クリスタリン表現に対応する(φ, Γ)-加群について

渡部匠

東京大学大学院数理科学研究科修士2年

修士論文の要旨

p進ガロア表現と$\widetilde{\mathbb{A}}_K$上の(φ, Γ)-加群の圏同値において，p進ガロア表現の特別なクラスであるクリスタリン表現に対応する$\widetilde{\mathbb{A}}_K$上の(φ, Γ)-加群を特徴づけた．

この研究は数論に属する．数論とは整数$\mathbb{Z}$の性質を調べる分野．整数を調べる上では，実数体$\mathbb{R}$やp進数体$\mathbb{Q}_p$について考えると良い．

p進数とは

pを素数$2, 3, 5, 7, 11, \dots$のどれかとする．このときp進整数環$\mathbb{Z}_p$とは

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots \qquad (a_i\text{は整数})$$

の形で書けるもののこと．$\mathbb{Q}_p$はその商体．

$\mathbb{Q}_p$は有理数全体$\mathbb{Q}$を含むことに注意．本研究は($\mathbb{R}$ではなく)$\mathbb{Q}_p$に関するもの．

定義

Kをp進体(例えば$\mathbb{Q}_p$やその有限次拡大)，G_Kをその絶対ガロア群とする．

G_Kのp進ガロア表現とは，有限次元$\mathbb{Q}_p$-線型空間VとVへの連続なG_Kの作用の組のこと．

G_Kの自由$\mathbb{Z}_p$-表現とは，有限生成自由$\mathbb{Z}_p$-加群TとTへの連続なG_Kの作用の組のこと．

p進ガロア表現や自由$\mathbb{Z}_p$-表現に対する主要な理論として，J.-M. Fontaineによる(φ, Γ)-加群の理論がある．以下，自由$\mathbb{Z}_p$-表現について述べる．

Notation

Kをp進体，kをその剰余体とする．$K_0 := W(k)[1/p]$とする．$\overline{K}$をKの代数閉包とし，その完備化を$\mathbb{C}_p$とする．$K_\infty := \bigcup_{n=1}^\infty K(\zeta_{p^n})$を$K$の$p$-円分拡大とする．$G_K := \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K\right)$, $H_K := \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)$，$\Gamma_K := \mathrm{Gal}\left(K_\infty/K\right)$とおく．$K_\infty$の完備化の整数環を$\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}$とし，そのtiltを

$$\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}^\flat := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}/p\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}$$

とおき，$\widehat{K_\infty}^\flat$をその商体とする．$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\flat, \mathbb{C}_p^\flat$も同様に定める．

$$\widetilde{\mathbb{A}}_K := W(\widehat{K_\infty}^\flat), \quad \widetilde{\mathbb{A}}_K^+ := W(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}^\flat), \quad A_{\mathrm{inf}} := W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\flat)$$

とおく．更に$\epsilon := (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots) \in \mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}^\flat$, $\mu := [\epsilon] - 1 \in \widetilde{\mathbb{A}}_K^+$, $\xi := \mu/\varphi^{-1}(\mu) \in \widetilde{\mathbb{A}}_K^+$とおく．

Fontaineはフロベニウス写像とG_Kの作用で安定な部分環$\mathbb{A}_K \subseteq W(\mathbb{C}_p^\flat)$を構成した．$\mathbb{A}_K$への$H_K$の作用は自明なので，特に$\Gamma_K$が作用している．$K$が絶対不分岐，つまり$K = K_0$の場合は$\mathbb{A}_K = W(k)((\mu))_p^\wedge$となる．

定義

$\mathbb{A}_K$上の(φ, Γ)-加群とは

- 有限生成自由$\mathbb{A}_K$-加群M
- Mへの連続かつ半線型なΓ_Kの作用
- $\mathbb{A}_K$-線型同型写像

$$\Phi_M \colon M \otimes_{\mathbb{A}_K, \varphi} \mathbb{A}_K \cong M$$

  であって，Γ_Kの作用と整合的なもの

の組のこと．

G_Kの作用に比べて$\Gamma_K \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$の作用は遥かに簡単なため，$\mathbb{A}_K$上の$(\varphi, \Gamma)$-加群は$G_K$の自由$\mathbb{Z}_p$-表現よりも遥かに単純なものである．しかし，これらの圏が圏同値になるというのがFontaineの定理である．

定理 [Fon90, Théorème 3.4.3.]

