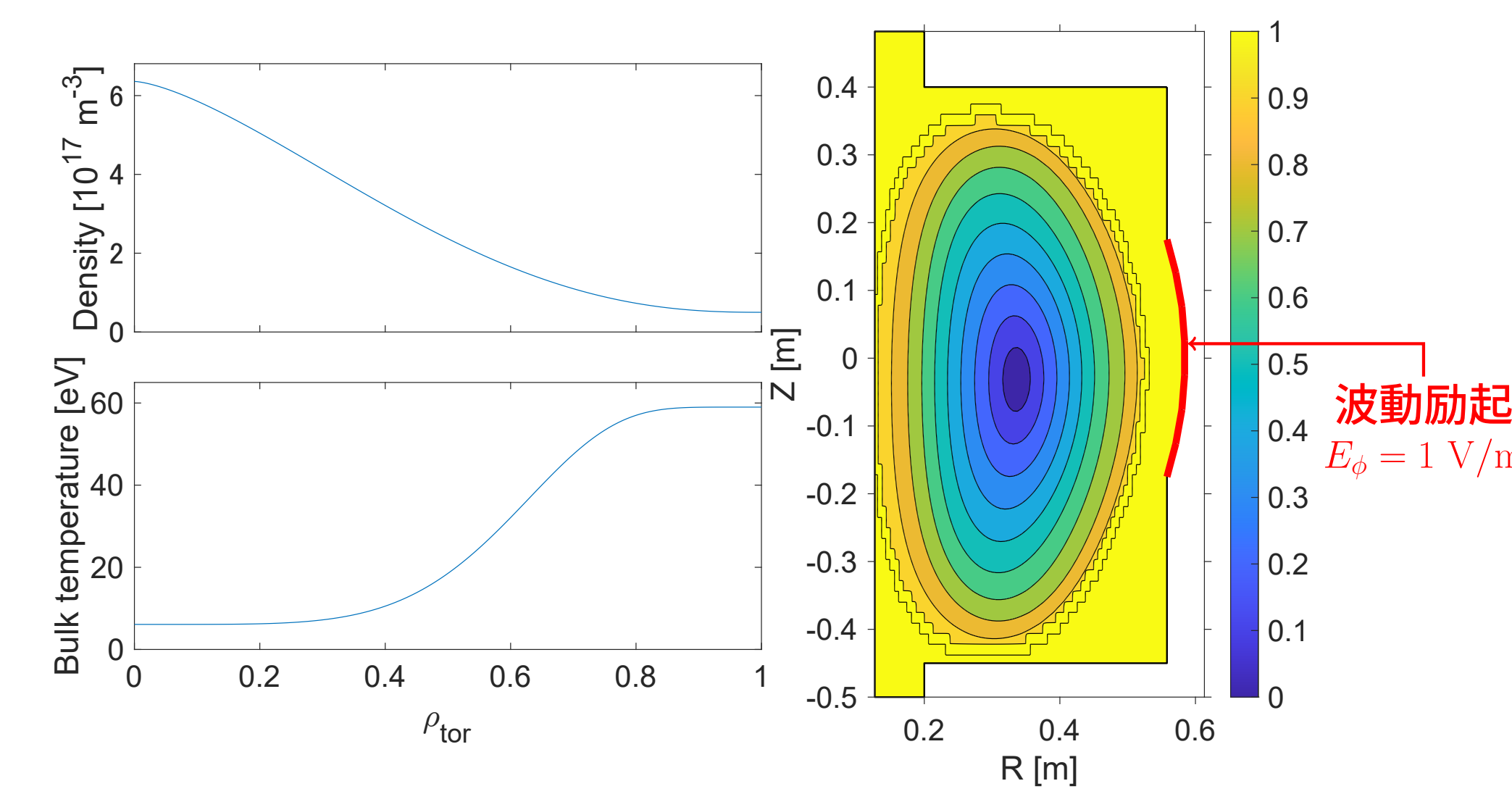
Set  $(\Delta_{N-k_N}, \dots, \Delta_N)$ , where  $\Delta_i = \delta \mathbf{j}^{(i)} - \delta \mathbf{j}^{(i-1)}$   
( $\|\Delta\|$ は反復計算の残差)