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{A}_K\text{上の}(\varphi, \Gamma)\text{-加群} & \overset{\text{圏同値}}{\longleftrightarrow} & G_K\text{の自由}\mathbb{Z}_p\text{-表現} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
M & \longmapsto & \left(M \otimes_{\mathbb{A}_K} W(\mathbb{C}_p^\flat)\right)^{\varphi = 1} \\
\left(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(\mathbb{C}_p^\flat)\right)^{H_K} & \longleftarrow\!\shortmid & T.
\end{array}$$

p進ガロア表現の中でも数論で重要となるクラスがいくつかある．そのうちクリスタリン表現について考える

修士論文で扱う問題

クリスタリン表現に対応する(φ, Γ)-加群とはなにか？

この問題はFontaine, Wach, Colmezの研究をもとに，Kが絶対不分岐の場合はBerger([Ber04])が定めたWach加群によってひとつの答えが出た．$\mathbb{A}_K^+ := W(k)[[\mu]] \subseteq \mathbb{A}_K$とおく．このときWach加群とは，

- 有限生成自由$\mathbb{A}_K^+$-加群N
- Nへの連続かつ半線型なΓ_Kの作用であって，N/μで自明となるもの
- $\mathbb{A}_K^+[1/\varphi(\xi)]$-線型同型写像

$$\Phi_N \colon N \otimes_{\mathbb{A}_K^+, \varphi} \mathbb{A}_K^+[1/\varphi(\xi)] \cong N[1/\varphi(\xi)]$$

  であって，Γ_Kの作用と整合的なもの

の組のことである．BergerはこのWach加群がなす圏とG_Kの自由クリスタリン$\mathbb{Z}_p$-表現のなす圏が圏同値であることを示した．NをWach加群とし対応する自由$\mathbb{Z}_p$-表現をTとおくと，Tに対応する$\mathbb{A}_K$上の(φ, Γ)-加群は$N \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{A}_K$で与えられる．つまりBergerは，クリスタリン表現に対応する(φ, Γ)-加群を，特別な条件を満たす$\mathbb{A}_K^+$-格子の存在によって特徴付けた．

$\rightarrow$ Kが絶対不分岐という条件は強いので，一般のp進体に拡張したい．

問題点

Kが分岐している場合は，$\mathbb{A}_K^+$の構成が知られていない．

そこで$\mathbb{A}_K$上の(φ, Γ)-加群ではなく，$\widetilde{\mathbb{A}}_K := W(\widehat{K_\infty}^\flat)$上の$(\varphi, \Gamma)$-加群を用いる．この場合$\mathbb{A}_K^+$の代わりに$\widetilde{\mathbb{A}}_K^+ := W(\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}^\flat)$が使える．修士論文の結果を述べる．

定義

1. $\mathfrak{q}_\infty := \{[a]x \in \widetilde{\mathbb{A}}_K^+ \mid a \in \mathfrak{m}_{\widehat{K_\infty}}^\flat, x \in \widetilde{\mathbb{A}}_K^+\}$．但し$\mathfrak{m}_{\widehat{K_\infty}}^\flat$は$\mathcal{O}_{\widehat{K_\infty}}^\flat$の極大イデアル.
2. p-捩れ元を持たない$W(k)$-加群M，半線型準同型写像$\varphi \colon M \to M[1/p]$に対し，$M_{\varphi\text{-fin}} := \{x \in M \mid \dim_{K_0}\langle \varphi^n(x) : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\rangle_{K_0} < \infty\}$と定める．

定義

$\widetilde{\mathbb{A}}_K^+$上のクリスタリン$(\varphi, \Gamma)$-加群とは

- 有限生成自由$\widetilde{\mathbb{A}}_K^+$-加群$N$
- Nへの連続かつ半線型なΓ_Kの作用
- $\widetilde{\mathbb{A}}_K^+[1/\varphi(\xi)]$-線型同型写像

$$\Phi_N \colon N \otimes_{\widetilde{\mathbb{A}}_K^+, \varphi} \widetilde{\mathbb{A}}_K^+[1/\varphi(\xi)] \cong N[1/\varphi(\xi)]$$

  であって，Γ_Kの作用と整合的なもの

の組であって，次の条件を満たすもののこと．

1. $(N/\mu)^{\Gamma_K}$は有限生成射影$(\widetilde{\mathbb{A}}_K^+/\mu)^{\Gamma_K}$-加群であって，自然な写像
$$(N/\mu)^{\Gamma_K} \otimes_{(\widetilde{\mathbb{A}}_K^+/\mu)^{\Gamma_K}} \widetilde{\mathbb{A}}_K^+/\mu \to N/\mu$$
は同型．
2. $(N/\mathfrak{q}_\infty)_{\varphi\text{-fin}}^{\Gamma_K}$は有限生成自由$W(k)$-加群であって，自然な写像
$$(N/\mathfrak{q}_\infty)_{\varphi\text{-fin}}^{\Gamma_K} \otimes_{W(k)} \widetilde{\mathbb{A}}_K^+/\mathfrak{q}_\infty \to N/\mathfrak{q}_\infty$$
は同型．

主定理

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathbb{A}}_K^+\text{上のクリスタリン}(\varphi, \Gamma)\text{-加群} & \xrightarrow{\text{圏同値}} & G_K\text{の自由クリスタリン}\mathbb{Z}_p\text{-表現} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
N & \longmapsto & \left(N \otimes_{\widetilde{\mathbb{A}}_K^+} W(\mathbb{C}_p^\flat)\right)^{\varphi = 1}
\end{array}$$

Wach加群と同様に，$\widetilde{\mathbb{A}}_K^+$上のクリスタリン$(\varphi, \Gamma)$-加群$N$と対応する$G_K$の自由クリスタリン$\mathbb{Z}_p$-表現$T$に対して，$N \otimes_{\widetilde{\mathbb{A}}_K^+} \widetilde{\mathbb{A}}_K$は$T$に対応する$\widetilde{\mathbb{A}}_K$上の$(\varphi, \Gamma)$-加群となる．つまりクリスタリン表現に対応する$\widetilde{\mathbb{A}}_K$上の$(\varphi, \Gamma)$-加群を，特別な条件を満たす$\widetilde{\mathbb{A}}_K^+$-格子の存在によって特徴付けた．

証明には[BS23]の結果である，G_Kの自由クリスタリン$\mathbb{Z}_p$-表現のなす圏と$\mathcal{O}_K$上の絶対プリズマティックF-クリスタルのなす圏の圏同値を用いる．具体的には，$\mathcal{O}_K$上の絶対プリズマティックF-クリスタル$\mathcal{N}_{\Delta}$に対し，$\mathcal{N}_{\Delta}(\widetilde{\mathbb{A}}_K^+, \varphi(\xi))$が$\widetilde{\mathbb{A}}_K^+$上のクリスタリン$(\varphi, \Gamma)$-加群であることを示し，擬逆関手を構成した．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}^{\text{ét}}(\widetilde{\mathbb{A}}_K) \arrow[rr, "{[Fon90]}", "\cong"'] & & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K) \\
\mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}^{\text{fh,crys}}(\widetilde{\mathbb{A}}_K^+) \arrow[u, "\otimes_{\widetilde{\mathbb{A}}_K^+} \widetilde{\mathbb{A}}_K"] \arrow[rr, "\text{主定理}"] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{crys}}(G_K) \arrow[u, hook] \\
& \mathrm{Vect}^{\varphi}(\mathcal{O}_{K,\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) \arrow[ul, "{\text{evaluate at } (\widetilde{\mathbb{A}}_K^+, \varphi(\xi))}"] \arrow[ur, "\cong", "{[BS23]}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

今後の展望

- semi-stable表現やde Rham表現に対応する$\widetilde{\mathbb{A}}_K$上の(φ, Γ)-加群の特徴付け
- 主定理を他の問題へ応用

参考文献

- Laurent Berger, *Limites de représentations cristallines*, Compos. Math. **140** (2004), no. 6, 1473–1498. MR 2098398
- Bhargav Bhatt and Peter Scholze, *Prismatic F-crystals and crystalline Galois representations*, Camb. J. Math. **11** (2023), no. 2, 507–562. MR 4600546
- Jean-Marc Fontaine, *Représentations p-adiques des corps locaux. I*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 249–309. MR 1106901