Determine  $(\alpha_0^{(N)}, \dots, \alpha_{k_N}^{(N)})$  that solves

$$\min_{\alpha} \|\alpha_0 \Delta_{N-k_N} + \dots + \alpha_{k_N} \Delta_N\| \text{ s.t. } \sum_i \alpha_i = 1$$

$$\text{Set } \mathbf{I}^{(N+1)} = \sum_{i=0}^{k_N} \alpha_i^{(N)} \delta \mathbf{j}^{(N-k_N+i)}$$

軸対称な系に対してシミュレーションを行った



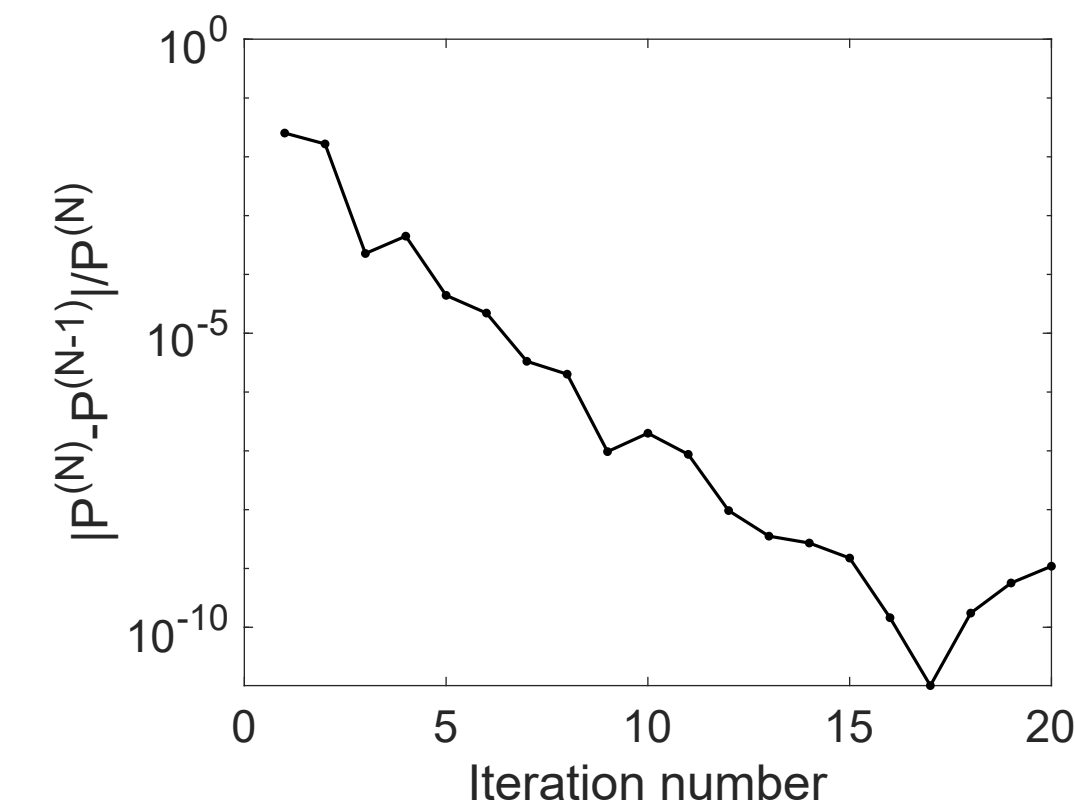
- TST-2でのLH波立ち上げプラズマの平衡を使用
- 速度分布関数は光線追跡/フォッカー-プランクコード\*の解を使用
- 軸対称性を仮定: トロイダルモード数  $n_\phi = 25$
- 外側境界の赤道面付近で波動を励起
- $k_{\parallel 0} \approx k_{\text{tor}} = n_\phi / R$ で解析的成分の波数を指定
- $\delta j = 0$ として反復を開始

\* A.P. Smirnov et al., Bull. Amer. Phys. Soc. 39, 1626 (1994),

R.W. Harvey et al., Proc. IAEA TCM on Advances in Sim. and Modeling of Thermonuclear Plasmas, 489 (1992)

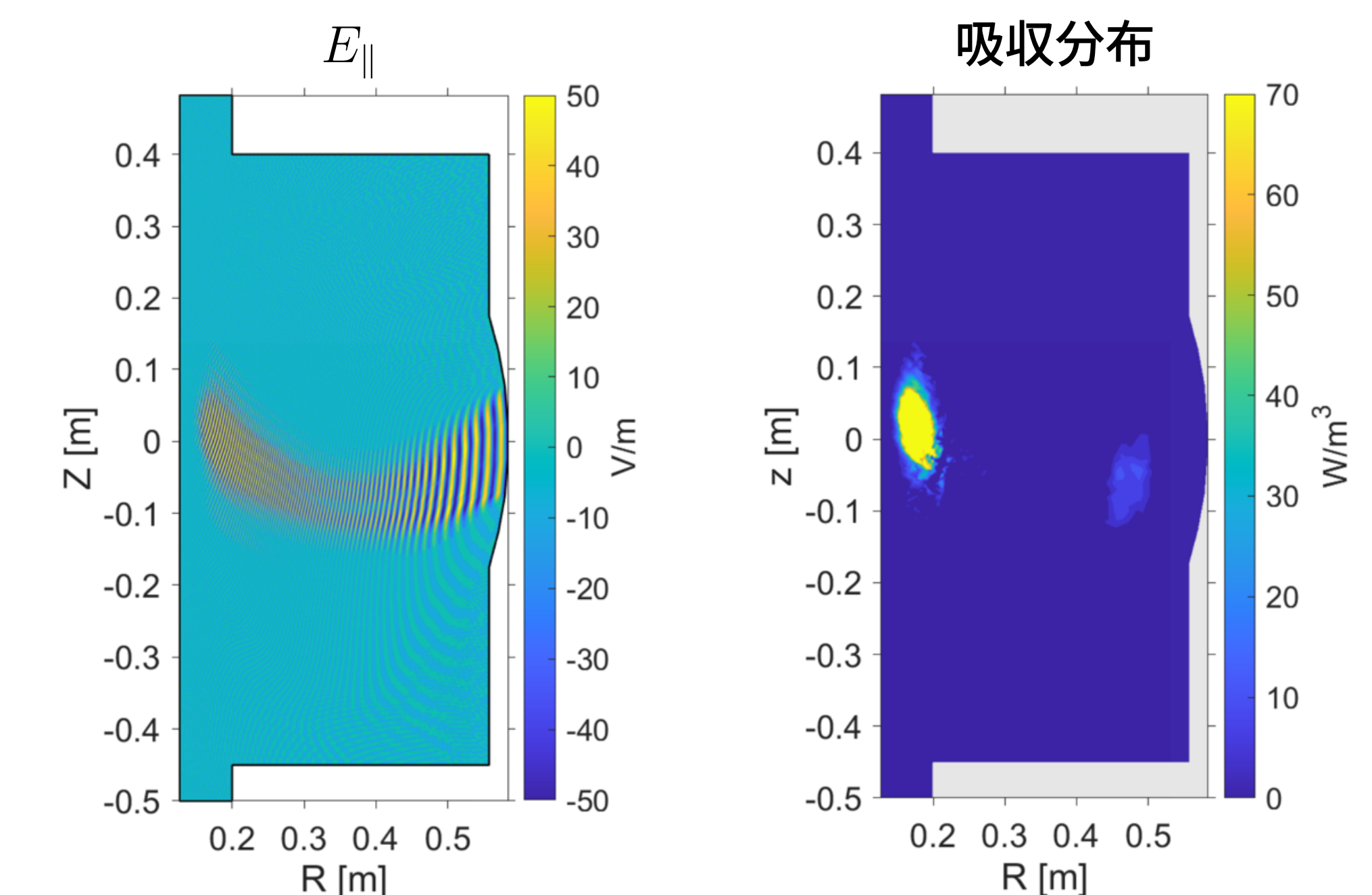
反復計算は収束した

全吸収の変動



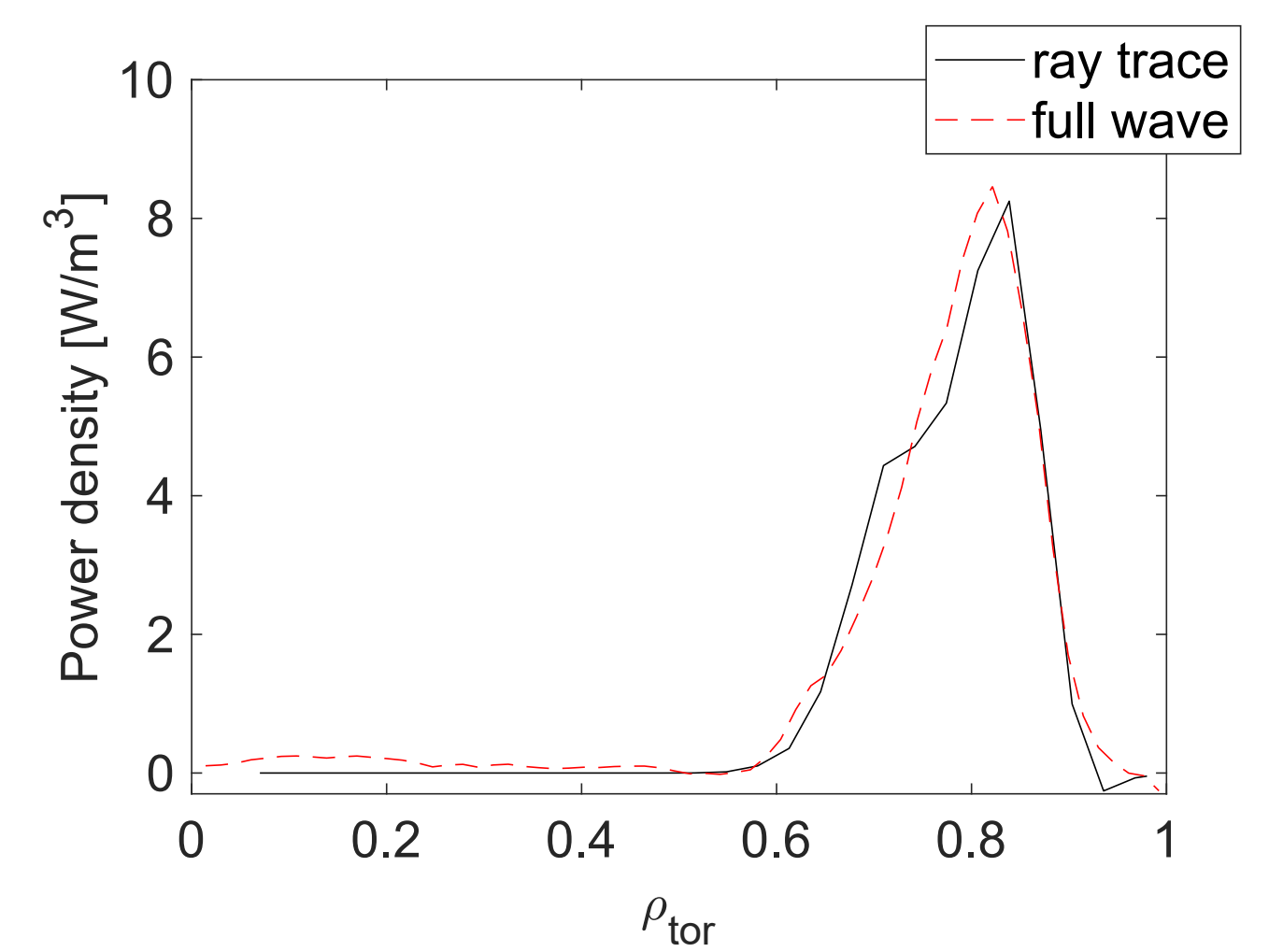
- 約15回の反復で収束
- 全吸収の相対的変動は $10^{-8}$ 以下
- 積分形と解析形での吸収評価の差は6%程度

収束解



得られた吸収分布を光線追跡予測との比較により検証した

吸収の磁気面平均



- 吸収分布は光線追跡/フォッカー-プランクコードと一致

まとめ

- 有限要素法に基づいた全波計算を行った
- 熱いプラズマの効果は反復計算によって導入した
- アンダーソン加速を用いて収束性を改善した
- 実験で得られたプラズマ平衡を用いて軸対称系でシミュレーションを行った
- 反復計算は収束した
- 電子の加熱分布を計算した

今後の課題

- 実際のアンテナ形状の導入
- フォッカー-プランクコードとの結合